

自由表面を有する非粘性非圧縮性流体の 動的挙動の数値解析

中央大学 工学部 中山 司 (Tsukasa Nakayama)

中央大学 工学部 田中 宏明 (Hiroaki Tanaka)

1. はじめに

自由表面を有する流体の運動に関する研究は、航空機やロケットの燃料タンク内のスロッシング現象、原子力発電プラントにおける冷却液の振動現象、新素材製造工程における溶融体の界面制御などに関連しており、工学上きわめて重要である。その一方、宇宙空間や磁場空間などの特殊環境での液面運動の特性を把握するという理学的立場からも興味深いテーマである。自由表面の変位が比較的小さい場合には線形理論が有用な解析手段であるが、大振幅の場合には、現象は複雑な非線形初期値境界値問題として定式化される。このため、コンピュータの性能向上とそれに伴う数値解法の進歩によって難解な流れ問題が次々に解き明かされていくなかにおいて、この自由表面を有する流体の運動はいまだに解析の難しい現象の一つになっている。

これまで有限要素法や差分法を用いた解法が種々提案され、いくつかの自由表面問題において成果を収めているが、一般にこれら領域分割型的手法では境界を移動させるたびに解析領域を再分割しなければならず、複雑なアルゴリズムと多くの計算時間を必要とする。そこで最近では境界要素法が注目されるようになってきている。しかし、これまでに提案された境界要素法を用いた解法の多くでは、方程式の時間積分に対して前進差分のような単純なスキームが用いられており、自由表面の変位が大振幅になるに従って数値計算が不安定になる傾向がある。そこで、本論文では時間方向に関数のテーラー展開を応用した解法を報告する。本方法によると、テーラー級数を有限項で打ち切ったときの打ち切り誤差を評価することにより、各時点で最適の時間増分を決める

ことができる。これによって、大振幅の流体運動に対しても安定な数値計算が可能となった。

2. 問題の定式化

例題として、水平加振を受ける2次元容器内の液体スロッシングを考える¹。図1に示す座標系 $o-xy$ は容器に固定され、容器と共に運動する動座標系とし、静止水面に一致させて x 軸をとり、鉛直上向きに y 軸をとる。液体は非粘性、非圧縮流体とし、流体内部は非回転流れであるとする。このとき、座標系に対する流体の相対速度成分 (u, v) を用いて、速度ポテンシャル ϕ を $\nabla\phi = (u, v)$ のように定義することができる。これを用いると支配方程式と境界条件は次のように表される。

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (1)$$

$$\frac{D\phi}{Dt} - \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + a(t)\xi + g\eta = 0 \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (2)$$

$$u = \frac{D\xi}{Dt}, \quad v = \frac{D\eta}{Dt} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (3)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (4)$$

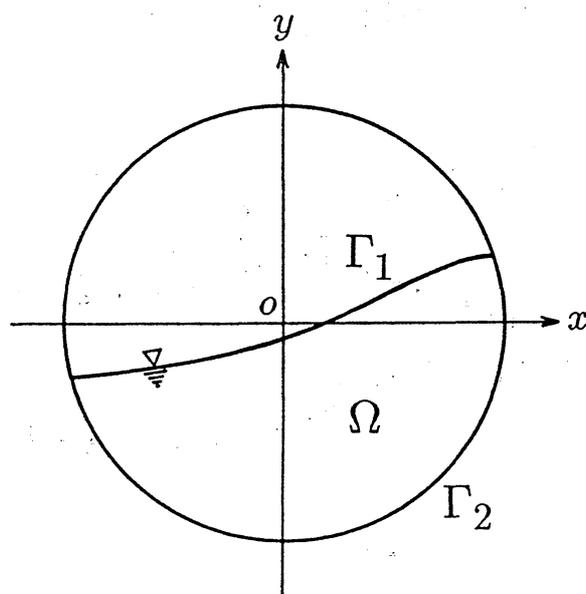


図1: 2次元容器内の液体運動

ここに、 Ω は流体内部、 Γ_1, Γ_2 はそれぞれ自由表面境界と流体に接する容器壁境界を表す。 t は時間、 $a(t)$ は容器に加えられる水平方向の加振加速度、 g は重力加速度である。 ∇^2 は2次元ラプラシアン、 D/Dt はラグランジュ微分演算子を表し、 $\partial/\partial n$ は外向き法線 n に沿って微分することを意味する。 (ξ, η) は自由表面上の流体粒子の座標を表す。本方法では、自由表面上の流体粒子をラグランジュ的に移動させることによって時々刻々の自由表面形状の変化を追跡する。

時刻 $t=0$ で容器内の液体は静止しているものとすれば、初期条件は

$$\xi : \text{既知}, \quad \eta = \phi = 0$$

で与えられる。

以上より、自由表面を有する容器内の液体の非定常運動は ξ, η, ϕ を未知量とする非線形初期値境界値問題として定式化された。

3. 解析のアルゴリズム

隣接する2つの時間ステップ t と $t + \Delta t$ を考える。この Δt 時間の中に、自由表面位置が図2のように変わり、それに伴って時刻 t の自由表面上で (ξ, η) にあった流体粒子が時刻 $t + \Delta t$ には自由表面上の (ξ', η') に移動したとする。このとき、 ξ', η' は (ξ, η, t) を中心としてテーラー級数に展開することができる。このテーラー級数を n 階

