

ミニ有限要素と自由境界問題

電通大 田端正久 (Masahisa Tabata)
電通大(院) 宮崎龍人 (Tatuhiro Miyazaki)
電通大(院) 森下 映 (Akira Morishita)

0. はじめに

自由境界を有する流れ問題では、流れに伴って変化する解析領域を追跡しなければならない^{1,2,3)}。その解析手法には、これまで、ラグランジュ座標系を使う方法とオイラー座標系を使う方法とが用いられてきた。我々は非圧縮粘性流体の自由境界問題を”ミニ有限要素⁴⁾”を用いて、これら2つの座標系に基づいたスキームで解析を行う。

ミニ有限要素は、流速にバブル関数付き三角形1次要素、圧力に三角形1次要素を使う組合せである。我々は、この要素が自由境界問題の計算、特にラグランジュ有限要素近似に適していることを示す。

第1の方法であるラグランジュ有限要素近似では各時間ステップで流体粒子の運動を求め、すべての要素を粒子と共に移動させる。自由境界は粒子の動きに従って自然に近似される。第2の方法は、自由境界付近以外ではオイラー座標系に基づいて計算する。ナビエ・ストークス方程式をストークス方程式と移流方程式とに分解し、移流方程式を L^2 -安定な上流型有限要素法で解く^{5,6)}。自由境界はラグランジュ的に近似し、その近傍では要素の追加、削除を行う。

数値例として圧縮成形問題⁷⁾を単純化して導いたモデル問題にこれらの方法を適用し、その有効性、特長を調べる。

実際の圧縮成形問題は摩擦を有する境界をもつ。そこで境界の一部が摩擦境界⁸⁾である問題を設定し、その問題に対する解法を試みる。

1. 自由境界問題

時刻 t に流体の占めている空間領域を $\Omega(t)$ とする。 $\Omega(t)$ は \mathbf{R}^2 で有界で、自由境界を表す未知関数 η ,

$$\eta : \mathbf{R}^2 \times (0, T) \rightarrow \mathbf{R}$$

によって

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbf{R}^2; \eta(x, t) > 0\} \quad (1)$$

と定義される。ここに T は時刻を表す正定数である。 $Q(T)$ を

$$Q(T) = \{(x, t); x \in \Omega(t), 0 < t < T\} \quad (2)$$

とおく。 $Q(T)$ 上でナビエ・ストークス方程式

$$\frac{Du}{Dt} - \nu \Delta u + \text{grad } p = f, \quad (3a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (3b)$$

が成立する。ここに $u: Q(T) \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p: Q(T) \rightarrow \mathbf{R}$ はそれぞれ流速, 圧力を示す未知関数, ν は動粘性係数, f は外力, Δ はラプラス作用素である。(3a)式の D/Dt は物質微分

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \cdot \text{grad} \quad (4)$$

を示している。

境界で, 流速境界条件

$$u = g, \quad (5)$$

または, 応力境界条件

$$T_i = 0, \quad i=1, 2 \quad (6)$$

が課せられており, 未知関数 η は

$$\frac{D\eta}{Dt} = 0 \quad (7)$$

を満たしている。ここに(5)式の g は与えられた関数, (6)式の T_i は表面力

$$T_i = \sum_{j=1}^2 (-p \delta_{ij} + 2\nu D_{ij}(u)) n_j, \quad i=1, 2 \quad (8)$$

で, δ_{ij} はクロネッカーのデルタ, D_{ij} は変形速度テンソル

$$D_{ij}(u) = (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i) / 2 \quad (9)$$

である。

流速に対する初期条件と, 初期形状 $\Omega(0)$ は与えられている。

自由境界問題では, 流速 u , 圧力 p と同時に領域形状を与える η も未知関数である。以下に示す数値解法においては自由境界はラグランジュ的に計算されるので η は陽に表れない。

2. 自由境界問題に対する数値解法

2. 1 ミニ有限要素

空間方向の離散化には混合型有限要素法を用いる。我々の使うミニ有限要素は、流速にバブル関数付き三角形1次要素、圧力に三角形1次要素を使う組合せである。

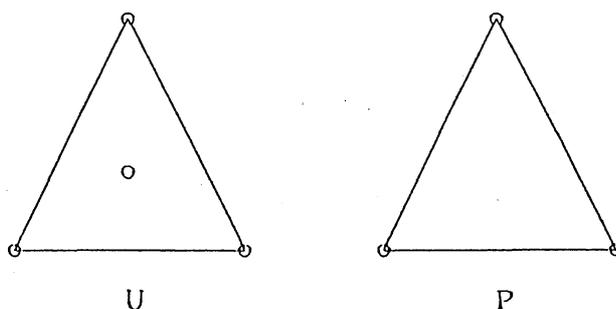


図 1. ミニ有限要素

バブル関数付き三角形1次要素は重心に節点を持つ要素で、基底関数 ϕ_i は三角形の頂点で

$$\phi_i = \lambda_i - 9\lambda_i\lambda_j\lambda_k, \quad (10a)$$

三角形の重心で

$$\phi_{ijk} = 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k \quad (10b)$$

である。ここで λ_i , λ_j , λ_k は面積座標である。この要素は次の性質をもつ。

- ① この組合せは Inf-Sup (LBB) 条件を満足しているものの中で、最も自由度の少ない組合せの一つである。
- ② ミニ有限要素は、内部節点を持つので、静的縮約 (static condensation)⁹⁾ を行うことにより、解くべき連立方程式の大きさを縮小できる。
- ③ ミニ有限要素は、要素境界で基底関数が線形である。

