

事前情報に基づく統計的推測方式

鹿見島大・理 稲田浩一 ( Koichi Inada )

1. はじめに

統計的推測における初期の方法は、主として一部の母数を除いて完全に規定された数学モデルで表わされた母集団からの無作為観測データに基づき母集団の母数についての情報を得ることであり、そこに科学的・客観的推論として大きな意義を有している。その後、母集団についての既存の事前情報を利用する推測方式も研究され、いわゆる Bayesian 学派の誕生をみた。ここでは、既存の知識を母数の事前分布として導入し、これを標本の提供する情報に組み合わせる推測方式が研究されている。このように標本から得られる情報に加えて母数についての事前情報を組み合わせる推測方式は自然な着想と思われる。

本研究では、データと既存の事前情報を組み合わせる推測方式として Bayes 的な立場と異なる統計的推測方式を提唱し、その推測性質を調べ、さらに他の推測方式との比較をする。

すなわち、正規母集団の平均の推測に関し、平均がある区間内にあるという事前情報のもとで、データとこの事前情報を結合した推測方式を提唱し、予備検定推定量・Thompson(1968)の推定量との比較をする。また、正規母集団の分散の推測に関しても、同様の状況のもとでの推測方式を提唱し、予備検定推定量との比較をする。ここでは、推測方式の比較基準として平均2乗誤差を用いる。

## 2. 事前情報に基づく平均の推定

分散  $\sigma^2$  が既知の正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からの大きさ  $n$  の無作為標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を用いて、平均  $\mu$  の推定問題を考える。通常、推定量として標本平均  $\bar{X}$  を用いるが、平均  $\mu$  に関してある種の事前情報がある場合は、その事前情報を利用すべきである。例えば、平均  $\mu$  は 0 に近いという事前情報がある場合は、この事前情報を利用した推定量としては予備検定推定量  $P_T$  が考えられる。

### 予備検定推定量 $P_T$

$$P_T = \begin{cases} 0 & \text{if } |\bar{X}| / \sigma_n < C \\ \bar{X} & \text{if } |\bar{X}| / \sigma_n \geq C \end{cases}$$

ここでは、平均  $\mu$  が 0 を含む区間  $[-\mu_0, \mu_0]$  にあるという事前情報のもとでの平均  $\mu$  の推定問題について論じる。

Thompson(1968)はこのような状況のもとで平均  $\mu$  の推定量 TH を与えている。

#### Thompson の推定量 TH

$$TH = \bar{X} + \frac{\sigma_n^2}{4\mu_0} \log \left[ \frac{(\bar{X} - \mu_0)^2 + \sigma_n^2}{(\bar{X} + \mu_0)^2 + \sigma_n^2} \right]$$

本研究では、3つの推定量 T1, T2, SE を提案し、平均 2 乗誤差 (MSE) を用いて 6 つの推定量 T1, T2, SE, PT, TH,  $\bar{X}$  の間の比較を行う。

#### 推定量 T1, T2, SE

[Type I]

$$T(a) = \begin{cases} \bar{X} & \text{if } |\bar{X}| \leq \mu_0 \\ \bar{X} + a\sigma_n & \text{if } \bar{X} < -\mu_0 \quad (a \geq 0) \\ \bar{X} - a\sigma_n & \text{if } \bar{X} > \mu_0 \end{cases}$$

[Type II]

$$MT(B) = \begin{cases} \bar{X} + b\sigma_n & \text{if } \bar{X} \leq 0 \\ \bar{X} - b\sigma_n & \text{if } \bar{X} > 0 \end{cases} \quad (b \geq 0)$$