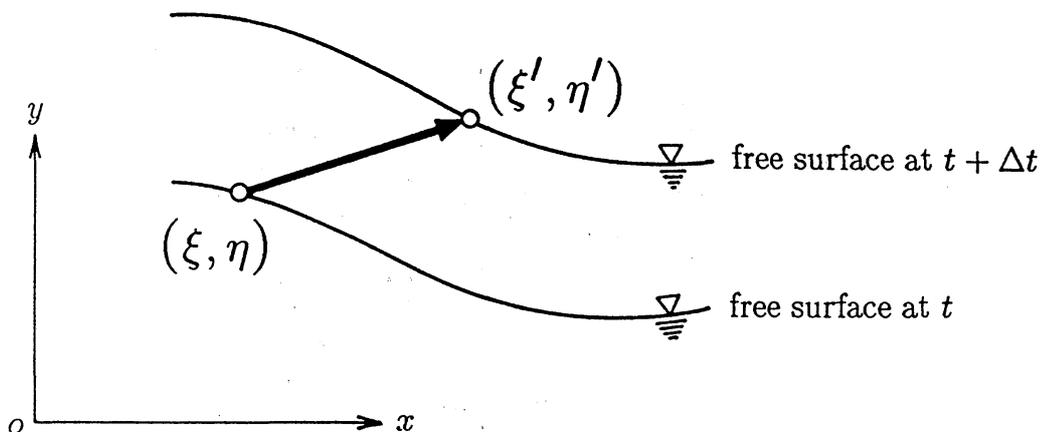


図2: 自由表面上の流体粒子の移動

微係数の項で打ち切ると、 ξ' , η' は次のように近似される。

$$\xi' \approx \xi + \Delta t \frac{D\xi}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\xi}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\xi}{Dt^n} \quad (5)$$

$$\eta' \approx \eta + \Delta t \frac{D\eta}{Dt} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{D^2\eta}{Dt^2} + \dots + \frac{(\Delta t)^n}{n!} \frac{D^n\eta}{Dt^n} \quad (6)$$

そこでテーラー級数の各項を構成するラグランジュ微係数の値を計算することができれば、時刻 $t + \Delta t$ での自由表面上の各流体粒子の位置を知ることができ、それらの粒子を連ねる曲線を引くことによって新しい自由表面形状を求めることができる。

3.1 1階のラグランジュ微係数

最初に、次の境界値問題を解く。

$$\nabla^2\phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (7)$$

$$\phi = \hat{\phi} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (8)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (9)$$

ここで、 $\hat{\phi}$ の値は直前の時間ステップで計算されているものとする。この境界値問題を解くために直接境界要素法が用いられる。グリーンの公式を用いると式(7)-(9)は境界積分方程式

$$\alpha_P\phi_P - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial\phi}{\partial n} \ln \frac{1}{r} d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma = - \int_{\Gamma_1} \hat{\phi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) d\Gamma \quad (10)$$

に変換される。これを解くと自由表面上で $\partial\phi/\partial n$ の値が得られる。一方、自由表面上では ϕ の値がすでにわかっているから、数値微分²によって接線方向微係数 $\partial\phi/\partial s$ を計算することができる。したがって、 ξ と η の1階ラグランジュ微係数は

$$\frac{D\xi}{Dt} = u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial n} l - \frac{\partial\phi}{\partial s} m \quad (11)$$

$$\frac{D\eta}{Dt} = v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial n} m + \frac{\partial\phi}{\partial s} l \quad (12)$$

のように計算することができる。ここに、 l , m はそれぞれ外向き法線の x 軸, y 軸に対する方向余弦である。

3.2 2階のラグランジュ微係数

たとえば, $D^2\xi/Dt^2$ は

$$\begin{aligned}\frac{D^2\xi}{Dt^2} &= \frac{Du}{Dt} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial \phi_t}{\partial x} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}\end{aligned}\quad (13)$$

のように表すことができる。ここで $\phi_t = \partial\phi/\partial t$ である。 $D^2\eta/Dt^2$ についても同様の表現ができる。そこで, u, v の空間微係数は数値微分²によって計算することにすれば, ξ, η の2階のラグランジュ微係数を求めるためには自由表面上で ϕ_t の空間微係数を知ることが必要である。そこでこれを以下のようにして求める。

ラプラス方程式(1)を時間で微分すると, ϕ_t もまたラプラス方程式を満たさなければならないことがわかる。そこで ϕ_t に関する次のような境界値問題を考える。

$$\nabla^2 \phi_t = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (14)$$

$$\phi_t = - \left\{ \frac{1}{2}(u^2 + v^2) + a(t)\xi + g\eta \right\} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (16)$$

ここで, 式(15)の右辺はすべて既知項であることに注意されたい。これを境界要素法で解いて自由表面上で $\partial\phi_t/\partial n$ の値を得, 続いて数値微分によって $\partial\phi_t/\partial s$ を計算すれば, $\partial\phi_t/\partial x, \partial\phi_t/\partial y$ は

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial x} = \frac{\partial \phi_t}{\partial n} \ell - \frac{\partial \phi_t}{\partial s} m \quad (17)$$