これらの性質により、特にこの組合せが、ラグランジュ有限要素近似に適していることを次節で示す。

2. 2 ラグランジュ有限要素近似

時間刻みを τ , 計算時刻を t^n , そのときの時間増分を $\tau^n (\leq \tau)$ と表記する。特別な場所を除いて $\tau^n = \tau$ とする。時刻 t^n で、領域 $\Omega(t^n)$, その要素分割に現れる節点位置 x^n , そこでの流速 u^n , 圧力 p^n が与えられているとき、次の時刻 $t^{n+1} (=t^n + \tau^n)$ での領域 $\Omega(t^{n+1})$, その要素分割に現れる節点位置 x^{n+1} , そこでの流速 u^{n+1} , 圧力 p^{n+1} を求める。そのために中間流速 $u^{n+1/2}$ を導入する。これは x^n にあった粒

子の τ^n 時刻後の位置 (それを $x^{n+1/2}$ と表す) での流速である。 ($u^{n+1/2}$, p^{n+1}) を (3) 式の離散化式,

$$\frac{u^{n+1/2} - u^n}{\tau^n} - \nu \Delta u^{n+1/2} + \text{grad } p^{n+1} = f, \quad (11a)$$

$$\text{div } u^{n+1/2} = 0 \quad (11b)$$

で求める。 $x^{n+1/2}$ は u^n と $u^{n+1/2}$ を用いて

$$x^{n+1/2} = x^n + \tau^n \frac{u^n + u^{n+1/2}}{2} \quad (12)$$

で決定する。この式により各要素の 4 節点 $\{x_{v(i)}^n, i=1, 2, 3, x_b^n\}$ を 4 点 $\{x_{v(i)}^{n+1/2}, i=1, 2, 3, x_b^{n+1/2}\}$ に移すアイソパラメトリック変換

$$F = x_{v(1)}^{n+1/2} \phi_{v(1)} + x_{v(2)}^{n+1/2} \phi_{v(2)} + x_{v(3)}^{n+1/2} \phi_{v(3)} + x_b^{n+1/2} \phi_b \quad (13)$$

が定まる。ここに、下付き添え字 $v(i), i=1, 2, 3$ は要素の頂点を、 b は要素の重心を意味している。この関数 F は t^n での要素を次のように移動する (図 2)。一般に t^n での要素の重心 x^n は、 t^{n+1} での要素の重心には移らない。

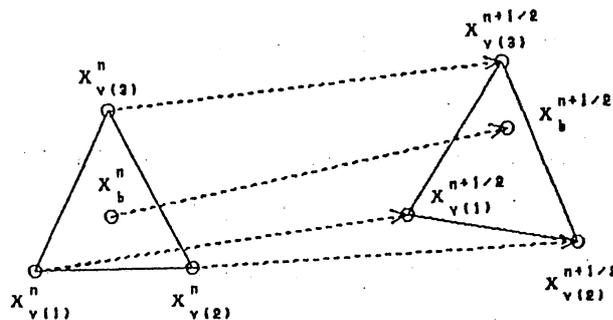


図 2. 節点にある粒子の移動

そこで、 x^{n+1} を次の式に従って決める： x^{n+1} が三角形の頂点のときは

$$x_{v(i)}^{n+1} = x_{v(i)}^{n+1/2}, \quad i=1, 2, 3 \quad (14a)$$

x^{n+1} が三角形の重心のときは

$$x_b^{n+1} = \sum_{i=1}^3 x_{v(i)}^{n+1} / 3 \quad (14b)$$

とする。新しい位置 x^{n+1} での流速 u^{n+1} は、

$$u^{n+1}(x^{n+1}) = u^{n+1/2}(F^{-1}(x^{n+1})) \quad (15)$$

で求める。(15)式によって、求められた流速 u^{n+1} は $\Omega(t^{n+1})$ での要素の頂点で $u^{n+1/2}$ と等しく、要素の重心では t^{n+1} での要素の重心 x_b^{n+1} に移動してくる粒子の流速である。

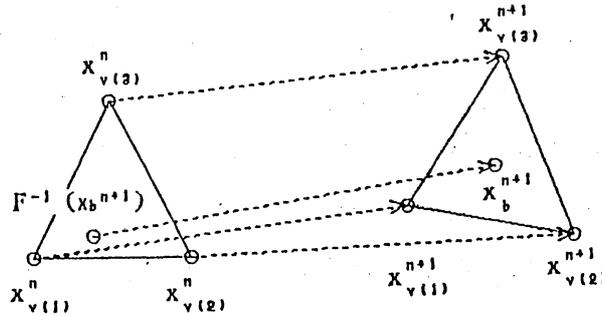


図 3. 重心に移動してくる粒子

(11)式はストークス方程式の差分化と一致するのでその一意可解性は、Inf-Sup 条件により保障されている。ミニ有限要素は内節点を持つので、静的縮約により、要素剛性行列作成時に内部自由度を消去することが出来る。要素数を N とすると、解くべき連立方程式の大きさは $7N/2$ から $3N/2$ に減少する。一般にアイソパラメトリック変換は、三角形を曲三角形に移す。例えば、三角形2次要素の場合、三角形を3つの2次曲線で囲まれた図形に写像する。しかしミニ有限要素では、要素境界で基底関数が線形であるため、変換 F は三角形を三角形に移す。このようにミニ有限要素はラグランジュ有限要素近似に適している。

(11)式と(12)式によって自由境界を追跡することは、(7)式の自然な近似になっている。そのため未知関数 η は数値計算において現れない。この方法では各時刻で全ての要素が移動する。それ故、各時刻で全体剛性行列を再計算する必要があるが、そのサイズは一定である。

2. 3 オイラー座標系に基づく近似

この方法では、自由境界付近以外の節点位置は固定されている。ラグランジュの方法と違い、 u^n は固定されたオイラー座標で時刻 t^n での流速を示すために使う。自由境界上の節点はラグランジュ的に移動する。 $u^{n+1/2}$ はラグランジュ近似の流速であり、(11)式で求められる。この値が自由境界上の節点での流速となる。自由境界以外の節点での u^{n+1} の値は、 $u^{n+1/2}$ を使って物質微分から導れる式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n+1/2}}{\tau^n} + \text{div}(u^{n+1/2} u_i^{n+1}) = 0, \quad i=1,2 \quad (16)$$

