数理解析研究所講究録
第 721 巻 1990 年 202-215



# 局所体上の多様体のBrauer群について

東大教養学部 斎藤秀司

## §序.

整数論の世界において「体のBrauer群」が大切な役割を果たす事はよく知られていると言ってよいでしょう。しかしそれをごく自然に一般化した「スキームのBrauer群」(正確な定義を後で説明する)となるといまだその重要性が広く一般に認識されているとは言えないかもしれない。しかし特に整数論的幾何学(あるいは幾何学的整数論といってもよいが)の世界においては「スキームのBrauer群」は大いに活躍しているのである。今ここでその2, 3の例についてふれてみる事にしよう。最初に次の結果は"古典的"とも言えるものである。

<u>定理([T] [M])</u> $X$を有限体上のproper smooth surfaceとすると次の2つは同値

(1) $X$のBrauer群, $\mathrm{Br}\,X$は有限群。

(2) $\rho(X) = -\mathrm{ord}_{s=1}\,\zeta(X, s)$。(Tate 予想)

ここに $\rho(X) = X$のPicard数 $=$ rank of $NS(X)$ $=$ rank of $\mathrm{Pic}(X)$

$\zeta(X, s)$ は $X$の合同ゼータ函数。

上の定理の類似として数体上の曲線のTate-Shafarevich群と曲線の整数環上のモデルのBrauer群との関係(cf §1(G))に関する研究がある。又[S-1]では数体上の多様体のBrauer群と多様体のHasse原理との関係が研究されている。さてこの小論では上の例とは別のトピックにスポットをあて局所体上の多様体のBrauer群について論じてみることにしよう。その前に一般のBrauer群の定義より始めよう。

## §1 スキーム上のBrauer群

以下 $X$ をスキームとする。$\mathcal{A}$ を $\mathcal{O}_X$-algebra の sheaf とする。$\mathcal{A}$ が次の補題における同値な条件を満たす時 X上のAzumaya algebra と呼ぶ。(cf [G, I §5])

補題(1-1) $X$ と $\mathcal{A}$ を上の通りとした時 次は同値。

(1) $\mathcal{A}$ は $\mathcal{O}_X$-module として局所自由で 任意の $X$ の点 $x$ に対し,

$$\mathcal{A}(x) := \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x)$$

とおく時 $\mathcal{A}(x)$ は $k(x)$ 上の central simple algebra。つまりある $k(x)$ の有限次分離拡大 $k/k(x)$ が存在して

$$\mathcal{A}(x) \otimes_{k(x)} k \simeq M_n(k)$$

(2) $\mathcal{A}$ は $\mathcal{O}_X$-module として局所自由で 自然な写像(層としての)

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{A}^\circ \to \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X\text{-module}}(\mathcal{A})$$

は同型。ここに $\mathcal{A}^\circ$ は $\mathcal{A}$ の逆環。

(3) 任意の $X$ の点 $x$ に対し適当な エタール近傍 $U$ と整数 $r>0$ が存在して

$$\mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_U \simeq M_r(\mathcal{O}_U). \quad (r \text{ を } \mathcal{A} \text{ の } U \text{上の rank という})$$

$X = \mathrm{Spec}\, k$ ($k$ は体) の場合は 上のいずれの条件も よく知られた $k$ 上の Azumaya algebra (= central simple algebra) の定義を与えることに注意しよう。体上の場合と同様に $X$ の Brauer群は $X$ 上の Azumaya algebra の集合のある同型類として定義される。$X$ 上の2つの Azumaya algebra $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}'$ はある局所自由な

$\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}'$が存在して

$$\mathcal{A}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{E}nd_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E})\simeq\mathcal{A}'\otimes_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E}')$$

なる時 similar と定義する。これは同値関係を与える。($\mathcal{E}nd(\mathcal{E})\otimes\mathcal{E}nd(\mathcal{E}')\simeq\mathcal{E}nd(\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')$に注意せよ!)