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial y} = \frac{\partial \phi_t}{\partial n} m + \frac{\partial \phi_t}{\partial s} \ell \quad (18)$$

で求められる。こうして, 式(13)などによって $D^2\xi/Dt^2, D^2\eta/Dt^2$ の値を求めることができる。

3.3 高階のラグランジュ微係数

たとえば、 ξ の n 階ラグランジュ微係数は、

$$\begin{aligned}\frac{D^n \xi}{Dt^n} &= \frac{D^{n-1} u}{Dt^{n-1}} \\ &= \frac{D^{n-1}}{Dt^{n-1}} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)\end{aligned}\quad (19)$$

を展開した式で計算できる。これからわかるように、 n 階ラグランジュ微係数を計算するためには、 ϕ の $n-1$ 階のオイラー微係数 $\partial^{n-1} \phi / \partial t^{n-1}$ ($\equiv \Phi$) と u, v の空間微係数の値が必要である。前者は境界値問題

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad \Omega \text{ 内} \quad (20)$$

$$\Phi = \hat{\Phi} \quad \Gamma_1 \text{ 上} \quad (21)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0 \quad \Gamma_2 \text{ 上} \quad (22)$$

を解いて求め、後者は数値微分で計算する。このとき式(21)中の $\hat{\Phi}$ の値は、圧力境界条件(2)を時間で逐次微分して得られる式で計算される。

さて、従来の自由表面問題の数値解法の中には、圧力境界条件式(2)の速度2乗項を他項よりも1ステップ前の時刻の値で評価し、非線形方程式を線形化しているものが多かった。これに対して本方法では、上述の説明で明らかのように、支配方程式(1)と境界条件式(2)-(4)に含まれるすべての項が同一時刻の値で評価されている。このことは、非線形現象の数値シミュレーションに対する本方法の精度の高さを期待させる。

4. 境界要素法

本解法では、毎時刻ステップに数組の境界値問題を解かなければならない。 $\Phi (= \phi$ または $\partial^{n-1} \phi / \partial t^{n-1}$ ($n = 2, 3, \dots$)) に関するこの境界値問題は境界要素法によって解かれる。まず、グリーンの公式を介してラプラス方程式と境界条件を境界積分方程式に変換する。次に、境界を多数の直線要素に分割し、各要素内で Φ と $\partial \Phi / \partial n$ を一次の形状関数で近似する。こうして、境界積分方程式は離散化され、自由表面上で $\partial \Phi / \partial n$ を、容器壁上で Φ を未知量とする連立一次代数方程式に帰着される。

さて、これらの連立一次方程式はすべて、同一時刻の同一自由表面形状のもとで組み立てられており、それらの係数行列はすべて同じである。したがって、係数行列の

LU 分解を1度しておけば、同一ステップ内では前進代入と後退代入だけで連立一次方程式を解くことができる。このため連立一次方程式の求解計算に要する CPU 時間は予想されるほど多くはない。

なおここでは、自由表面境界を離散化したときの節点を、2節で述べた流体粒子と見なしている。

5. 自由表面節点の再配置とポテンシャル値の計算

一般に、流体粒子をラグランジュ的に移動させると、現象の変化が急なところへ粒子が集まる傾向がある。このため、差分法や有限要素法をベースにしたラグランジュ流の数値解法では、格子や要素がつぶれるのを防ぐためにリゾーニング (rezoning) という節点の再配置操作を行う。本方法による計算でも節点の再配置を行わないと、節点は自由表面の勾配の急な部分に集まる傾向がある。このため、境界要素の長さに大小のばらつきが生じ、境界要素解析の精度が著しく低下することが観察された。そこでまず、自由表面上の要素の長さの最小値と最大値の比が0.3以下になったときに自由表面上の全節点を等間隔に配置し直すという手段を講じてみた。しかし、再配置時の節点座標の変更量が大きく、速度ポテンシャル値の更新で生じる誤差が後の計算に大きく影響してしまった。そこで、毎ステップ、節点の再配置を行うことにした。

式(5), (6)で計算された自由表面境界上で各節点を等間隔に配置し直す。このとき、再配置前と後で自由表面の形状が変わるが、座標の変更量が微少なため形状の変化は無視できる程度である。ただし、要素分割はある程度細かくしておかなければならない。再配置後の節点での速度ポテンシャル値は次式で計算される。

$$\phi'' \approx \phi + \sum_{k=1}^n \Delta^k \phi \quad (23)$$

ここに、

$$\Delta^k \phi = \frac{1}{k!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} \right)^k \phi \quad (24)$$

$$\Delta x = \xi'' - \xi, \quad \Delta y = \eta'' - \eta \quad (25)$$

である。上付き添字''は時刻 $t + \Delta t$ で再配置後の節点に関する量を意味し、無添字は時刻 t における量を意味する。

6. 時間増分の計算方法

本方法では、毎時間ステップで最適の時間増分値を計算することができる。時間の関数 $f(t)$ のテーラー級数

$$f(t + \Delta t) = f(t) + \Delta t f'(t) + \frac{(\Delta t)^2}{2} f''(t) + \dots \quad (26)$$

を n 階の微係数を含む項で打ち切ると、そのときの打ち切り誤差は

$$\frac{(\Delta t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\tau) \quad t \leq \tau \leq t + \Delta t$$