で求める。(11), (16)式はナビエ・ストークス方程式のストークス部分と移流部分への分解と見ることもできる。(16)式の解法には保存型上流近似^{10,11)}から導かれる L^2 の意味で安定な上流型スキム^{5,6)}を用いる。自由境界をラグランジュの方法と同様に(12)式により決定する。次の時刻の解析領域が決まり、繰り返し計算を行う。自由境界近傍で必要となる三角形分割は各時間ステップで次のように行う。最初に全解析領域を要素分割する。ある時刻 t^n での自由境界から、時刻 $t^{n+\tau^n}$ での自由境界を(12)式により求める。自由境界と鉛直または水平な要素境界線との交点を求める(図4)。初期分割上の節点で、この交点に近いものを図5のように自由境界上に移動する。自由境界を近似するために移動した節点は、自由境界が通過した後は、初期分割位置に戻る。このように、各時刻で要素の追加、削除が行われ得るので、全体剛性行列のサイズは一定でない。

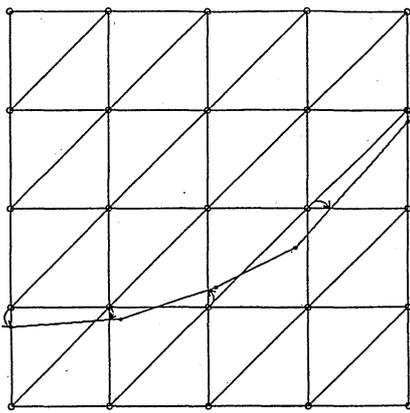


図 4. 初期分割と自由表面

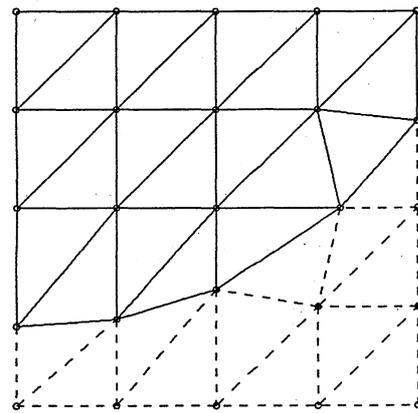


図 5. 自由表面に応じた要素分割

3. 摩擦境界問題への試み

摩擦境界を有する定常ストークス問題を考える。領域 Ω は \mathbf{R}^2 で有界とする。境界 $\partial\Omega$ は速度境界 Γ_0 、応力境界 Γ_1 と摩擦境界 Γ_2 で構成されている。

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \oplus \Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \quad (17)$$

そのとき Ω 上でストークス方程式

$$-\nu \Delta u + \text{grad } p = f, \quad (18a)$$

$$\text{div } u = 0 \quad (18b)$$

を考える。

Γ_0 , Γ_1 では(5)式, (6)式と同様に速度境界条件と応力境界条件を与える。摩

摩擦境界 Γ_2 は, Γ_2 上の応力分布に従い, さらに次の2つの境界に分けられているとする.

$$\Gamma_{20} = \{ x \in \Gamma_2 ; |\tau| < -\mu \sigma \}, \quad (19a)$$

$$\Gamma_{21} = \{ x \in \Gamma_2 ; |\tau| = -\mu \sigma \}, \quad (19b)$$

$$\Gamma_2 = \Gamma_{20} \oplus \Gamma_{21} \quad (19c)$$

ここに $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^2$, $p: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $\tau: \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$, $\sigma: \partial\Omega \rightarrow \mathbf{R}$ はそれぞれ流速, 圧力, 剪断応力, 垂直応力を示す未知関数, μ は摩擦係数である. u , p は Γ_{20} で

$$u = 0, \quad (20)$$

Γ_{21} で

$$u \cdot n = 0, \quad (21a)$$

$$\tau = -\mu \sigma \operatorname{sgn}(\tau) \quad (21b)$$

を満たす. すなわち Γ_{20} では摩擦の影響が大きいので流体は動かない. 一方 Γ_{21} では摩擦係数に従い流体は滑る.

摩擦境界問題は, (19)式に示されるように境界条件が非線形である.

4. 摩擦境界問題に対する数値解法

摩擦境界は Γ_{20} と Γ_{21} が未知である. そこで Γ_{20} と Γ_{21} の分割を繰り返し計算により決定する.

繰り返し計算の添え字を m とする. Γ_{20}^m , Γ_{21}^m , u^m , p^m , τ^m , σ^m をそれぞれ, m 回目の境界分割, 流速, 圧力, 剪断応力, 垂直応力とし, 初期境界分割は

$$\Gamma_{20}^0 = \Gamma_2, \quad (22a)$$

$$\Gamma_{21}^0 = \phi \quad (22b)$$

とする. Ω でストークス方程式

$$-\nu \Delta u^{m+1} + \operatorname{grad} p^{m+1} = f, \quad (23a)$$

$$\operatorname{div} u^{m+1} = 0 \quad (23b)$$

を満たし, 境界条件として Γ_0 , Γ_1 で (5), (6) 式を, Γ_{20}^m で

$$u^{m+1} = 0, \quad (24)$$

Γ_{21}^m で

$$u^{m+1} \cdot n = 0, \quad (25a)$$

$$\tau^{m+1} = -\mu \sigma^{m+1} \operatorname{sgn}(\tau^{m+1}) \quad (25b)$$

を課す. 初期境界分割は流体が滑る境界はないので, (22)~(25)式は解くことがで

きる。一般に初期境界分割は(19)式の摩擦境界条件を満足しない。そこで Γ_2 上の節点 P_i の応力にしたがい、 $m+1$ 回目の摩擦境界の分割を決定する。 P_i で、 $|\tau^{m+1}(P_i)| < -\mu \sigma^{m+1}(P_i)$ ならばその節点は Γ_{20}^{m+1} 、 $|\tau^{m+1}(P_i)| \geq -\mu \sigma^{m+1}(P_i)$ ならばその節点は Γ_{21}^{m+1} として新しい境界分割を決定し、再度繰り返し計算を行う。得られた τ^{m+1} 、 σ^{m+1} が Γ_2 上全ての節点で(19)式を満たしていれば収束とみなし、計算を終了する。