[Type III]

$$SE(w) = w \bar{X} \quad (0 \leq w \leq 1)$$

推定量  $T(a)$ ,  $MT(b)$ ,  $SE(w)$  の平均 2 乗誤差は、次式で与えられる。

$$MSE[T(a)] = \sigma_n^2 \{ a^2 \{ 1 - \Phi(\theta_0 - \theta) + \Phi(-\theta_0 - \theta) \} - 2a \{ \phi(\theta_0 - \theta) + \phi(-\theta_0 - \theta) \} + 1 \}$$

$$MSE[MT(b)] = \sigma_n^2 \{ b^2 - 4b\phi(\theta) + 1 \}$$

$$MSE[SE(w)] = \sigma_n^2 \{ (w-1)^2 \theta^2 + w^2 \}$$

ただし、 $\theta = \mu / \sigma_n$ ,  $\theta_0 = \mu_0 / \sigma_n$  で  $\Phi$  と  $\phi$  は標準正規分布の c.d.f. と p.d.f. である。

$a_1$ ,  $b_1$ ,  $w_1$  の値は、それぞれ次のような Minimax 基準によって定め、 $T_1 = T(a_1)$ ,  $T_2 = MT(b_1)$ ,  $SE = SE(w_1)$  とする。

$$MSE[T(a_1)] = \inf_{a \geq 0} \sup_{\mu \in [-\mu_0, \mu_0]} MSE[T(a)]$$

$$MSE[MT(b_1)] = \inf_{b \geq 0} \sup_{\mu \in [-\mu_0, \mu_0]} MSE[MT(b)]$$

$$MSE[SE(w_1)] = \inf_{0 \leq w \leq 1} \sup_{\mu \in [-\mu_0, \mu_0]} MSE[SE(w)]$$

$b_1$  と  $w_1$  は、次式で与えられるが、 $a_1$  については簡単な形で求めることはできないが存在性は示される。

$$b_1 = 2\phi(\theta_0)$$

$$w_1 = \frac{\theta_0^2}{1 + \theta_0^2}$$

いくつかの  $\theta_0$  に対する  $a_1, b_1, w_1$  の値は表 1 で与えられる。

表 1.  $a_1, b_1, w_1$  の値

$\theta_0$	$a_1$	$b_1$	$w_1$
0.0	.798	.798	.000
0.5	.972	.704	.200
1.0	.866	.484	.500
1.5	.804	.259	.692
2.0	1.281	.108	.800
2.5	1.492	.035	.862
3.0	1.568	.009	.900

$\theta_0 = 0.5, 1.0, 1.5$  について、推定量の  $MSE/\sigma_n^2$  のグラフを描き、推定量  $T1, T2, SE$ , 予備検定推定量  $PT(\alpha = 0.05)$  と Thompson の推定量  $TH$  の間の比較を行う。