で与えられる。そこで、この打ち切り誤差があらかじめ与えられた微小量 ε に等しくなるように時間増分 Δt の大きさが決定される。すなわち

$$\Delta t = \left[\frac{\varepsilon (n+1)!}{f^{(n+1)}(\tau)} \right]^{1/(n+1)} \quad (27)$$

である。これを式 (5)-(6) に適用するとき、 $f^{(n+1)}(\tau)$ は次のように近似する。

$$f^{(n+1)}(\tau) \approx \max_{1 \leq i \leq N} \left\{ \left| \left(\frac{D^{n+1} \xi}{Dt^{n+1}} \right)_i \right|, \left| \left(\frac{D^{n+1} \eta}{Dt^{n+1}} \right)_i \right| \right\}$$

ここで N は自由表面上の節点数である。 ξ, η の $n+1$ 階ラグランジュ微係数は、3節の手順ですでに求められている n 階の微係数を用いて後退差分により計算する。ただし時刻 $t=0$ のステップだけは、 $n+1$ 階微係数を n 階微係数で置き換えて計算するものとする。

7. 液体スロッシングの数値シミュレーション

図1に示す円形断面の2次元容器が水平加振を受けるときの、液体スロッシングを考える。容器の直径を1 mとし、容器の半分を液体で満たす。そして、自由表面境界と容器壁境界をそれぞれ40要素に分割する。これを加速度

$$a(t) = -A \sin(\omega t) \quad t \geq 0 \quad (29)$$

で加振する。ここで、 $A = 0.133g$ (g は重力加速度)、 $\omega = 5.10 \text{ rad/s}$ である。

式 (5), (6), (23) における展開項数 n は3とした。また、時間増分 Δt を決めるための許容誤差 ε は 10^{-7} とした。

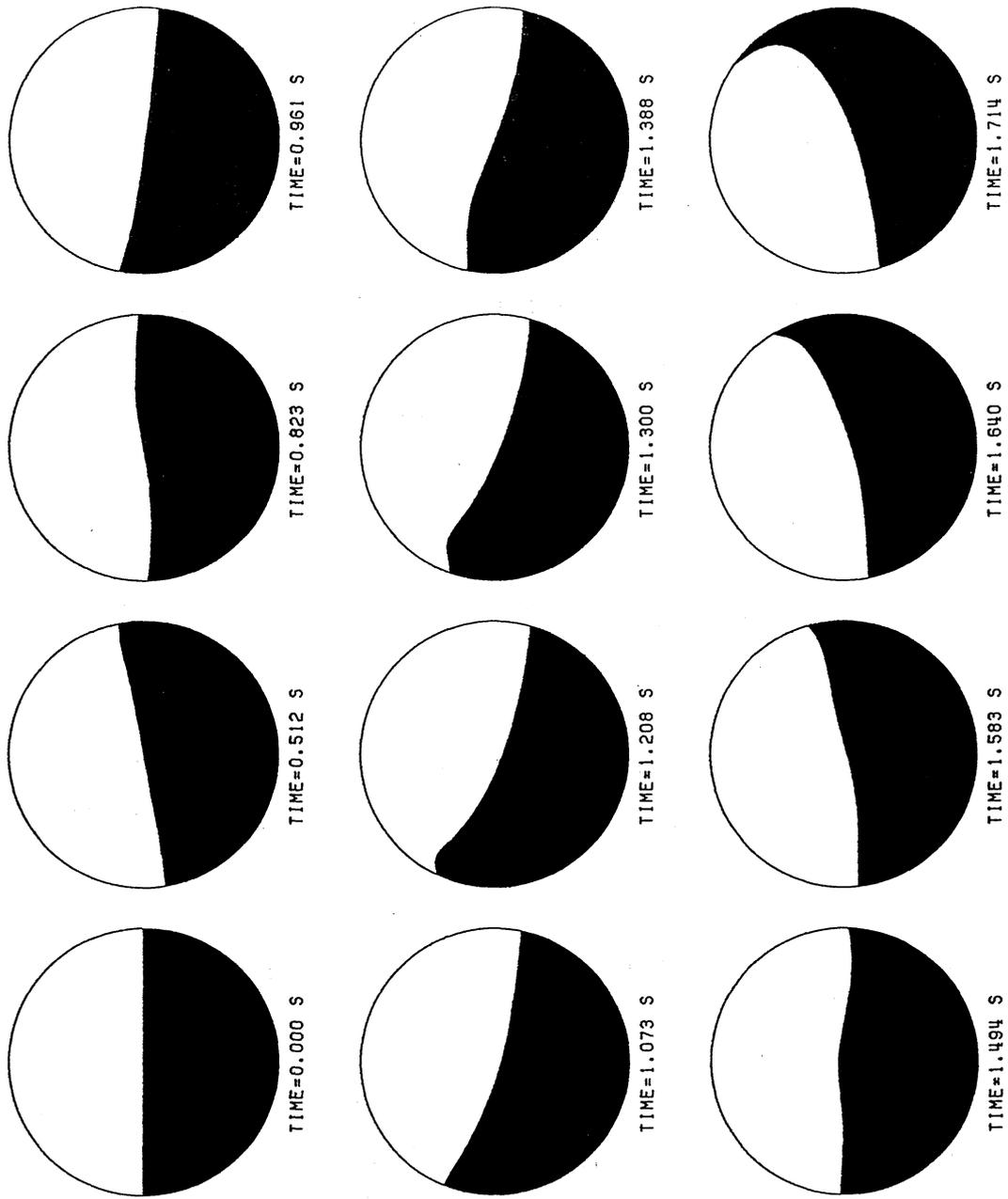
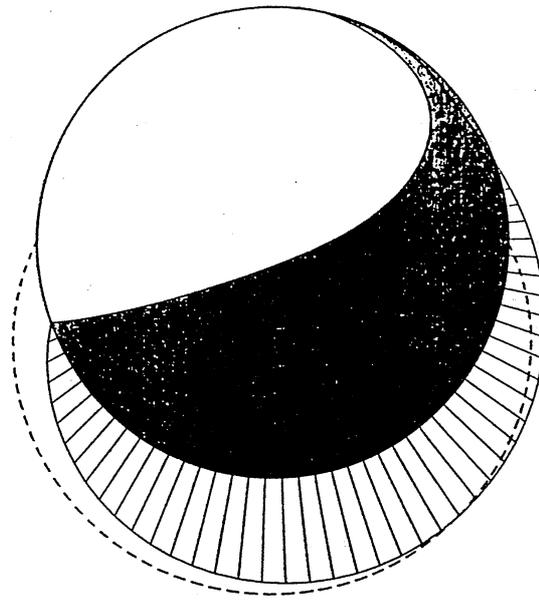