(25)式は非線形である。そこで、さらに u^{m+1} 、 p^{m+1} を求めるための繰り返し計算を行う。 $u^{m(1)}$ 、 $p^{m(1)}$ 、 $\tau^{m(1)}$ 、 $\sigma^{m(1)}$ をそれぞれ1回目の流速、圧力、剪断応力、垂直応力とする。 Γ_{21}^m の境界条件を

$$u^{m+1(1+1)} \cdot n = 0, \quad (26a)$$

$$\tau^{m+1(1+1)} = -\mu \sigma^{m+1(1+1)} \operatorname{sgn}(\tau^{m+1(1+1)}) \quad (26b)$$

で与え、 $u^{m+1(1+1)}$ 、 $p^{m+1(1+1)}$ を解く。この繰り返し計算の初期条件は

$$\tau^{m+1(0)} = \tau^m, \quad (27a)$$

$$\sigma^{m+1(0)} = \sigma^m \quad (28b)$$

である。 $\tau^{m+1(1+1)}$ 、 $\sigma^{m+1(1+1)}$ が収束するまで繰り返し計算を行う。収束した解を u^{m+1} 、 p^{m+1} 、 τ^{m+1} 、 σ^{m+1} とする。 $\tau^{m+1(1+1)}(P_i)$ 、 $\sigma^{m+1(1+1)}(P_i)$ の計算は、 $u^{m+1(1+1)}$ 、 $p^{m+1(1+1)}$ を求めた後にコンシステンスな方法¹²⁾で求めた。

摩擦境界問題に対するこの解法は、全体で2重の繰り返し計算である。 Γ_{21}^m の節点 p_i の τ^{m+1} 、 σ^{m+1} は(25)式から(19b)式を満たすことがわかる。したがって、 $\operatorname{mes}(\Gamma_{21}^m)$ は m について単調増加である。

4. 数値結果

4. 1 自由境界問題の数値結果

圧縮成形問題⁷⁾から導かれる単純化したモデル問題⁵⁾を考える(図5)。流体は $t=0$ で斜線部に存在する。BCDEFは固定壁である。境界条件として、上面ABで

$$u_1 = 0, \quad (28a)$$

$$u_2 = c(t), \quad (28b)$$

$$\int_{AB} p = \operatorname{mes}(AB)p_1(t) \quad (28c)$$

を与える。ここで(28b)式の $c(t)$ はAB上で一定値をもつ未知関数、(28c)式の $p_1(t)$ は既知関数

$$p_1(t) = \begin{cases} 2000t, & (0 < t < 0.02) \\ 40, & (0.02 \leq t) \end{cases} \quad (28)$$

である。GD は自由表面であり表面力 0を与え、他の境界では滑り条件を課す。初期条件は $u^0 = 0$ 、外力は $f = 0$ 、 $\nu = 0.1$ ($Re=10$)、 $\tau = 0.0025$ とした。領域形状は、 $AB=1$ 、 $AG=1/4$ であり、 $\Omega_1: GF=5/16$ 、 $GD=1/5$; $\Omega_2: GF=4/16$ 、 $GD=1/4$; $\Omega_3: GF=3/16$ 、 $GD=1/3$ の3種類の領域について計算した。まず Ω_2 のラグランジュ有限要素近似、オイラー有限要素近似の結果を図6,7に示す。要素数は、ラグランジュ有限要素近似では、384 (一定)であり、オイラー有限要素近似では、初期320であり最大383であった。流体が充填していく過程がよく観察される。2つの方法は、自由境界、流体の挙動について、ほぼ同じ結果を与えている。これらの方法はそれぞれ次の特徴を持っている。ラグランジュ有限要素近似では、要素分割が物理的な分割に対応し、粒子の追跡が可能である。例えば初期分割の各層が時間と共にどのように流れ込んでいくか図7で調べることができる。一方、オイラー有限要素近似では、ラグランジュ有限要素近似と違い要素が大きく変形することはないので、急激な変化を伴う流れや長時間の解析にも十分適用できる。

静的縮約を行ったときと行わなかったときのCPU時間の比較を表1に示す。これはラグランジュ有限要素近似の Ω_2 の計算結果である。計算機は、アポロDN4000である。静的縮約により計算時間が約1/8になる。

次に Ω_1 、 Ω_3 の計算結果を図8,9に示す。 Ω_2 と同様に、これらはDEFGの面積が1/16であるが、それぞれの領域での自由境界形状の違いが観察できる。 Ω_1 、 Ω_2 、 Ω_3 の順に、終了時刻が速くなり、最初に底に着く自由表面の位置がE方向へ移動していることがわかる。