定義(1-2) X上の Brauer 群を

$$\mathrm{Br}X=\{X\text{上の Azumaya algebras}\}/\text{similarity}$$

と定める。$\mathcal{A}$の class を$[\mathcal{A}]$と書く時 $[\mathcal{A}\otimes\mathcal{A}']=[\mathcal{A}]\cdot[\mathcal{A}']$ なる作用を定める事によって$\mathrm{Br}X$は可換群になる。単位元は$[\mathcal{O}_X]$, $[\mathcal{A}]$の逆元は$[\mathcal{A}^\circ]$で与えられる。

体 k の場合には自然な同型

$$\mathrm{Br}(k)\simeq H^2(k,\mathbb{G}_m)\quad(\text{ガロアコホモロジー})$$

が存在する事はよく知られている(cf [Se,X§5]) これを一般化して(cf[G-II]

定理(1-3) 自然な単写像

$$c_X:\mathrm{Br}X\longrightarrow H^2(X_{et},\mathbb{G}_m)\quad(\text{エタールコホモロジー})$$

が存在する。ここに$\mathbb{G}_m$は$X_{et}$上の乗法群の層。

上の写像の構成は体上の場合と同様にして行われる。その際必要なのは次の Skolem-Noether の定理の一般化である。

定理(1-4) $\mathcal{A}$をX上の Azumaya algebra とする。$\mathcal{A}$の任意の自己同型$\phi$に対し X のある Zariski open covering $(U_i)_{i\in I}$をとれば $\phi|U_i$はある$u_i\in\Gamma(U_i,\mathcal{A})^*$による内部自己同型によって与えられる。

系(1-5) $\mathcal{A}ut\, M_r(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{P}GL_r(\mathcal{O}_X)$ (sheafとして同型)

(1-5)により

$$P_r(X) = \{X\text{上の rank } r \text{ の Azumaya algebras}\}/\text{同型}$$

とすると一般論により自然な同型

$$P_r(X) \simeq H^1(X_{et}, \mathcal{P}GL_r(\mathcal{O}_X))$$

が存在する。$c_X$ は完全系列

$$1 \to \mathbb{G}_m \to GL_r(\mathcal{O}_X) \to \mathcal{P}GL_r(\mathcal{O}_X) \to 1$$

から生ずる boundary map として得られるものである。(詳しくは[G-II])

さて上の $c_X$ は一般には同型でない。それは $X$ が Noether なら $Br\,X$ は torsion。しかし $H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$ は non-torsion になり得るからである。しかし予想として

予想(1-6) $X$ が quasi-compact なら $Br\,X \simeq H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)_{tor}$.

(1-6)が肯定的に知られている結果として

定理(1-7) 次の場合(1-6)は正しい

(1) $X = \operatorname{Spec} R$ $R$: henselian local ring

(2) $\dim X \leq 1$

(3) $\dim X \leq 2$ で $X$ は regular

(1-7)(2)と(3)については[G-II §2]を参照. (1)はつぎより従う。([G-I §6])

定理(1-8) $R$ を henselian local ring とし $k$ をその剰余体とする時 $Br(R) \simeq Br(k)$.

(1-7)(3)の系として次を得る.

<u>定理(1-9)</u> Xを次元2以下の正則スキーム, Kをその函数体とする.

$$\mathrm{Br}\,X = \bigcap_{x \in X^1} \mathrm{Br}\,\mathcal{O}_{X,x} \subset \mathrm{Br}\,K$$

ここに $X^1$ はXの codimension one の点全体, $\mathcal{O}_{X,x}$ は局所環とする。

言いかえると $\mathrm{Br}\,X$ は $\mathrm{Br}\,K$ の中で codimension one で"不分岐"な元全体として捉えられる。

次に Brauer 群について知られている結果を述べてみよう.

(A) Kが以下のいづれかとすると $\mathrm{Br}\,K = 0$。

(1) $k$ は代数閉体とし K は $k$ 上の一変数代数函数体

(2) R は excellent discrete valuation ring で剰余体 $k$ は代数閉体。KはRの商体

(3) K は有限体

上は全て $(C_1)$-体なることによる. (cf [G-III])

(B) X を代数閉体 $k$ 上の代数曲線とすると $\mathrm{Br}\,X = 0$

これは(A)(3)と(1-9)より従う (cf [G III Cor (1.2)])