図 3: 各時刻の液面形状



TIME=1.799 S

図 4: 液面形状と容器壁に働く流体圧 (点線は静水圧)

図 3 に各時刻の自由表面形状を示す。これを見ると、自由表面の傾斜が大きくなるにしたがって容器壁付近にリップル (ripple) と呼ばれる突出部分ができているのがわかる。

時刻 1.714 秒で、わずかではあるが自由表面が 2 価関数で表される形状になってきている。この後自由表面は、さらに容器壁面を駆け上がって高さを増していく。しかし、壁面に働く流体圧を計算してみると、この時刻以降、徐々に負圧が発生し始める。その一例を示したのが、図 4 である。容器の外側にある部分が正圧、容器の内側にある部分が負圧を示す。容器壁の右上部に負圧帯が広がっているのがわかる。実験などで観察される実際の現象では、この負圧帯で液体は壁面から剥離し、いわゆる砕波 (breaking wave) の様相を呈するものと思われる。

8. 計算精度の検証

本方法による計算結果の精度の検証のために実験データとの比較を行う。

図 5 に示すような一定水深の 2 次元水槽内での造波問題を考える²。水槽中央の底には造波用のピストンが設置されている。ピストンの時刻 t における変位を $Y_P(t)$ と

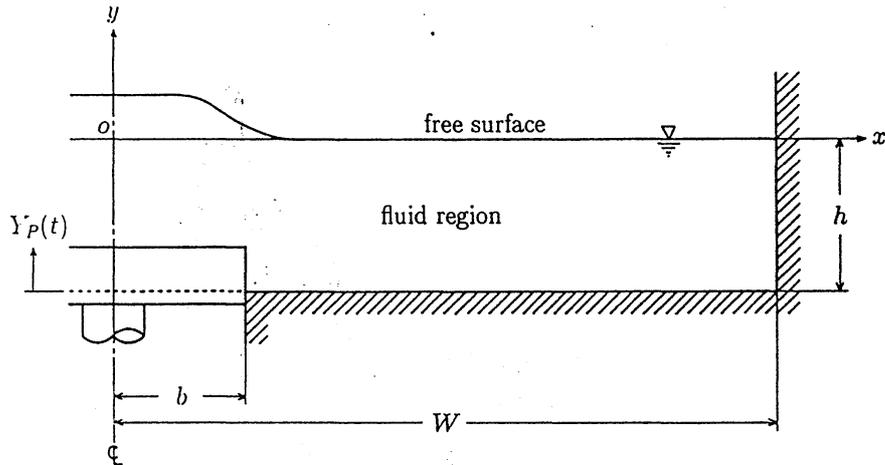


図 5: 2次元造波水槽

して、ピストンは関数

$$Y_P(t) = Y_0\{1 - \exp(-\alpha t)\} \quad t > 0 \text{ に対して} \quad (30)$$

に従って上昇するものとする。計算は、ピストンの上昇速度の異なる3種類について行った。水槽の大きさや要素分割の仕方、式(30)中のパラメータの値などを表1にまとめる。なお、本計算で使用する物理量はすべて、重力加速度 g と一定水深 h で無次元化されている。また、テーラー級数(5), (6), (23)では $n = 3$ とし、許容誤差 ε は 10^{-5} とした。

図6-8に、 $x = 0$ における自由表面変位の時間変化を示す。横軸は無次元時刻、縦軸は無次元変位を表す。○印は本方法による計算値を示し、実線は Hammack³の実験値である。破線は Hammack による線形理論解である。計算値と実験値との一致は

表 1: 計算に使用した数値

	$\frac{W}{h}$	$\frac{b}{h}$	Number of elements			ε	$\frac{Y_0}{h}$	$\alpha\sqrt{\left(\frac{h}{g}\right)}$
			Γ_1	Γ_2	Γ_3			
Impulsive motion	40.0	12.2	100	20	61	10^{-5}	0.2	1.305
Transitional motion	40.0	12.2	100	20	61	10^{-5}	0.1	0.231
Creeping motion	100.0	12.2	100	10	37	10^{-5}	0.3	0.010