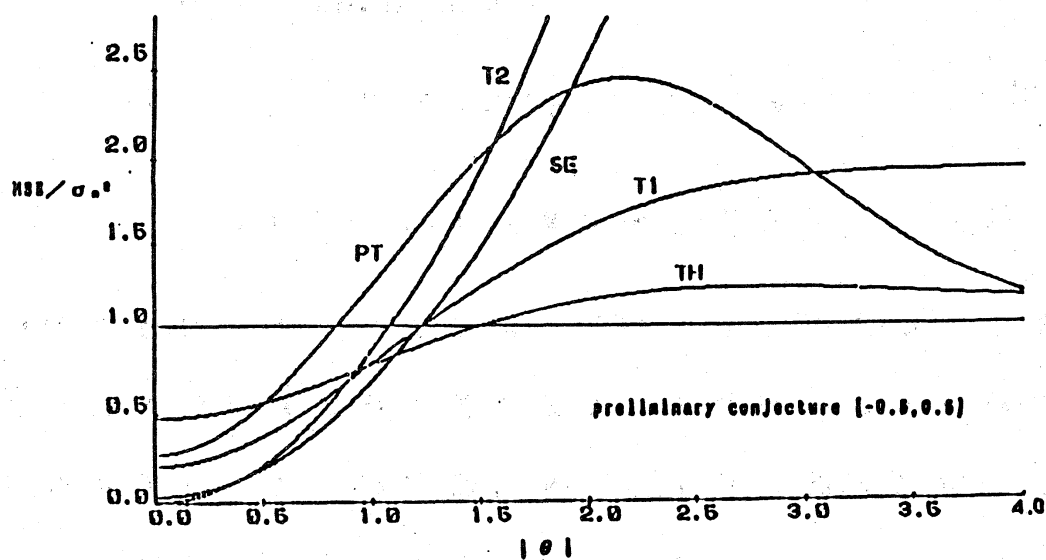


図 1.  $\bar{X}$  に対する推定量の平均 2 乗誤差

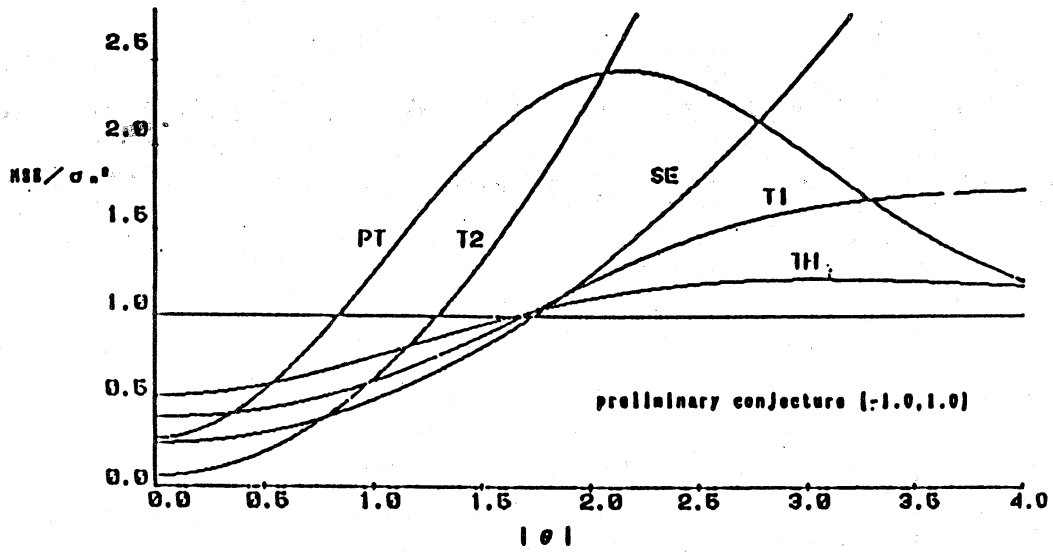


図 2.  $\bar{X}$  に対する推定量の平均 2 乗誤差

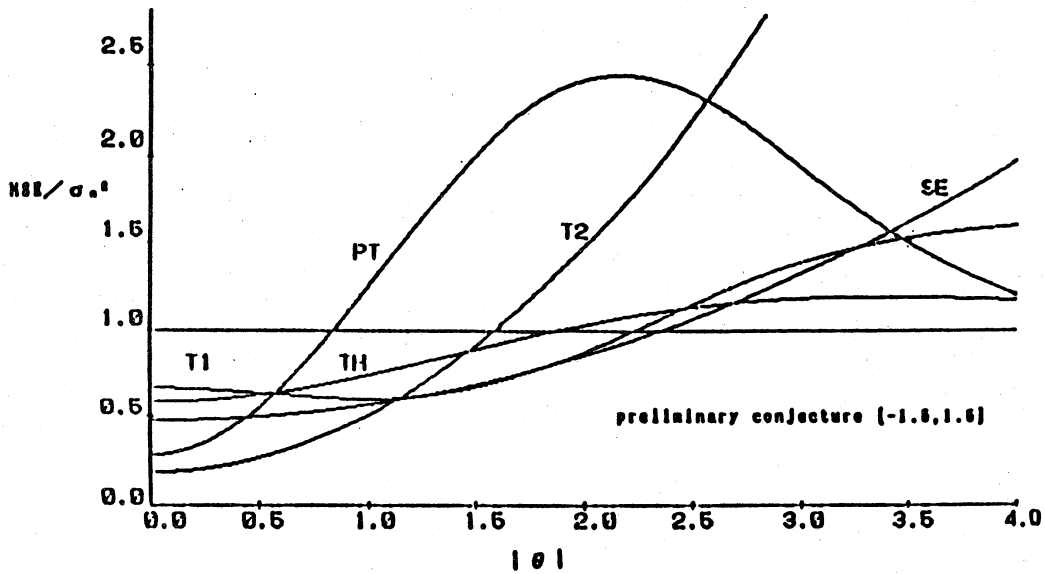


図 3.  $\bar{X}$  に対する推定量の平均 2 乗誤差

推定量の比較に際して、 $MSE/\sigma_n^2$ をより小さく同時に $MSE/\sigma_n^2 < 1$ を満たす $\theta$ の範囲をより広く持つ推定量が望ましいと思われる。更に区間に関する事前情報が誤っていた場合も考慮しなければならない。これらのことを考慮して、図 1, 2, 3 より著者は推定量 T1 を推奨する。

## 3. 事前情報に基づく分散の推定

正規母集団  $N(\mu, \sigma^2)$  からの大きさ  $n$  の無作為標本  $X_1, X_2, \dots, X_n$  を用いて、分散  $\sigma^2$  の推定問題を考える。通常、

推定量として不偏分散推定量  $U = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1)$

を用いるが、分散  $\sigma^2$  に関してある種の事前情報がある場合は、その事前情報を利用すべきである。例えば、分散  $\sigma^2$  は既知の値に  $\sigma_0^2$  に近いという事前情報がある場合は、この事前情報を利用した推定量としては予備検定推定量  $PT$  が考えられる。

予備検定推定量  $PT$ 

$$PT = \begin{cases} \sigma_0^2 & \text{if } \chi^2_{n-1}(1-\alpha/2)/(n-1) < U/\sigma_0^2 < \chi^2_{n-1}(\alpha/2)/(n-1) \\ U & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここでは、分散  $\sigma^2$  は既知の値  $\sigma_0^2$  を含む区間  $[\sigma_0^2/C, \sigma_0^2 C]$  にあるという事前情報のもとでの分散  $\sigma^2$  の推定問題について論じる。2つの推定量  $T_1, T_2$  を提案し、平均2乗誤差 (MSE) を用いて4つの推定量  $T_1, T_2, PT, U$  の間の比較を行う。