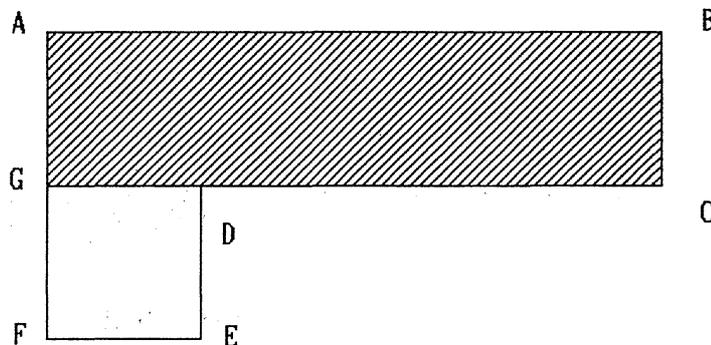


図5. テスト問題

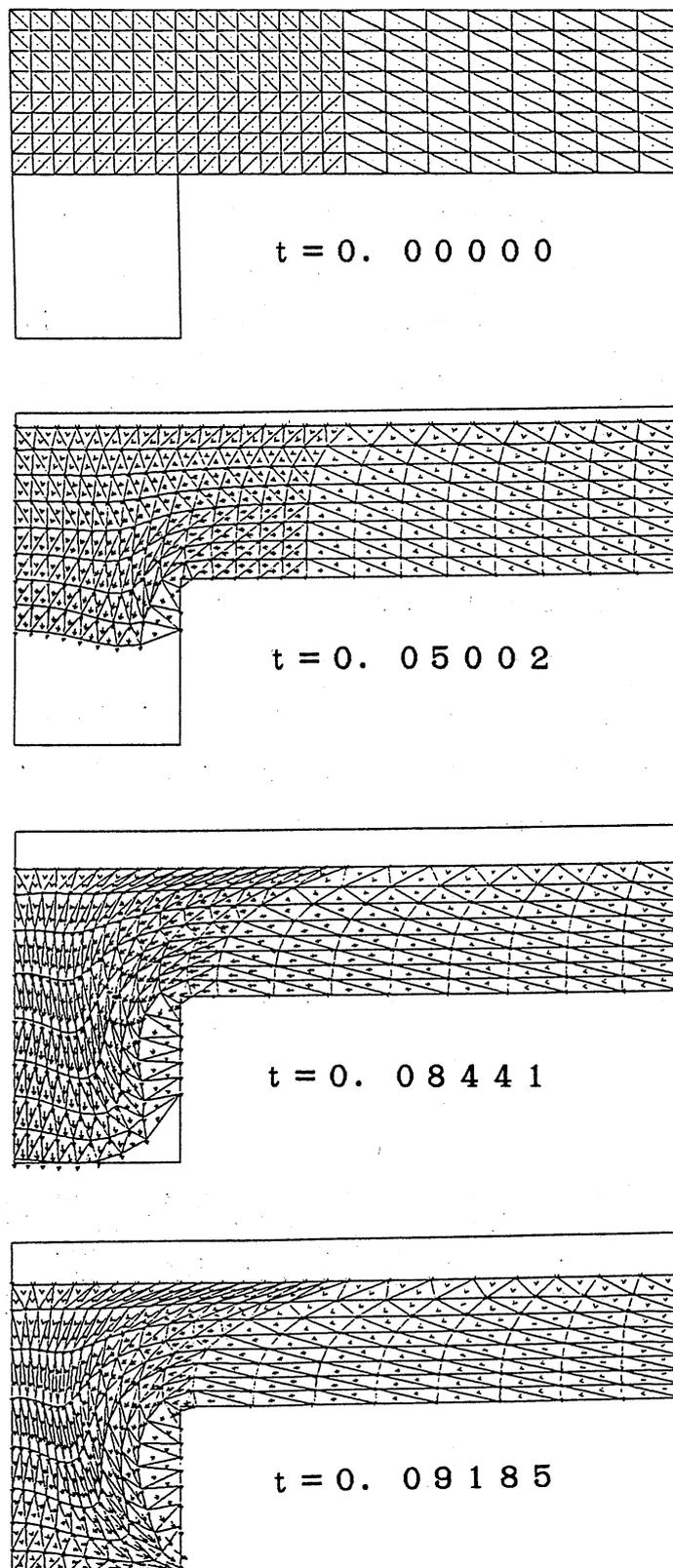


図 6. Ω_2 での要素分割図と流速図 (ラグランジュ有限要素近似)