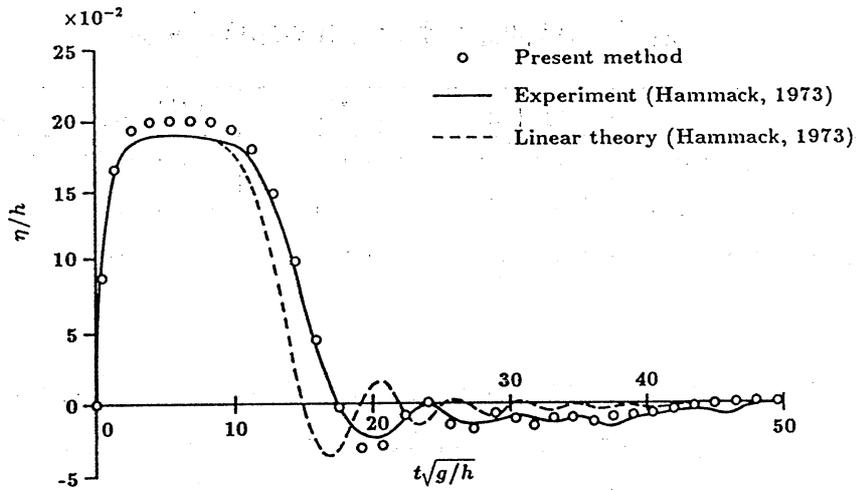


図 6: $x = 0$ における自由表面変位の時間変化 (impulsive motion)

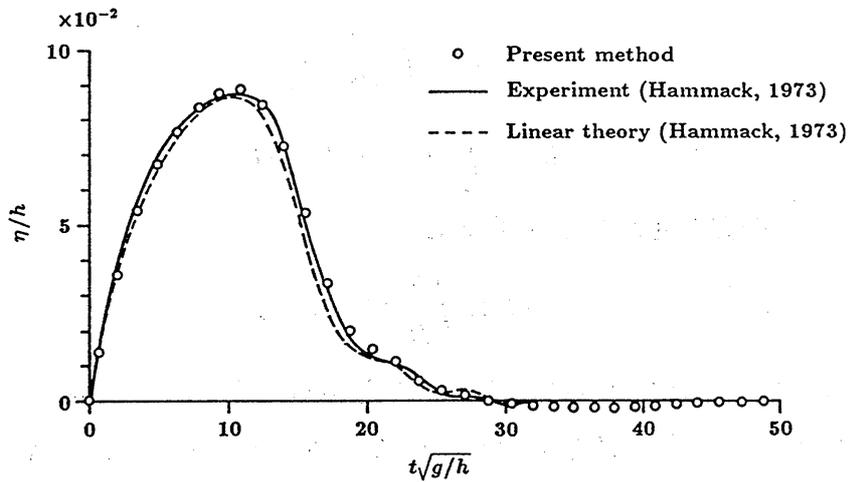


図 7: $x = 0$ における自由表面変位の時間変化 (transitional motion)

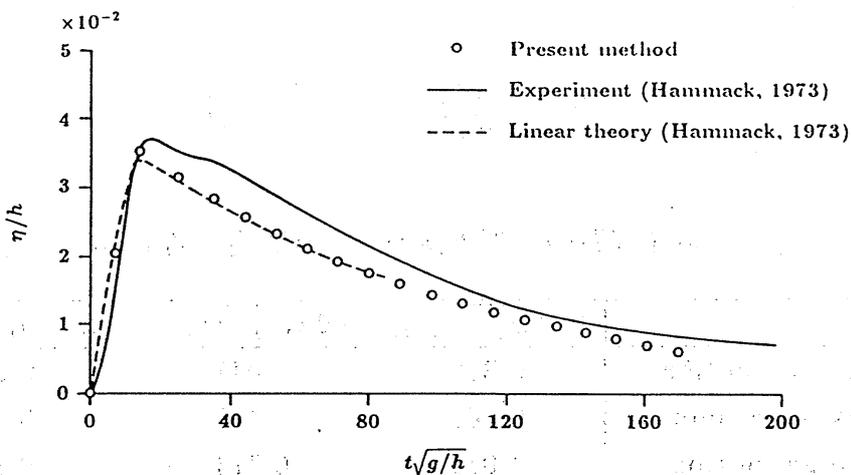


図 8: $x = 0$ における自由表面変位の時間変化 (creeping motion)

表 2: 造波問題における計算精度の検証

	$ Q^* _{max}$	$ Q^* _{min}$	$ H^* _{max}$	$ H^* _{min}$
Impulsive motion	1.4×10^{-4}	8.3×10^{-7}	5.6×10^{-3}	9.2×10^{-6}
Transitional motion	4.6×10^{-5}	3.6×10^{-7}	1.0×10^{-3}	2.8×10^{-6}
Creeping motion	8.0×10^{-5}	1.9×10^{-9}	6.8×10^{-4}	3.1×10^{-6}