推定量  $T_1, T_2, SE$ 

[Type I]

$$T(w, C) = \begin{cases} \sigma_0^2 & \text{if } C^{-1} < U/\sigma_0^2 < C \\ wU & \text{if } U/\sigma_0^2 \geq C \quad (0 < w \leq 1, C > 0) \\ w^{-1}U & \text{if } U/\sigma_0^2 \leq C^{-1} \end{cases}$$

[Type II]

$$T(w) = \begin{cases} wU & \text{if } U/\sigma_0^2 > 1 \\ w^{-1}U & \text{if } U/\sigma_0^2 \leq 1 \end{cases} \quad (0 < w \leq 1)$$

推定量  $T(w, C), T(w)$  の平均 2 乗誤差は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{MSE}[T(w, C)] &= \sigma^4 \{ [w^{-2}I_a(\beta_1) + w^2(1 - I_b(\beta_1))] (n+1)(n-1) \\ &\quad - 2\{w^{-1}I_a(\beta_2) + w(1 - I_b(\beta_2))\} + 1 \} \\ &\quad + (2\sigma_0^2\sigma^2 - \sigma_0^4) \{ I_a(\beta_3) - I_b(\beta_3) \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{MSE}[T(w)] &= \sigma^4 \{ [w^{-2}I_a(\beta_1) + w^2(1 - I_a(\beta_1))] (n+1)(n-1) \\ &\quad - 2\{w^{-1}I_a(\beta_2) + w(1 - I_a(\beta_2))\} + 1 \} \end{aligned}$$