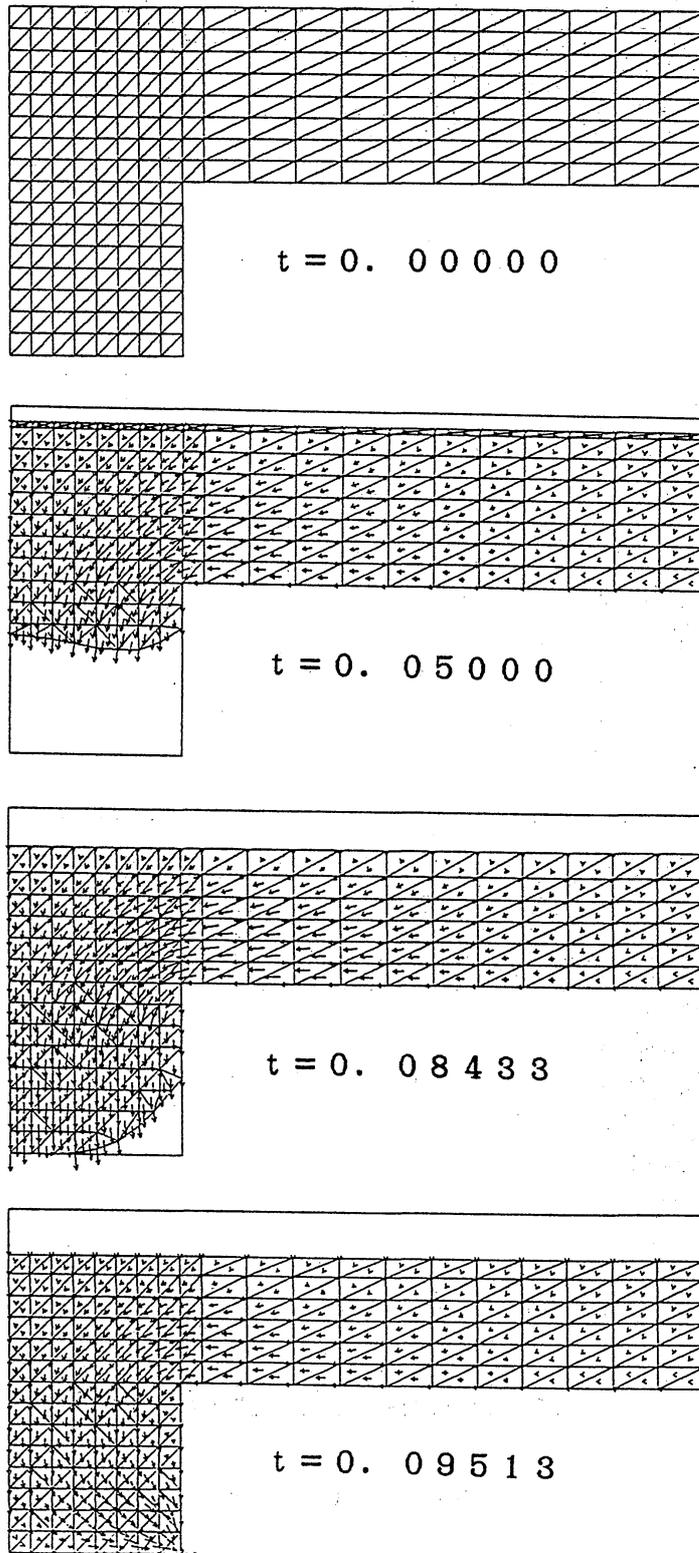


図 7. Ω_2 での要素分割図と流速図 (オイラー有限要素近似)

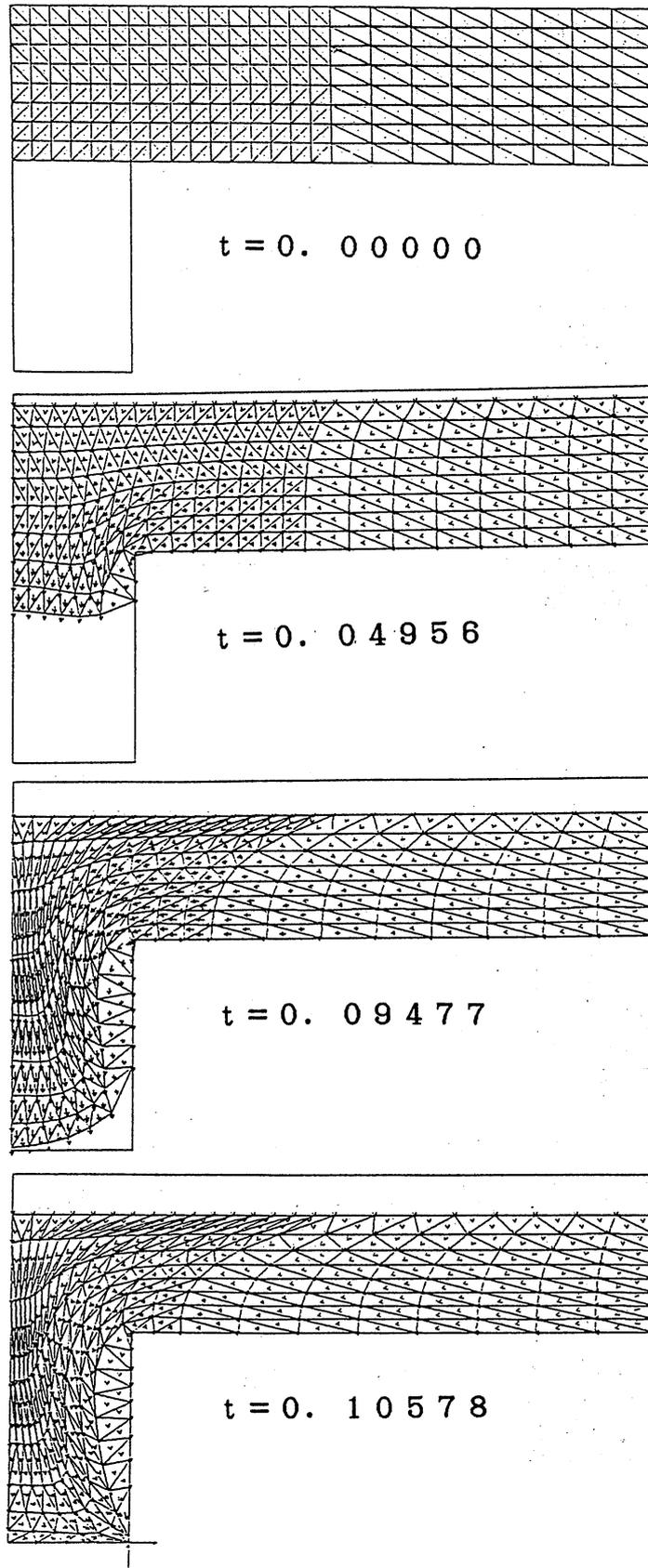


図 8. Ω_1 での要素分割図と流速図 (ラグランジュ有限要素近似)

