

## 多孔質媒体中を流れる 2 流体モデルについて

福岡教育大学 中木 達幸 (Tatsuyuki Nakaki)

### 1. はじめに

多孔質媒体とは、地中、スポンジ、吸取紙のように、非常に小さな穴が数多く空いている媒体のことである。流域が複雑な形をしているため、その中を流れる流体の挙動を調べることは非常に困難である。そのため、空間的に平均化した物理量を用いてモデル化することにより、解析を行っている。

本稿では、地中にある石油を、外部から水を注入することにより、回収する問題 (Oil reservoir problem) を扱う。その際に、'fingering instability' と呼ばれる現象が現われることが知られている (図 1)。

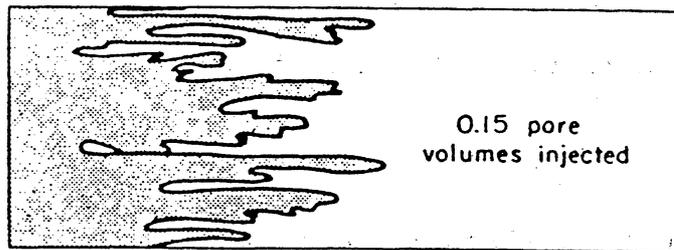


図 1 [8] fingering instability

FIGURE 38 Displacement front for a mobility ratio of 20, showing the development of fingers (after Terry et al. 1958).

上図左側から水を注入し、右側から石油を回収している。灰色の部分は水が侵入した所を示し、それと水が侵入していない部分との間に自由境界が現われる。その形が、あたかも「指」のようであるため、上記の名称がついている。

大きな目標として、この不安定性が生じるメカニズムの理解がある。図 1 は、空間 1 次元的な解 (縦方向には一様な解) が、不安定化したものと考えられる。そのため、まず、空間 1 次元の解の挙動を調べることにする。次に空間 2 次元について考察すべきであるが、これに関しては今後の課題としたい。

本研究にあたり、友枝謙二 (大阪工業大学)、永井敏隆 (九州工業大学) 両先生から、多くの示唆と激励を受けました。

## 2. モデル方程式 ([1])

全ての物理量は平均化するため、互いに混ざり合わない石油と水は、媒体内のある点  $x$  における、平均化を行う近傍内には、共存し得る。時刻  $t$  における近傍内の、石油の割合を  $S_o(x, t)$ 、水の割合を  $S_w(x, t)$  とおくことにする。これらの量は、飽和度 (saturation) と呼ばれている。このとき、次の関係式が成立することが知られている。

$$(1) \quad S_o + S_w = 1$$

$$(2) \quad -\nabla \cdot \rho_o \vec{v}_o = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_o S_o)$$

$$(3) \quad -\nabla \cdot \rho_w \vec{v}_w = \frac{\partial}{\partial t} (\phi \rho_w S_w)$$

$$(4) \quad \vec{v}_o = -\frac{K k_o}{\mu_o} (\nabla p_o - \rho_o \vec{g})$$

$$(5) \quad \vec{v}_w = -\frac{K k_w}{\mu_w} (\nabla p_w - \rho_w \vec{g})$$

$$(6) \quad p_o - p_w = p_c$$

ここで、 $S_i = S_i(x, t)$ ,  $\vec{v}_i = \vec{v}_i(x, t)$ ,  $p_i = p_i(x, t)$  ( $i = o, w$ ) が未知量で、それぞれ、流体  $i$  の飽和度、(平均化された) 速度、(平均化された) 圧力を示している。以下では、流体  $o$  は石油、流体  $w$  は水を表すとする。平均化は、

$$\vec{v}_i = \frac{1}{\text{vol}(\Delta V)} \int_{\Delta V'} \vec{v}_i' dx$$

により行なう。ここで、 $\Delta V$  は平均化を行なう領域、 $\Delta V'$  は  $\Delta V$  と流体が存在する範囲の共通部分、 $\vec{v}_i'$  は流体  $i$  の (平均化を行なう前の) 速度である。すなわち、流体のないところでは速度をゼロとして、空間的に一様な平均化を行なう。従って、少量の流体が速い速度で運動を行なっても、平均化された速度は小さくなる。