良好である。図 8 の creeping motion に対する計算結果では、時刻 $t\sqrt{g/h} = 169.6$ を過ぎる頃から、水槽の右側壁よりの反射波の影響が $x = 0$ で見られるようになったため、数値のプロットを $t\sqrt{g/h} = 169.6$ で打ち切ってある。

次に、次式で定義される量 Q と H を毎ステップ計算して精度のチェックを行った。

$$Q = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma \quad (31)$$

$$H = \int_{\Gamma_1} \eta dx - bY_P(t). \quad (32)$$

式 (31) にガウスの発散定理を適用すると

$$Q = \iint_{\Omega} \nabla^2 \phi dx dy \quad (33)$$

となり、常に $Q = 0$ でなければならないことがわかる。 H は、静止水面よりも上にある液体の体積とピストンが押し退けた液体の体積の差に等しく、やはり常に $H = 0$ でなければならない。それぞれのケースについてこれらの量の絶対値の最大値と最小値を表 2 にまとめる。ただし、ここで Q と H は次のような無次元量 Q^* , H^* に変換されている。

$$Q^* = \frac{Q}{\sqrt{gh^3}}, \quad H^* = \frac{H}{h^2} \quad (34)$$

表 3: 造波問題の計算で使われた時間増分値 ($\varepsilon = 10^{-5}$)

	$(\Delta t\sqrt{g/h})_{max}$	$(\Delta t\sqrt{g/h})_{min}$	$(\Delta t\sqrt{g/h})_{average}$
Impulsive motion	0.338	0.047	0.294
Transitional motion	0.564	0.178	0.508
Creeping motion	1.035	0.373	0.871

また、表3には、6節で述べた方法で計算された時間増分の最大値、最小値、平均値がまとめられている。一般に、微小量 ε の値は時間増分の大小には影響を与えるが、 Q や H の改善にはそれほど影響を与えない。 Q や H の値を小さくするためには境界の要素分割を細かくしなければならないようである。

9. 3次元問題への拡張

本方法の3次元問題への拡張例として円筒形貯槽内のスロッシングのシミュレーション結果を紹介する⁴。図9のような、半径0.5 mの円筒形貯槽に深さ0.6 mまで液体を入れたモデルを考える。これを図の x 軸方向に加速度 $a(t) = -A \sin(2\pi ft)$ ($A = 0.0178g$, $f = 0.940\text{Hz}$) で加振する。ただし、このモデルの1次の固有振動数は0.944Hzである。

図10に各時刻の液面形状を示す。液面が時計回りに回転しているのがわかる。このような液面の回転運動はスワール (swirl あるいは rotary sloshing) と呼ばれ、非線形性の強い液面応答として知られている。

