数理解析研究所講究録
第 721 巻 1990 年 9-15



# Braid 群の表現と、その Hodge analogue について。

千葉大. 教養 寺杣友秀

1. Introduction
2. 織田－T. の仕事.
3. Hodge analogue. — Determinant of Appel's H.G.F. —

## 1. Introduction

まず初めに. Topological な. Magnus 表現の話をしよう.
$\mathcal{N}_{n-1}$ を. $\mathbb{A}^1$ 内の $(n-1)$ 個の異なる点の全体とする。すなわち.

$$\mathcal{N}_{n-1} = \{(x_i)_{i=1,\cdots,n-1} \in (\mathbb{A}^1)^{n-1} \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}$$

とする。さらに. $\mathcal{N}_n$ から. $\mathcal{N}_{n-1}$ への写像 $\varphi_n$ を. $\mathcal{N}_n$ の点 $(x_1, \cdots, x_n)$ に対して $(x_1, \cdots, x_{n-1}) \in \mathcal{N}_{n-1}$ を対応させる写像とする. この時. $\varphi_n$ は typical fiber が. $\mathbb{P}^1$ から $\{\infty, x_1, \cdots, x_{n-1}\}$ を除いたものになる. fiber bundle になる。しかもこの fiber bundle は. $C^\infty$-section が存在する。ゆえに. 自然な準同型 $\varphi_{n*}$: $\pi_1(\mathcal{N}_n, \tilde{\eta}) \longrightarrow \pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)$ は全射となる. そして. section $s$ からひきおこされる $s_*$ によって. $\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)$ は. $\mathrm{Ker}(\varphi_{n*})$ に作用する. (ここで $\eta$ は. $\mathcal{N}_{n-1}$ の点.. $\tilde{\eta}$ は. $\eta$ の上にある. section 上の点..). $\mathrm{Ker}(\varphi_{n*})$ は. $\pi_1(\mathbb{P}^1 - \{x_1, \cdots, x_{n-1}, \infty\})$ (ここで. $\eta = (x_1, \cdots, x_{n-1})$) となり. この群を $G$ とおく. そして. $\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)$ の $G$ への作用は. $G' = [G, G]$, $G'' = [G', G']$ とおくと. $G'/G''$ への $\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta)$ の作用をひきおこす. ここで $M = G'/G''$ とおくと $\pi_1(\mathcal{N}_{n-1}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}(M)$ なる表現が得られたことになる。 $M$ の構造をくわしく見てみよう. $G^{ab} = G/[G, G]$, $A = \mathbb{Z}[G^{ab}]$ とおくと. $M$ には. conjugation により. $G$ module の構造がはいるが. この action は. $G^{ab}$ を経由し. 従って. $M$ には $A$-module の構造がはいる。

<u>Proposition</u> $\pi_1(\mathfrak{M}_{n-1}, \eta)$のMへの表現は、A-linearである。

<u>Definition</u> (Magnus representation) これによって得られた、$\pi_1(\mathfrak{M}_{n-1}, \eta) \longrightarrow \mathrm{Aut}_A(M)$なるA上の$\pi_1(\mathfrak{M}_{n-1}, \eta)$の表現を、Magnus representationという。

さて、MのA-moduleとしての構造であるが、Gは、rank(n−1)のfree groupであるので、これを利用して、Mの構造を計算することができる。結果はどうなるかと言えば、$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$を、$x_1, \cdots, x_{n-1}, \infty$のlocal monodromyを、Gの元に、延長したものとする。さらに、うまく$\gamma_1 \sim \gamma_n$をとり、基本関係が、$\gamma_1 \cdots \gamma_n = e$となる様にする。Gは、この時、$\gamma_1 \sim \gamma_{n-1}$で生成されるfree groupとなる。そして、Aでの$\gamma_1 \sim \gamma_{n-1}$の像を、$t_1 \sim t_{n-1}$とおく。Mは、この時、A上で、$[\gamma_i, \gamma_j] = -[\gamma_j, \gamma_i]$ $(1 \leqq i < j \leqq n-1)$で生成され、関係式は、$(t_i - 1)[\gamma_j, \gamma_k] + (t_j - 1)[\gamma_k, \gamma_i] + (t_k - 1)[\gamma_i, \gamma_j] = 0$ $(1 \leqq i < j < k \leqq n-1)$で与えられる。この事から、MはAの商体までtensorすれば、その次元は、$n-2$となる。さらに、$\pi_1(\mathfrak{M}_{n-1}, \eta)$の作用で不変な、Mのrank$(n-2)$のfree A submoduleが存在するという事実を認めれば、Magnus表現のdeterminant表現、$\pi_1(\mathfrak{M}_{n-1}, \eta) \longrightarrow A^\times$が得られる。

2. 織田−T.の仕事.