$\rho_i$ ,  $\mu_i$  は、流体  $i$  の密度、粘性係数であり、ここでは、与えられた定数とする。 $\phi = \phi(x)$  は、媒体の多孔度 (porosity) で、穴の空いている割合を示す。例えば、砂では  $\phi = 0.37 \sim 0.50$ , コンクリー

トでは  $\phi = 0.02 \sim 0.07$  である。  $K = K(x)$  は絶対浸透度 (absolute permeability) と呼ばれ、流体の流れ易さを表す。その単位は (長さ)<sup>2</sup> で、例えば、砂では  $K = 2.0 \times 10^{-7} \sim 1.8 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$  である。詳しくは、[1] 等を参照されたし。ここでは、媒体は一様であると仮定し、 $\phi$  と  $K$  も定数とする。  $k_o = k_o(S_w)$ ,  $k_w = k_w(S_w)$  は、流体  $i$  に対する媒体の相対浸透度 (relative permeability) と呼ばれ、図 2 の様な特性を持っている。直感的に言えば流域の広さを示し、 $S_w$  が小さければ、流体  $o$  の流域が広くなり、従って、 $k_o$  が大きくなる。  $k_w$  についても同様である。本来、 $k_w$  は  $S_o$  の関数であるが、(1) により、 $S_w$  の関数として扱うことにする。[5] 等の文献に従い、以下では、  $k_w(S_w) = S_w^2$ ,  $k_o(S_w) = (1 - S_w)^2$  とする。  $p_c = p_c(S_w)$  は 2 流体間の界面張力 (capillary pressure) で、図 3 に示す特性を持つものである。なお、 $\vec{g}$  は重力定数である。

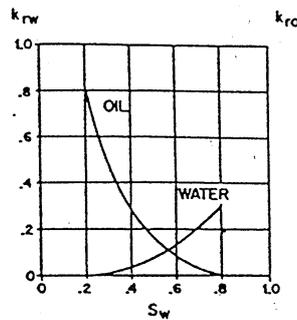


図 2  $k_w, k_o$  [3]

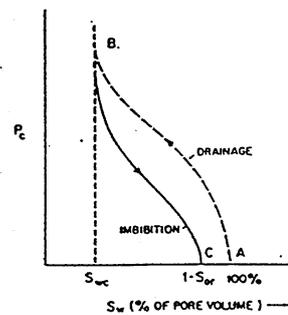


図 3  $p_c$  [3]

方程式 (1) は、媒体の中には石油と水のみが存在することを表している。(2)(3) は流体の保存則である。(4)(5) は、Darcy 則と呼ばれ、多孔質媒体中の流れにおいて特徴的に現われる実験則である。なお、Darcy 則と Navier-Stokes 方程式の関係については、[6] を参照されたし。また、(6) は圧力の釣合を示す関係式である。

重力を無視し、適当に変数変換を行なうと、(1) - (6) は、

$$(7) \quad S_t + \nabla \cdot [\vec{v} f] + \nabla \cdot \left[ f \frac{k_o}{\mu} \nabla p_c \right] = 0$$

$$(8) \quad \nabla \cdot \vec{v} = 0$$

$$(9) \quad \vec{v} = -\left[ \lambda \nabla p + \frac{k_o}{\mu} \nabla p_c \right]$$