ただし、 $I_x(\beta)$  は不完全ガンマ関数比で  $\beta_1 = (n+3)/2$ ,  $\beta_2 = (n+1)/2$ ,  $\beta_3 = (n-1)/2$ ,  $a = (n-1)C^{-1}\sigma_0^2/(2\sigma^2)$ ,  $b = (n-1)C\sigma_0^2/(2\sigma^2)$ ,  $d = (n-1)\sigma_0^2/(2\sigma^2)$  である。

$w_1, C_1, w_2$  の値は、各々次のような Minimax 基準によって定め、 $T_1 = T(w_1, C_1), T_2 = T(w_2)$  とする。

$$\text{MSE}[T(w_1, C_1)] = \inf_{0 < w \leq 1, C > 0} \sup_{\sigma^2 \in [\sigma_0^2/C_0, \sigma_0^2 C_0]} \text{MSE}[T(w, C)]$$

$$\text{MSE}[T(w_2)] = \inf_{0 < w \leq 1} \sup_{\sigma^2 \in [\sigma_0^2/C_0, \sigma_0^2 C_0]} \text{MSE}[T(w)]$$

いくつかの  $n$  と  $C_0$  に対する  $w_1, C_1, w_2$  の値は、表 2 で与えられる。



表 2.  $w_1, C_1, w_2$  の値

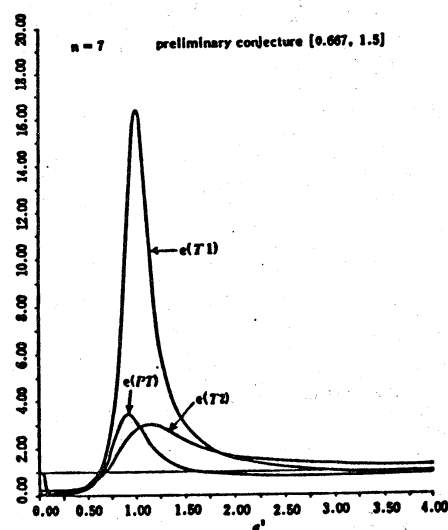
n	$C_0$	$w_1$	$C_1$	$w_2$	n	$C_0$	$w_1$	$C_1$	$w_2$
7	1.5	.422	2.37	.618	30	1.5	.880	1.14	.893
	2.0	.626	1.60	.665		2.0	.929	1.08	.930
	2.5	.686	1.46	.701		2.5	.935	1.07	.935
10	1.5	.591	1.69	.698	50	1.5	.942	1.06	.944
	2.0	.739	1.35	.760		2.0	.960	1.04	.960
	2.5	.783	1.28	.791		2.5	.961	1.04	.961
20	1.5	.801	1.25	.833	100	1.5	.978	1.02	.978
	2.0	.884	1.13	.887		2.0	.980	1.01	.980
	2.5	.900	1.11	.900		2.5	.980	1.01	.980

$C_0 = 1.5, 2.0, 2.5$  について、推定量  $T_1, T_2$ , 予備検定推定量  $PT(\alpha = 0.05)$  の間の比較を、次のような  $U$  に対する効率 (efficiency) を用いて行う。