$l$を素数として、$l > n$を仮定する。(外ゆをとる時もう少しデリケートな議論をいとわなければ、たぶんこの仮定は必要ないと思われる。)1でのべた事は、$l$-adic versionを考えることにより、代数的な構成が可能である。kを標数0の体として、1の$l$ゆ乗根をすべて含むものとする。$\eta$を、$\mathfrak{M}_{n-1}$のgeometric generic point,

$\mathbb{P}^1_{\bar\eta}-\{\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1},\infty\}$ を fibration $\mathcal{M}_n\to\mathcal{M}_{n-1}$ の $\eta$ における geometric fiber とする。この時、$G^{(\ell)}$ を $\pi_1(\mathbb{P}^1_{\bar\eta}-\{\lambda_1,\cdots\lambda_{n-1},\infty\},\tilde\eta)$ の maximal pro-$\ell$ quotient とすれば、これは rank$(n-1)$ の free pro-$\ell$ group である。$A^{(\ell)}$ を、$\mathbb{Z}_\ell$ 上の $(G^{(\ell)})^{ab}$ の completed group ring とすると、$A^{(\ell)}\cong\mathbb{Z}_\ell[[u_1,\cdots,u_{n-1}]]$, $u_i=t_i-1$ となる。第一章の topological case の時にとった continuous section $s$ のかわりに、Beli model をとることにより、いわゆる Arithmetic な Magnus representation を構成することができる。

$\Phi:\ \pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)\longrightarrow \mathrm{Aut}_{A^{(\ell)}}M^{(\ell)}$.

ここで、$M^{(\ell)}$ は、$G^{(\ell)}$ の 2 階の Meta abel 化である。すなわち、$M^{(\ell)}=G^{(\ell)\prime}/G^{(\ell)\prime\prime}$。また、同様に、determinant をとることにより、$\det\Phi:\ \pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)\longrightarrow (A^{(\ell)})^\times$ なる準同型も得られる。

織田－T. [1] の主定理は、この homomorphism に関する記述である。その前に Kummer Character に関する Proposition を述べよう。以下群の右肩に $(\ell)$ をつけることにより、その max. pro $\ell$ quotient を表わす。

$\overline{\mathcal{M}_{n-1}}\cong(\mathbb{A}^1)^{n-1}-\bigcup_{i\neq j}D_{ij}$, $D_{ij}=\{(x_i)\in\mathbb{A}^{n-1}\mid x_i=x_j\}$

なので、$D_{ij}$ の回りの monodromy group が、$\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}},\eta)^{ab}$ の自然な generator になっている。ゆえに、

$(\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}},\eta)^{ab})^{(\ell)}\cong\mathbb{Z}_\ell^{\oplus\frac12(n-1)(n-2)}\left(\cong \bar{k}[\lambda_i,\frac{1}{\lambda_i-\lambda_j}]^\times\otimes\mathbb{Z}_\ell\right)$

なる同型が得られる。さて、$(\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)^{ab})^{(\ell)}$ の $\lambda_i-\lambda_j$ に対する Kummer Character を、$\rho_{ij}:\pi_1^{ab}(\mathcal{M}_{n-1},\eta)^{(\ell)}\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell$ とする。$\bigoplus_{i<j}\rho_{ij}:(\pi_1(\mathcal{M}_{n-1},\eta)^{ab})^{(\ell)}\longrightarrow\mathbb{Z}_\ell^{\oplus\frac12(n-1)(n-2)}$ を、$\rho_{ij}$ の和とすれば、$\oplus\rho_{ij}$ は、$(\pi_1(\overline{\mathcal{M}_{n-1}},\eta)^{ab})^{(\ell)}$

に制限すると.同型を与える。(ここで. $\oplus P_{ij}$ は.代数幾何的に定義したが.群論的にも表わせる.)