と書き換えられる。ここで、 $S = S_w$ ,  $\vec{v} = \vec{v}_o + \vec{v}_w$ ,  $p = p_w$  が未知量で、 $x$  と  $t$  の関数である。また、

$$\lambda = \lambda(S) = k_w(S) + k_o(S)/\mu, \quad \mu = \mu_o/\mu_w$$

$$f = f(S) = k_w(S)/\lambda(S),$$

である。 $f(S)$  と  $\lambda(S)$  の形については図4と図5に記す。

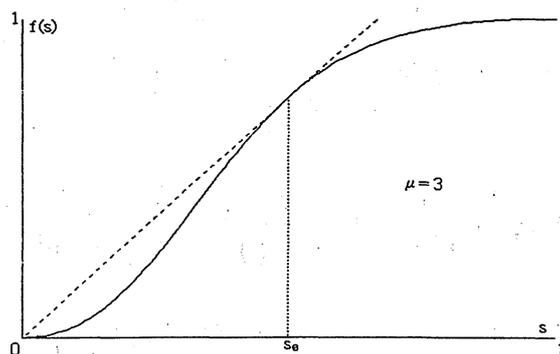


図4  $f(S)$

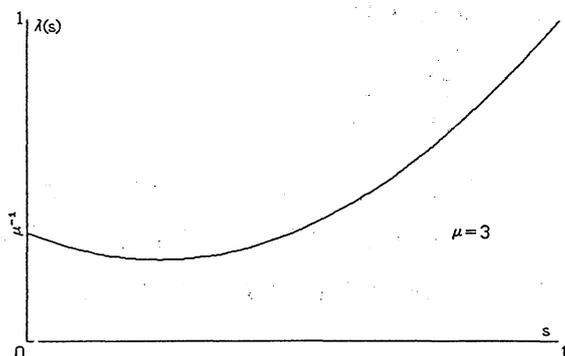


図5  $\lambda(S)$

本稿では、空間1次元のときの方程式(7)–(9)を、境界条件

$$(10) \quad S(0, t) = 1, \quad p(0, t) = p^*, \quad p(1, t) = 0 \quad (t > 0)$$

の下で考えることにする( $p^*$ は正定数)。これは、 $x = 0$ で水を注入し、 $x = 1$ で流体(石油)を回収することを表している。

### 3. 1次元 Buckley-Leverett 方程式の解の挙動

界面張力  $p_c$  を無視するとき、(7)–(9)を、Buckley-Leverett 方程式と呼び、多くの研究者により解析がなされている(例えば、[2][5][9])

等)。このとき (7), (9) は,

$$(11) \quad S_t + v f(S)_x = 0$$

$$(12) \quad v = -\lambda(S) p_x$$

となる。なお, (8) からは  $v$  は  $x$  に依らず  $t$  のみの関数になることが分かる。

これに関する差分スキームを述べる。自然数  $N$  を与え  $x$  方向の刻み幅を  $\Delta x = 1/N$  とし,  $t$  方向の (可変) 刻み幅を  $\Delta t_n$  と書く。  $t_n = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k$  とおき,  $S(j\Delta x, t_n), v(t_n)$  の近似値  $S_j^n, v^n$  を,

$$(13) \quad v^n \left[ \Delta x \left\{ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\lambda(S_0^n)} + \frac{1}{\lambda(S_N^n)} \right) + \sum_{j=1}^{N-1} \frac{1}{\lambda(S_j^n)} \right\} \right] = p^*$$

$$(14) \quad \frac{S_j^{n+1} - S_j^n}{\Delta t_n} + v^n \frac{f(S_j^n) - f(S_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0$$

により定める。  $\Delta t_n$  の値は安定条件

$$\Delta t_n \leq \frac{\Delta x}{v^n \max f'(\cdot)}$$

を満足するように選ぶ。(13) は (12) の両辺を  $\lambda(S)$  で割ったものを数値積分することにより得られたものである。(14) は (11) を Engquist-Osher 型の上流差分公式 [4] で離散化したものである。これによる数値計算例を図 6 に示す。

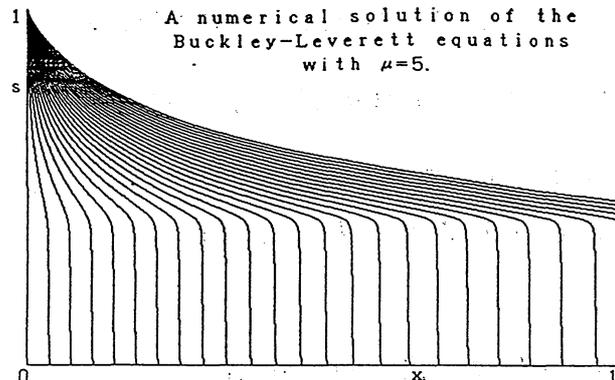


図 6 数値計算  
( $\mu = 5$ )