(C) K は局所体, つまり完備(或いは excellent henselian)付値環 $\mathcal{O}_K$ で剰余体が有限なるものの商体とする。この時

(1) $\mathrm{Br}\,\mathcal{O}_K = 0$

(2) $\mathrm{Br}\,K \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

(1)は (A)(3) と (1-8) より直ちに従う。(2)については [Se XII]。

(D) $\mathrm{Br}\,\mathbb{R} \simeq \frac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$ non-trivial な class は Hamilton 4元数体 $\mathbb{H}$ で与えられる

(E) KはQの有限次代数拡大又は$\mathbb{F}_p$上の一変数代数函数体とする。$P_f$をKの有限素点全体とし$P_{real}$をKの実素点全体とする。各$v \in P_f \cup P_{real}$に対し$K_v$をKのvでの完備化とし

$$\iota_v : \mathrm{Br}K \to \mathrm{Br}K_v \xrightarrow{\sim} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \quad (v \in P_f)$$

$$\iota_v : \mathrm{Br}K \to \mathrm{Br}\mathbb{R} \simeq \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z} \quad (v \in P_{real})$$

を自然な写像と(C),(D)における同型の合成とする。この時次は完全系列。(cf. e.g [W XIII §6])

$$0 \to \mathrm{Br}K \xrightarrow{\iota} \Big(\bigoplus_{v\in P_f} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{v\in P_{real}} \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}\Big) \xrightarrow{s} \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to 0,$$

ここに$\iota = \bigoplus_v \iota_v$, sは和をとる写像。これと(1-9)の系とにて$X = \mathrm{Spec}\,O_K$ ($\mathrm{ch}\,K=0$)又はKの$\mathbb{F}_p$上のprojective smooth model ($\mathrm{ch}\,K=p>0$)とすると

$$\mathrm{Br}X \simeq \bigoplus_{i=1}^{r-1} \tfrac{1}{2}\mathbb{Z}/\mathbb{Z}$$

ここに$r = \# P_{real}$.

(F) ([K]) n次元局所体とする。つまり体の系列
$K_0, K_1, \cdots, K_n = K$があって次をみたすとする

(ア) $K_0$は有限

(イ) $i \geq 1$に対し$K_i$はexcellent $\overbrace{\text{discrete valuation}}^{\text{Henselian}}$ fieldで剰余体は$K_{i-1}$。

この時自然な単射

$$\Phi : \mathrm{Br}K \to K^M_{n-1}(K)\text{の指標群}$$

がある。ここに$K^M_{n-1}$はMilnor K-群。n=1の場合$K^M_0(K) = \mathbb{Z}$で上は(C)(2)の同型を与える。

(G) X を次のいづれかとする。

(ア) $\mathbb{F}_q$ 上の proper smooth geometrically connected surface

(イ) 2次元正則スキームで,ある代数体 $k$ の整数環 $\mathcal{O}_k$ 上 proper & flat

この時

予想 (※) (Artin-Tate, Tate-Shafarevich) Br X は有限

(ア)の場合予想 (※) が Tate 予想に同値であることは既に序の中の定理で述べた。(イ)の場合にはそれは以下の Tate-Shafarevich 予想に同値である。(cf [G III §4])

今 X の Tate-Shafarevich 群を

$$Ш(X/\mathcal{O}_k) = \mathrm{Ker}\left(H^1(k, J(\bar{k})) \to \bigoplus_{v \in P_f \cup P_{real}} H^1(k_v, J(\bar{k}))\right)$$

と定義する。ここに J は k 上の代数曲線 $X \otimes_{\mathcal{O}_k} k$ の Jacobian variety. 予想は Ш$(X/\mathcal{O}_k)$ が有限群なることを主張する。

[S-2] においては予想 (※) を X の函数体の Braur 群に結びつけ次のように言いかえている。K をその函数体とする。この時古典的な代数体のイデール類群の類似物が K に対しても定義され それを $C_K$ とした時 自然な写像

$$\Phi : \mathrm{Br}\, K \to (C_K \text{の指標群})$$

が定義される。この時

(1) $\mathrm{Ker}\,\Phi = \mathrm{Br}\, X$

(2) Br X が有限なることと $\Phi$ が全射なることは同値。

## §2 局所体上の多様体のBrauer群

以下 $k$ を局所体(cf §1(C)), $X$を$k$上のproper smooth variety とする。今$X$上のAzumaya algebra $\mathcal{A}$ を固定しよう。