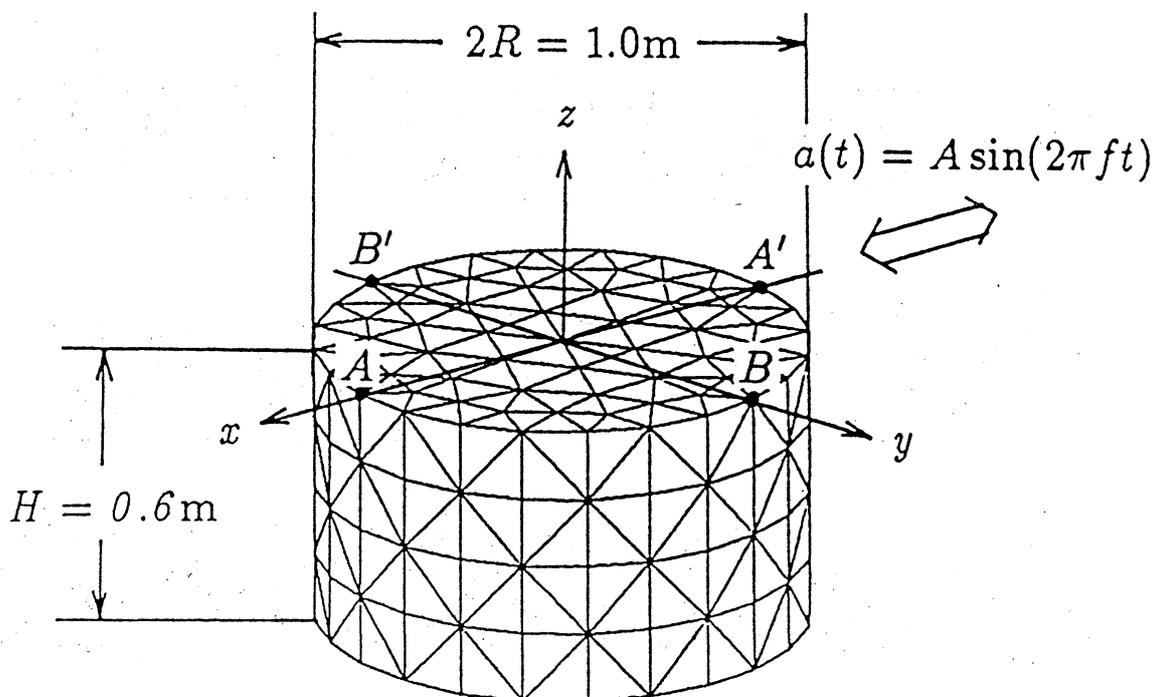


図9: 円筒形貯槽内の液体振動

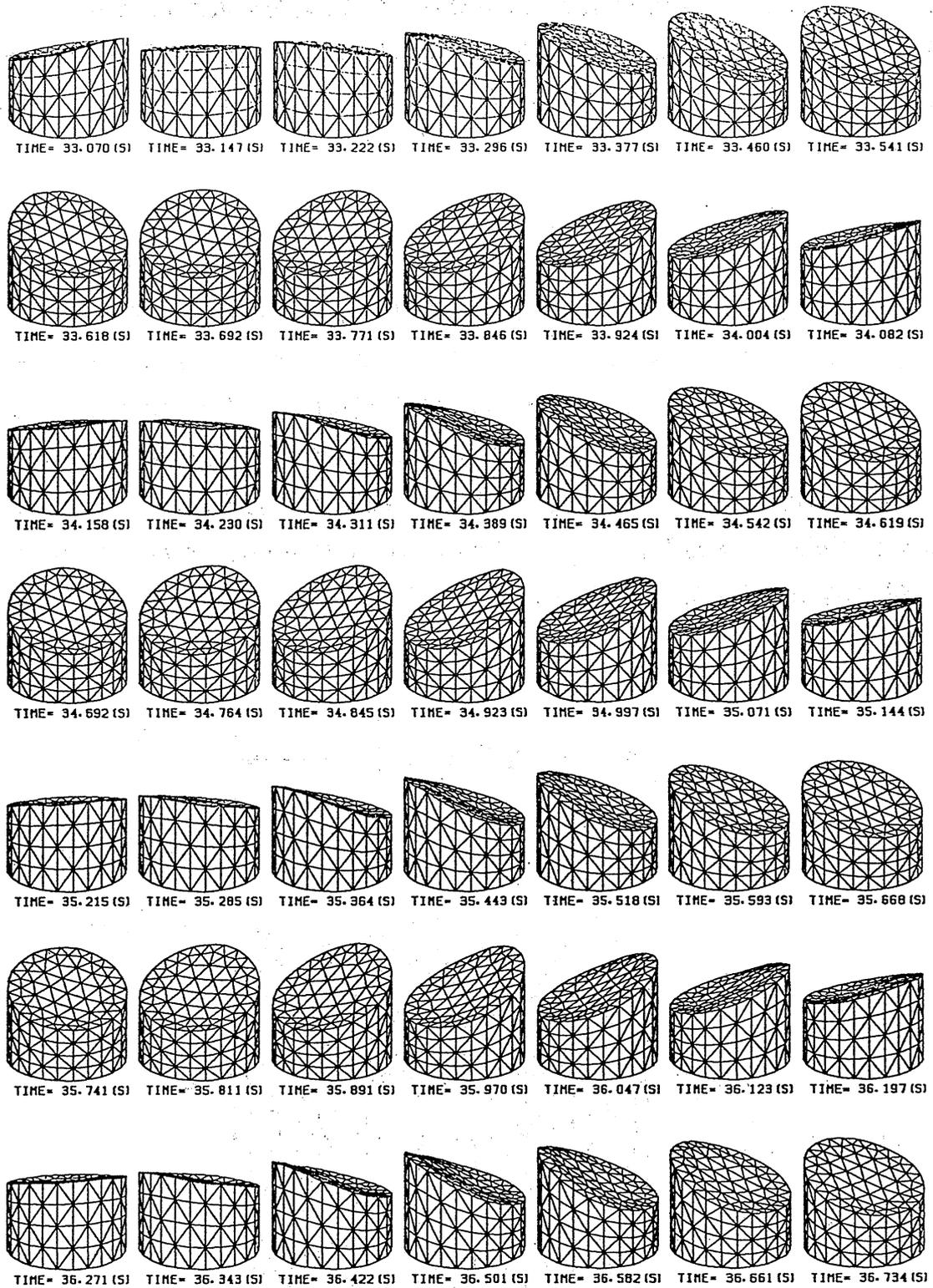


図 10: 水平加振される円筒形貯槽内の液面応答

10. おわりに

自由表面を有する液体の非定常運動に対する新しい数値解法を報告した。時間方向の離散化に関数のテーラー展開を応用し、精度の良い非定常計算を可能にした。さらに、テーラー級数の打ち切り誤差をある一定の微小値に抑えることによって、毎ステップ、最適の時間増分値を決めることができ、安定な数値計算を実現した。一般に自由表面問題では、自由表面上での非線形境界条件(2)の離散化には慎重な取扱いが要求されるが、本解法の実装方法は非常に簡単である。

参考文献

1. T. Nakayama, "Numerical simulation of large-amplitude liquid sloshing in horizontally excited tanks", Proceedings of the 7th International Conference on Finite Element Methods in Flow Problems, Huntsville, Alabama, 1989, pp. 659-664.
2. T. Nakayama, "A computational method for simulating transient motions of an incompressible inviscid fluid with a free surface", to appear in International Journal for Numerical Methods in Fluids.
3. J. L. Hammack, "A note on tsunamis: their generation and propagation in an ocean of uniform depth", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 60, Part 4, pp. 769-799 (1973).
4. 田中宏明, 中山 司, "3次元円筒形貯槽内の大振幅スロッシング現象の数値解析", 第3回計算力学シンポジウム報文集, 東京, 1989, pp. 241-246.