(11) は移流方程式で, その速度は  $v f'(S)$  である。  $f(S)$  の形 (図 4) から,  $S$  が 0 から 1 へと変化するにつれて, 速度は 小  $\rightarrow$  大  $\rightarrow$  小 と変化

する。 $s_0$ を図4のとおりを選ぶ。すなわち、

$$f'(s_0) = \frac{f(s_0)}{s_0}$$

とすると、 $S=0$ と $S=s_0$ とは shock wave で、 $S=s_0$ と $S=1$ とは rarefaction wave で結ばれる。従って、水が侵入した場所とそうでない場所の境を表す自由境界は shock wave の位置として表現できる。図7に図6の自由境界の位置の時間発展のグラフを記す。ここで、自由境界の位置は、差分解  $S_j^n$  の値が  $S=s_0/2$  を横切る位置として定めた。

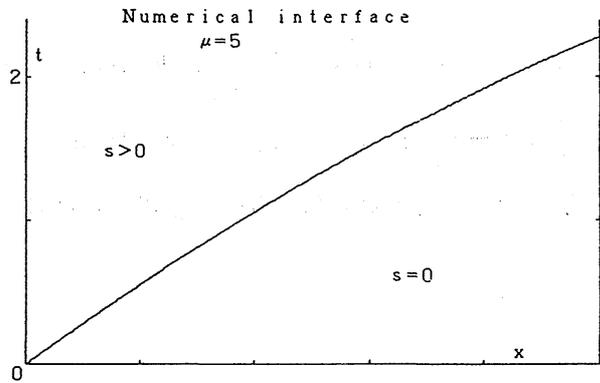


図7 自由境界  
( $\mu=5$ )

図7の曲線は上に凸、すなわち、自由境界の加速度が正であることを示す。このことは、 $\mu$ の値により状況が変わる。 $\mu=1$ のとき(図8)は負の加速度を持っている。

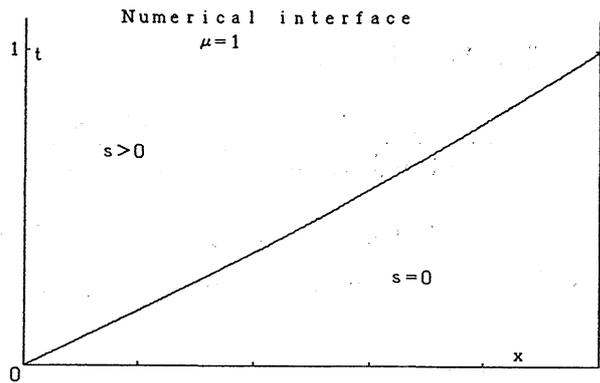


図8 自由境界  
( $\mu=1$ )

このことは、次の理由で説明できるであろう。(11), (12)の特殊解を

$$S(x,t) = \begin{cases} s_0 & x < \eta(t) \\ 0 & x > \eta(t) \end{cases}$$

の形で見つける。ここでは  $S$  に関する境界条件 ((10) の第 1 式) を無視する。圧力に関する境界条件  $p(0, t) = p^*$ ,  $p(1, t) = 0$  のもとで、速度  $v(t)$  と自由境界の位置  $\eta(t)$  は

$$\eta(t) = \frac{f(s_0)}{s_0} \int_0^t v(\tau) d\tau$$

$$v(t) = \frac{p^* \lambda(s_0) \lambda(0)}{\lambda(s_0) + \{\lambda(s_0) - \lambda(0)\} \eta(t)}$$