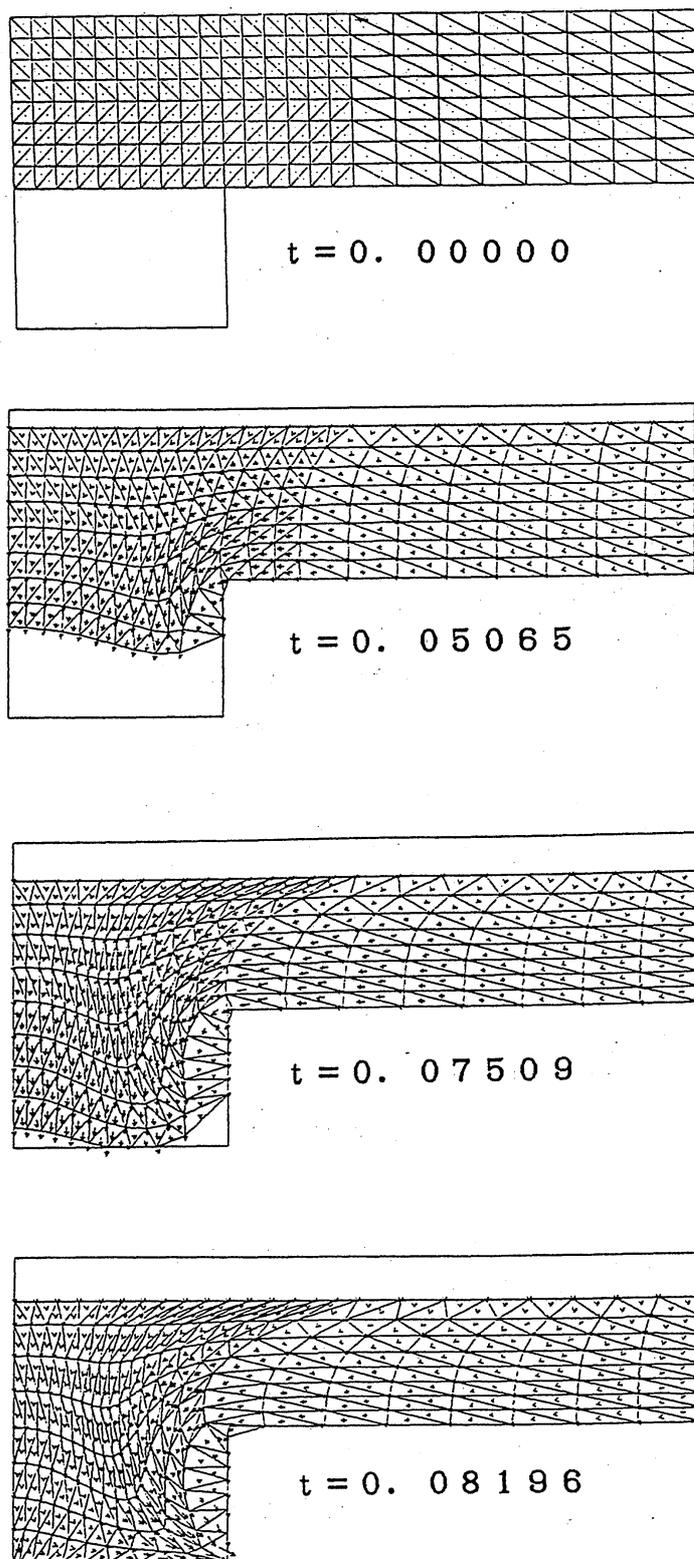
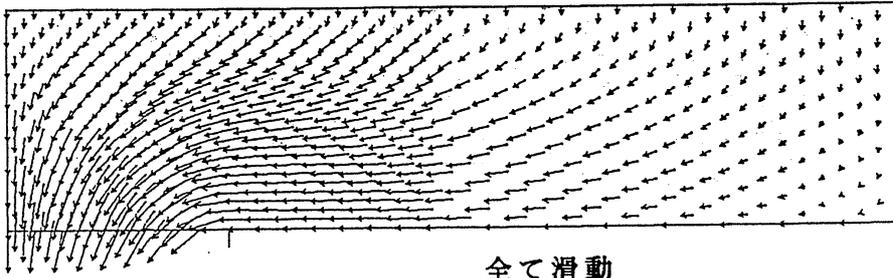
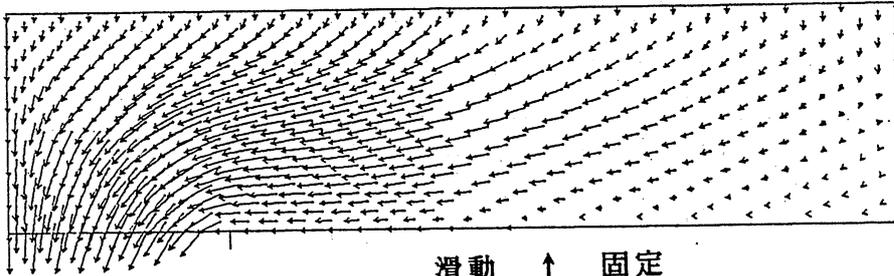


図 9. Ω_3 での要素分割図と流速図。(ラグランジュ有限要素近似)