$X_0 = \{X$ の閉点全体$\}$ として $x \in X_0$ に対して

$$\mathcal{A}(x) = \mathcal{A} \otimes_{\mathcal{O}_X} k(x) \quad (\mathcal{O}_X \text{はXの構造層}, k(x)\text{はxの剰余体})$$

とするとこれは$k(x)$上のAzumaya algebraでその$\mathrm{Br}\,k(x)$におけるclassを$[\mathcal{A}(x)]$とする。$k(x)$は$k$の有限次拡大だから自然に局所体の構造を持っている。よって§1(C)(2)により自然な同型 $\mathrm{Br}\,k(x) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ がある。これによる$[\mathcal{A}(x)]$の像を$\langle \mathcal{A}, x \rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ とかこう。次に$X$上の0-cyclesの群を

$$Z_0(X) = \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z}$$

とし $c \in Z_0(X)$

$$c = \sum_{x \in X_0} n_x [x]$$

に対し
$$\langle \mathcal{A}, c \rangle := \sum_x n_x \langle \mathcal{A}, x \rangle \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

とおく。明らかにこれは$\mathcal{A}$の$\mathrm{Br}X$におけるclassにしか依らない。これによって自然なpairing

$$\mathrm{Br}\,X \times Z_0(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

を得たわけである。

<u>定理(2-1)</u> $c \in Z_0(X)$が $c \sim 0$, 有理同値でzero とすると任意の $\omega \in \mathrm{Br}\,X$に対し $\langle \omega, c \rangle = 0$.

先の定理により我々は自然なpairing

(2-2) $\langle\ ,\ \rangle \quad \mathrm{Br}\,X \times CH_0(X) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

を得た。ここに $CH_0(X) = Z_0(X)/\sim$ は $X$ 上の 0-cycles の有理同値類の群で $X$ の 0次元 Chow 群と呼ばれるものである。

以下我々の興味は(2-2)がどの程度の完全性を持つかということにある。これは言いかえると(2-2)によって誘導される

(2-3) $\quad \mathrm{Br}\,X \to CH_0(X)^\vee := \mathrm{Hom}(CH_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ (指標群)

がどの程度同型に近いか？といってもよい。

まず $\dim X = 0$ つまり $X = \mathrm{Spec}\,k$ の場合でみれば $CH_0(X) = \mathbb{Z}$, $CH_0(X)^\vee = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ となり(2-3)は先の§1(c)(2)に他ならない。

次に最初の自明でない場合，$\dim X = 1$ の時について見てみよう。この場合 $CH_0(X)$ は $X$ のピカール群つまり $X$ 上の因子類群 $\mathrm{Pic}\,X$ に一致する．$J = \mathrm{Jac}(X)$ を $X$ の Jacobian variety として $J(k)$ をその $k$-有理点全体のなす群とすると，よく知られているように完全系列

$$0 \to J(k) \to \mathrm{Pic}\,X \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z}$$

が存在する。$J(k)$ は $k$ の p-adic topology より誘導される位相によりコンパクト位相群になる。よって $\mathrm{Pic}\,X$ には $J(k)$ を open として その群構造と compatible な位相が unique に定まりこれにより $\mathrm{Pic}\,X$ が局所コンパクト群になる．

定理(2-4) (2-2)は自然な同型

$$\mathrm{Br}X \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(CH_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を誘導する。ここに $\mathrm{Hom}_{cont}$ は上で与えた位相に関し連続な指標全体を表わす。

上の定理は Lichtenbaum ([L]) によって $p=ch(k)$ と素な part に制限して示された。p-part に関する制限の理由は(2-4)が次の同じ制限の下において示されている Tateの定理 ([T-2]) に帰着されて示されていることによるものである。

定理(2-5) $k$ を局所体, $A$ を $k$ 上のアーベル多様体, $B$ をその双対 Abel 多様体とする。この時自然な同型

$$WC(B/k) \simeq \mathrm{Hom}_{cont}(A(k), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が存在する。ここに $WC(B/k)$ は $B/k$ 上の主等質空間の同型類, $A(k)$ は $A$ の $k$-有理点全体で $k$ の p-adic topology より導かれるコンパクトなトポロジーが与えられている。