<u>Proposition</u> homomorphism det Φ を. $(\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)}$ に制限すると. $(a_{ij}) \in (\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)^{ab})^{(\ell)} \cong \bigoplus_{i=1}^{\frac{1}{2}(n-1)(n-2)} \mathbb{Z}_\ell$ に対して.

$$\det \Phi((a_{ij})) = \prod_{i<j} ((1+u_i)(1+u_j))^{a_{ij}}$$

で与えられる.

このProposition により. $\pi_1(n_{n-1}, \eta)$ から. $(A^{(\ell)})^\times$ への homomorphism $\chi$ を.

$$\chi : \pi_1(n_{n-1}, \eta) \ni g \longmapsto \left( \prod_{i<j} ((1+u_i)(1+u_j))^{P_{ij}(g)} \right) \in (A^{(\ell)})^\times$$

で定義すると. 2つのCharacter Φ, $\chi^{-1}$ の積 $\Phi \cdot \chi^{-1}$ は. $\pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta)$ 上で trivial になる。そこで exact sequence

$$1 \longrightarrow \pi_1(\overline{n_{n-1}}, \eta) \longrightarrow \pi_1(n_{n-1}, \eta) \longrightarrow Gal(\bar{k}/k) \longrightarrow 1$$

を考えれば、$\Phi \cdot \chi^{-1}$ は. $Gal(\bar{k}/k) \xrightarrow{\theta} (A^{(\ell)})^\times$ を factor する。その factorization $\theta$ は. 次の Main Theorem で表わされる。

<u>Main Theorem</u> (織田−T [1]) $\theta$ はいわゆる "universal Jacobi sum" で書き表わされる. (参照 [2]).

3. Hodge analogue — Appel の超幾何級数の行列式 —

この章では. 上の結果の Hodge analogue を考察しよう. そのまず Introduction として. $A^1$ 上の2点 $\lambda_1, \lambda_2$ の時の場合を考えてみる。

(1). 有限体 $\mathbb{F}_q$ 上の場合.

有限体 $\mathbb{F}_q$ は. 乗法群の中に $\mu_{\ell^e}$ を含んでいるものとする. $\mathbb{F}_q^\times \supset \mu_{\ell^e}$. $\chi_1, \chi_2$ を $\mu_{\ell^e}$ の non-trivial character で. さらに.

$\chi_1 \cdot \chi_2$ も non-trivial になっているものとする。$\mathcal{N}_2 =$ Spec $\mathbb{F}_q[\lambda_i, \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}]$ の maximal ideal $\mathfrak{m}$ で、$\mathfrak{m}$ は、$(\lambda_1 - u_1, \lambda_2 - u_2)$ $(u_i \in \mathbb{F}_q)$ となっているものとする。
$\ell$ を、(十分大きく) Char $\mathbb{F}_q = p$ と素な素数とする。
$\pi_1(\mathcal{N}_2, \eta)$ 内での $\mathfrak{m}$ での 1 つの Frobenius を、$Fr_{\mathfrak{m}}$ と書く。
$(\chi_1, \chi_2)$ は、$A^{(\ell)}$ の $\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ に値をもつ character と考えられ、$\overline{\mathbb{Q}_\ell}$ を、$(\chi_1, \chi_2)$ によって $A^{(\ell)}$-algebra と思ったものを、$\overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$ と書く。この時、$M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$ は 1 次元になる。

$$\Phi = \det \Phi : \pi_1(\mathcal{N}_2, \eta) \longrightarrow M^{(\ell)} \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2)$$
$$\underset{Fr_{\mathfrak{m}}}{\cup\!\!\!|}$$

そこで、$tr\,(\Phi(Fr_{\mathfrak{m}}) \otimes_{A^{(\ell)}} \overline{\mathbb{Q}_\ell}(\chi_1, \chi_2))$ を計算すると、それは、Lefschetz の fixed pt formula より、適当な Beli lifting をとれば、$\sum_{x \in \mathbb{F}_q} \chi_1(x - u_1) \chi_2(x - u_2)$ と等しく、$y = (x - \ 1)/(u_2 - u_1)$ と変数変換すると、上式は、

$$\sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1((u_2 - u_1) y)\, \chi_2((u_2 - u_1)(y - 1))$$
$$= \chi_1(u_2 - u_1) \chi_2(u_2 - u_1) \sum_{y \in \mathbb{F}_q} \chi_1(y) \chi_2(y - 1)$$