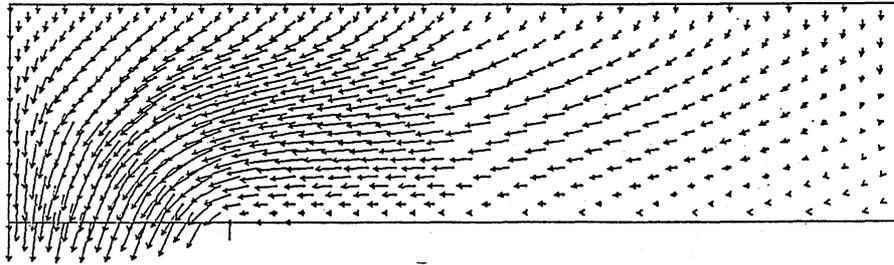
全て滑動

$$\mu = 0.0$$



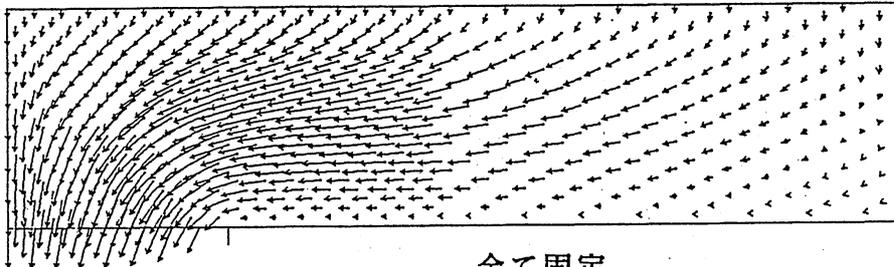
滑動 ↑ 固定

$$\mu = 0.2$$



滑動 ↑ 固定

$$\mu = 0.4$$



全て固定

$$\mu = 0.6$$

図10. 摩擦境界を有する問題の流速図

表1. 静的縮約とCPU時間

	静的縮約	
	無	有
総自由度	1443	675
半バンド幅	176	88
CPU時間	9.4時間	1.2時間

4. 2 摩擦境界問題の数値結果

先の Ω_2 の領域を考える。自由境界問題と同様に、図5の斜線部の領域に流体が存在するが、領域形状は変化しない。境界条件は、上面ABで

$$u = (0, -1), \quad (29)$$

GDは流出口で表面力を0を与え、BC, GAは滑り境界条件を与える。CDは摩擦境界とする。外力は $f=0$, $\nu=0.1$ ($Re=10$) で、 $\mu=0.2, 0.4, 0.6$ について計算した(図10)。要素分割は図6と同じで、比較のため $\mu=0.0$, すなわちCDで滑りの条件を課した計算も示す。D点近傍の流出する流速は、 μ が小さいときには比較的大きな x_1 成分をもつ。 μ が大きくなるに従い、CDの固定領域が増えていくことから、 x_1 成分はしだいに小さくなる。 $\mu=0.6$ 以上の計算では、CD全てが固定領域となる。

5. おわりに

自由境界を有する問題に対して、ミニ有限要素を用いる2種類の数値解法を示し、それぞれの方法の有効性を確認した。ミニ有限要素はInf-Sup条件を満足する要素の中で最も自由度の少ないものの一つである。この要素は他の要素と隣接しない内部の節点をもつので、静的縮約を行うことで解くべき自由度を縮小できた。

ラグランジュ有限要素近似では、要素移動にアイソパラメトリック変換を用いた。ミニ有限要素に現れるバブル関数は要素境界で零であるので、この変換は三角形を三角形に移す。このようにミニ有限要素はラグランジュ有限要素近似に有効であった。

オイラー有限要素近似では、1階双曲型方程式が現れる。この解法には、 L^2 -安定な上流型スキムを用いた。自由境界付近での要素分割のアルゴリズムを工夫し、自然な要素分割ができるようにした。

自由境界問題の数値計算では領域形状の変化に伴う自由境界形状の違いを観察した。

静的縮約は、要素移動と独立なので固定領域問題にも有効である。

また、固定領域で、境界の一部が摩擦境界である問題に対する数値解法を示した。その数値計算では摩擦係数の変化に伴う摩擦境界分布を観察した。

圧縮成形問題は摩擦境界を有するので、摩擦境界条件を取り入れた自由境界問題を考察することが今後の課題である。

参考文献

- 1) 鷺津久一郎, 田中義一, 池川昌弘: "変形FLIC法による非圧縮粘性流解析", 日本航空宇宙学会誌, **27**, 406-414(1979).
- 2) Ramaswamy, B., Kawahara, M. and Nakayama, T.: "Lagrangian Finite Element Method for the Analysis of Two-Dimensional Sloshing Problems", Int. J. Num. Meth. Fluids, **6**, 659-670(1986).
- 3) Ramaswamy, B. and Kawahara, M.: "Arbitrary Lagrangian-Eulerian Finite Element Methods for Unsteady, Convective, Incompressible Viscous Free Surface Fluid Flow", Finite Elements in Fluids, vol 7, 65-87, Eds. R. H. Gallagher et al., John Wiley & Sons, 1987.
- 4) Arnorl, D., Berezzi, F., Fortin, M.: "A Stable Finite Element for the Stokes Equations", Estradto da Calcolo, Vol. XXI, 339-344(1984).
- 5) 田端正久, 藤間昌一, 守田明生: "ナビエ・ストークス方程式のための二つの風上型有限要素近似", 電気通信大学紀要, **1**, 129-136(1988).
- 6) Tabata, M. and Yaoi, M.: "Upwind Finite Element Approximation of the Navier-Stokes Equations and its Application to a Free Surface Problem", Computational Methods in Flow Analysis, 529-536 (Proceedings of the International Conference on Computational Methods in Flow Analysis), Eds. H. Niki and M. Kawahara, Okayama Univ. of Science, 1988.
- 7) 平井恒夫: "複合材料のプレス成形", 材料, **30**, 842-849(1981).

- 8) Niwa, Y., Kobayashi, S., Nakagawa, K.: "The Influence of End Frictions on Stress in Compressed Specimens", reprinted from the Memoirs of the Faculty of Engineering, Kyoto Univ., Vol. XXXI, (1969).
- 9) Desai, S. and Abel, F. (山本孝之 他訳): "マトリックス有限要素法", 科学技術出版, 1974.
- 10) 田端正久, 守田明生: "バブル関数付き三角形1次要素の保存型上流近似", 電気通信大学学報, 38, 1-5(1987).
- 11) Baba, K. and Tabata, M.: "On a Conservative Upwind Finite Element Scheme for Convective Diffusion Equations", R. A. I. R. O., Anal. Numer., 15, 3-25 (1981).
- 12) 水上昭: "有限要素法による二次元円柱まわりの流れ解析-揚抗力計算を中心に-", 第1回数値流体力学シンポジウム論文集, 219-222(1987)
- 13) Tabata, M. and Morishita, A., "A Fractional Step Finite Element Scheme for Free Boundary Problems", submitted to Theoretical and Applied Mechanics.
- 14) Tabata, M. and Miyazaki, T., Lagrangian Finite Element Method Using the Mini Element, in preprint.