上の同型は

$$A(k) = H^0(k, A(\bar{k}))$$

$$B = \mathrm{Ext}^1(A, \mathbb{G}_m)$$

$$WC(B/k) = H^1(k, B(\bar{k}))$$

なる事実より導かれる自然な pairing

$$H^0(k, A(\bar{k})) \times H^1(k, B(\bar{k})) \to H^2(k, \mathbb{G}_m) = \mathrm{Br}\,k \simeq \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

から導かれるものである。(2-5)の証明においては, Tate による

局所体のガロアコホモロジーの双対定理（[Se-2 II §5]）が本質的な役割を果たす。

次に(2-4)の高次元化を考えてみよう。Lichtenbaum - Tate の手法をそのまま適用しようとして突き当たる問題点は $CH_0(X)$ は $\dim X > 1$ の場合一般には多様体の $k$-有理点としては表わせないという事である。よって(2-2)はその様に $k$ 上のガロアコホモロジーに関する双対定理には結びつけられない。そこで別の観点からのアプローチが必要となる。[S-3]では(2-4)の別証明が与えられている。そのひとつの利点はそれが p-part を含めたものである事。よって逆に(2-5)の p-part も含めた別証をも与える事である。さらにもうひとつの利点はそれが高次元化に適用するものであることである。以下その概略を説明する。

$\mathcal{O}$ を $k$ の整数環，$\mathfrak{m}$ をその極大イデアル，$F = \mathcal{O}/\mathfrak{m}$ とおく。$X$ の $\mathcal{O}$ 上の regular model $\mathfrak{X}$ をひとつ固定する。定義により $\mathfrak{X}$ は $\mathcal{O}$ 上 proper flat な regular scheme で $\mathfrak{X}\otimes_{\mathcal{O}} k \simeq X$ なるものとする。この時 $CH_0(X)$ の部分群の下降列

$$CH_0(X) = U^0CH_0(X) \supset U^1CH_0(X) \supset \cdots \supset U^{\nu}CH_0(X) \supset U^{\nu+1}CH_0(X) \supset \cdots$$

が定義される。正確な定義については代数的 K-理論を駆使した technical なものなのでここでは省略するがイメージ的には $U^{\nu}CH_0(X)$ を "modulo $\mathfrak{m}^{\nu}$ して trivial になる 0-cycle classes" より

なる部分群として考えられよう。特に $\dim X=1$ の場合 $CH_0(X)$ の部分群 $\Gamma$ が先に説明した右の p-adic topology より誘導される $CH_0(X)$ の位相に関し open なる事と十分大なる $\nu$ に対し $U^\nu CH_0(X)$ を含む事は同値である。

補題　$\omega\in Br X$ に対し十分大なる $\nu$ をとれば

$$\langle \omega, c\rangle = 0 \quad \text{for } \forall c\in U^\nu CH_0(X).$$

上の補題を言いかえれば

系(2-6) 写像(2-3)は

$$\Phi_X:\ Br X \to \mathrm{Hom}_{cont}(CH_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

を誘導する。ここに右辺は指標 $\chi: CH_0(X)\to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で十分大なる $\nu$ に対し $\chi(U^\nu CH_0(X))=0$ なるもの全体を表わす。

さて(2-4)の高次元版として我々は次の予想を提出しよう。

予想(2-7)　$\Phi_X$ は全射。

この予想に関しこれまでに得られた結果を述べよう。

定理(2-8)　$\dim X=1$ なら (2-7) は正しい。

先にも注意した様にこれは (2-4) と (2-5) の p-part も含めた別証明を与えている。

定理(2-9)　$\dim X=2$ とする。

(1) $\chi\in \mathrm{Hom}_{cont}(CH_0(X), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ の位数が $ch(F)$ と素なら $\Phi_X$ の像に入る。