となり、Kummer character と、Jacobi の和の積になっている。

(2) 複素数体上で Period を考えた場合。

$X$ : $\exp z_1 = x - \lambda_1$, $\exp z_2 = x - \lambda_2$ で定義される Riemann 面が $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} - \{\lambda_1, \lambda_2\}$ の universal abelian covering である。
$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C} - 2\pi i \mathbb{Z}$ が、$\alpha_1 + \alpha_2 \neq 2\pi i \mathbb{Z}$ とする。この時、
$\pi_1(\mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \lambda_2\})$ の Character $\chi$ を、

$$\chi : \pi_1(\mathbb{A}^1 - \{\lambda_1, \lambda_2\}) \longrightarrow \mathbb{C}^\times$$
$$\lambda_i \text{ の monodromy} \longmapsto \exp(\alpha_i)$$

によって定義する。この時 $\omega = \exp(\alpha_1-1)z_1 \exp(\alpha_2-1)z_2\, dx$ は、$\chi$ に付随する $X$ 上の differential form となる。ここで、この differential form の period を考えると、形式的には、

$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (x-\lambda_1)^{\alpha_1-1}(x-\lambda_2)^{\alpha_2-1}\,dx$ となる。ただし、きちんとやるには、Riemann面の branch をきちんと指定する必要はある。これができることは認めて、以下形式的計算を進めよう。上式は、$y=(x-\lambda_1)/(\lambda_2-\lambda_1)$ と変数変換をすることにより、

$$\int_0^1 (\lambda_2-\lambda_1)^{\alpha_1-1}(\lambda_2-\lambda_1)^{\alpha_2-1}\, y^{\alpha_1-1}(y-1)^{\alpha_2}\,(\lambda_2-\lambda_1)\,dy$$
$$= (\lambda_2-\lambda_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(-1)^{\alpha_2-1}\int_0^1 y^{\alpha_1-1}(1-y)^{\alpha_2-1}\,dy$$
$$= (\lambda_2-\lambda_1)^{\alpha_1+\alpha_2-1}(-1)^{\alpha_2-1}\frac{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}$$

と変形される。ここでも同様に、Kummer character と、ガンマ関数の積の形になっていることは、興味深い。それでは、一般個数の点をぬいた時の Period の方にあたる、いわゆる Hodge analogue は、どうなっているのであろうか。

$\mathbb{A}^1$ の2点の場合を考えた時もそうであった様に、　個の点で考える時も、covering 上の differential form と、topological cycle の branch をきちんと指定する必要がある。その正確な、period としての解釈は、準備中の拙論[2]を見てもらうことにして、ここでは、もう少し Sophisticate されていない、分かりやすい形で述べることにしよう。

$n \geqq 3$ とする. $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ を実数で. $\lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ を満たすものとする. $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ を正の実数とする。
$1 \leqq i, j \leqq n-1$ なる $i, j$ に対して. 特異積分 $a_{ij}$ を.

$$a_{ij} = \int_{\lambda_i}^{\lambda_{i+1}} \prod_{p=1}^{i} (x-\lambda_p)^{\alpha_p - 1} \prod_{p=i+1}^{n} (\lambda_p - x)^{\alpha_p - 1} x^j \, dx$$

で定義すれば. 収束することがわかる。この時.

<u>Theorem</u> (Hodge analogue)

行列 $(a_{ij})$ の行列式は.

$$\det(a_{ij})_{i,j} = \prod_{i=1}^{n} \left\{ (-1)^{i-1} \prod_{j \neq i} (\lambda_j - \lambda_j) \right\}^{\alpha_i} \cdot \prod_{1 \leqq i < j \leqq n} (\lambda_j - \lambda_i)^{-1} \cdot \frac{\Gamma(\alpha_1) \cdots\cdots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n)}$$

となる。

上の定理において. $\lambda_i, \alpha_i$ について両辺とも holomorphic なので. branch をうまくとれば. 複素数 $\lambda_i, \alpha_i$ についても成り立つ. またこの定理は. 前半が Kummer character の部分で. 後半が $\Gamma$ 関数となっていて. 織田－T. の結果の Hodge analogue となっている.