$$e(T_1) = \text{MSE}(U) / \text{MSE}(T_1)$$

$$e(T_2) = \text{MSE}(U) / \text{MSE}(T_2)$$

$$e(PT) = \text{MSE}(U) / \text{MSE}(PT)$$

図 4.  $U$  に対する推定量の効率

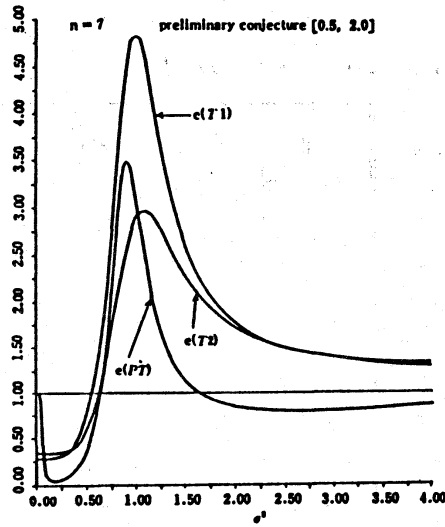


図 5. U に対する推定量の効率

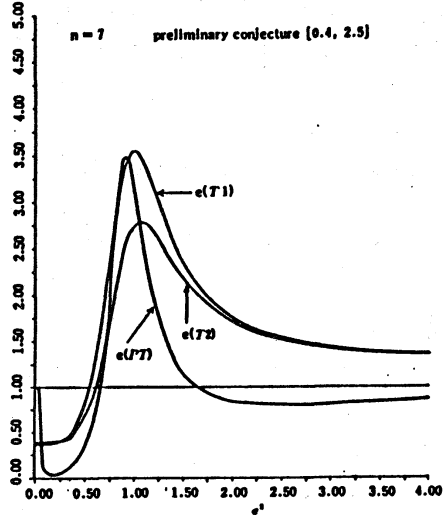


図 6. U に対する推定量の効率

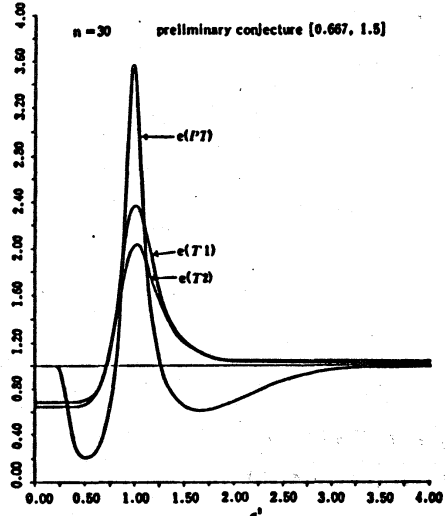


図 7. U に対する推定量の効率

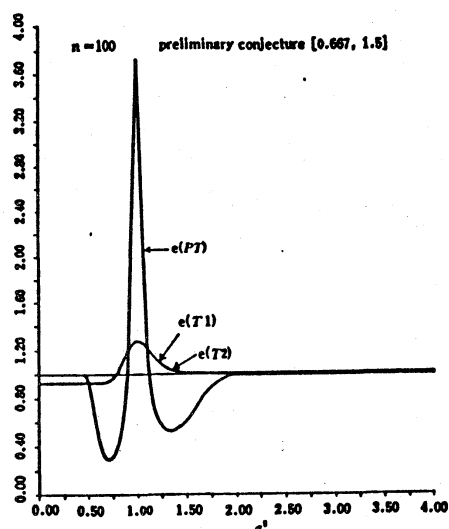


図 8.  $U$  に対する推定量の効率

推定量の比較に際して、効率  $e(T)$  をより大きく同時に  $e(T) > 1$  を満たす  $\theta$  の範囲をより広く持つ推定量が望ましいと思われる。更に区間に関する事前情報が誤っていた場合も考慮しなければならない。これらのことを考慮して、図 4, 5, 6, 7, 8 より著者は推定量  $T1$  を推奨する。

#### 参考文献

- [1] Inada, K. (1989). Estimation of variance after preliminary conjecture. Bulletin of Informatics and Cybernetics, Vol. 23, No. 3~4, 183-198.
- [2] 北川敏男 (1984). 「推測過程論」. 共立出版.
- [3] Thompson, J.R. (1968). Accuracy borrowing in the estimation of the mean by shrinkage to an interval. J. Am. Statist. Assoc. 63, 953-963.