(2) $X$ が good reduction を持つなら $\Phi_X$ は全射

以下 上の定理の証明のKey Ideaを説明してこの小論を終える事にしよう。$\mathfrak{X}/\mathcal{O}$を先の通りとし $Y=\mathfrak{X}\otimes_{\mathcal{O}}F$ とおく

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathfrak{X} \arrow[d] & Y \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\ \mathrm{Spec}\,k \arrow[r, hook] & \mathrm{Spec}\,\mathcal{O} & \mathrm{Spec}\,F \arrow[l, hook'] \end{tikzcd}$$

今 $\dim X=n$ として $\mathfrak{p}=(y_0,y_1,\cdots,y_n)$ を$Y$の(スキーム論的)点の列で次を満たすものとする。

$y_0$ は$Y$の閉点

$y_1$ は $y_0$ を含む$Y$の既約部分閉スキームで次元1なるものの生成点

⋮　　　　⋮

$y_n$ は $y_{n-1}$ を含む$Y$の既約部分閉スキームで次元$n$なるものの生成点

$P(Y)$を上の様な$\mathfrak{p}$全体としよう。$K$を$X$の函数体とした時 各$\mathfrak{p}\in P(Y)$に対し"$K$の$\mathfrak{p}$に沿ったHensel局所化$K_{\mathfrak{p}}$"なるものが定義され、$K_{\mathfrak{p}}$は$(n+1)$次元局所体(cf.§1(F))の有限個の積となっている。(cf.[K-S,§5]) よって§1(F)によって自然なpairing

(2-10) $\langle\ ,\ \rangle_{\mathfrak{p}}: \mathrm{Br}\,K_{\mathfrak{p}}\times K_n^M(K_{\mathfrak{p}})\to\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$

が存在する。(有限個の体の積の$\mathrm{Br}$や$K_n^M$は各componentの体の$\mathrm{Br}$, $K_n^M$の積として定義する。)一方2つの写像

(2-11) $\mathrm{Br}\,X\to\prod_{\mathfrak{p}\in P(Y)}\mathrm{Br}\,K_{\mathfrak{p}}$

(2-12) $\varprojlim_{\nu} CH_0(X)/U^{\nu}CH_0(X)\leftarrow\prod_{\mathfrak{p}\in P(Y)}K_n^M(K_{\mathfrak{p}})$

が構成される。(2-11)については Br なる functor の自然なものである。(2-12)は代数的K-理論的手法によるものである。しかも(2-11)を2つの pairing (2-2)と(2-10)に関し双対に移したものが(2-12)になっている。そこで問題は(2-11)の像の双対を $\coprod_{\mathfrak{p}\in P(Y)} K_n^M(k_{\mathfrak{p}})$ の中で記述する事に帰着され，実際(2-8)と(2-9)の条件の下でこれが遂行されるのである。

## REFERENCES


[L] S. Lichtenbaum, *Duality theorems for curves over p-adic fields*, Invent. Math. **7** (1969), 120–136.

[M] J. Milne, *On a conjecture of Artin and Tate*, Annals of Math. **102** (1975), 517–533.

[G] A. Grothendieck, *Le groupe de Brauer I, II et III*, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam.

[K] K. Kato A generalization of local class field theory by using $K$-groups I, J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo Sec. IA **26** (1979), 303–376; *II*, ibid **27** (1980), 603–683; *III*, ibid **29** (1982), 31–43.

[Se] J.-P. Serre, "Corps Locaux," Hermann, Paris, 1962.

[Se-2] J.-P. Serre, *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Math. **5** (1965), Springer-Verlag.

[T] J. Tate, *On the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer and a geometric analog*, in Dix Exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam.

[T-2] J. Tate, *WC-groups over p-adic fields*, Séminaire Bourbaki **10** (1957/1958).

[K-S] K. Kato and S. Saito, *Global class field theory of arithmetic schemes*, Contemporary Math. **55 I** (1986), 255–331.

[S-1] S. Saito, *Some observations on motivic cohomologies of arithmetic schemes*, Invent. Math. **98** (1989), 371–404.

[S-2] S. Saito, *Arithmetic theory on an arithmetic surface*, Annals of Math. **129** (1989).

[S-3] S. Saito, *Arithmetic on two dimensional local rings*, Invent. Math. **85** (1986), 379–414..