を満足すれば良い。簡単な計算により、上式を満足する  $\eta(t)$ ,  $v(t)$  は一意に定まり、

$$\eta''(t) > 0 \iff \lambda(s_0) - \lambda(0) < 0 \iff \mu > 3$$

$$\eta''(t) < 0 \iff \lambda(s_0) - \lambda(0) > 0 \iff \mu < 3$$

であることが分かる。従って、自由境界の加速度の符号は  $\mu$  の値により定まる。

#### 4. 界面張力を考慮した 1 次元 Buckley-Leverett 方程式

次に、界面張力を、 $p_c(S) = \varepsilon(1-S)$  の形で入れたとき ( $\varepsilon$  は正のパラメータ)、その、解への影響を考察する。このとき (7) は

$$(15) \quad S_t + v f(S)_x - \varepsilon (d(S) S_x)_x = 0$$

という移流拡散方程式に書き換えられる。ここで、

$$d(S) = -\frac{k_w(S) k_o(S) / \mu}{k_w(S) + k_o(S) / \mu} = -\frac{S^2 (1-S)^2}{\mu S^2 + (1-S)^2}$$

であり、拡散は  $S=0$  と  $S=1$  で退化する  $S$ -依存型のものである。また、(13) を導いたのと同様のことを行なうことにより、(9) より、

$$(16) \quad v \int_0^1 \frac{dx}{\lambda(S)} = p^* - c\varepsilon$$

を得る。ここで、

$$c = -\frac{1}{\mu} \int_0^1 \frac{k_o(S)}{\lambda(S)} S_x dx = \frac{1}{\mu} \int_{S(1,t)}^{S(0,t)} \frac{k_o(\sigma)}{\lambda(\sigma)} d\sigma$$

であり、これは、 $S$ の境界値  $S(0, t)$  と  $S(1, t)$  により定まる正の定数である。従って、 $\varepsilon$ の値が大きくなると、 $v$ の値が負になり得る。なお、(15), (16) から  $v$  を消去した式

$$\frac{1}{\varepsilon} S_t + \left( \frac{p^*}{\varepsilon} - c \right) \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\lambda(S)} \right]^{-1} f(S)_x - (d(S) S_x)_x = 0$$

より、 $t$ のスケールを無視すると、「 $\varepsilon \uparrow \infty$ ,  $p^*$ を固定」と「 $p^* \downarrow 0$ ,  $\varepsilon$ を固定」は同じことになる。従って、界面張力の大きさを表す  $\varepsilon$ の値を大きくすることは、現象と遊離したことではないことに注意しておく。

(15), (16) に対する差分法は、(13), (14) と同様に構成できる。(16)の離散化は数値積分を用いる。(15) に対しては、移流項は  $v^n$ の符号に注意して上流型差分を使う。拡散項は

$$\varepsilon \left[ d \left( \frac{S_{j+1}^n + S_j^n}{2} \right) \frac{S_{j+1}^n - S_j^n}{\Delta x} - d \left( \frac{S_j^n + S_{j-1}^n}{2} \right) \frac{S_j^n - S_{j-1}^n}{\Delta x} \right] / \Delta x$$

という離散化を行う。 $\mu = 20$ ,  $p^* = 1$ のときの、この方法による数値実験のグラフを図9～図13に記す。図9～図11における計算は自由境界が右端に達するまで行なったが、図12と図13では計算時間の関係上、途中で打ち切っている。 $\varepsilon = 0$ の場合は自由境界が shock wave として現われたが、 $\varepsilon > 0$ のときは拡散の影響で鈍っている。従って、自由境界の位置を求めるためには、特別な工夫が必要になる。 $S = 0$ の近くで拡散率は  $\varepsilon d(S) = \varepsilon S^2$  となるため、例えば、 $S$ -依存型拡散方程式

$$S_t = (S^2 S_x)_x \quad (\text{porous media equation})$$

に対する自由境界を追跡する差分法 ([7] 等) の手法を使う必要がある。しかし、本稿では、 $S_j^n$ のグラフから自由境界の位置を読み取ることにする。

図9～図13はそれぞれ、時刻間隔 0.1, 0.1, 0.1, 0.05, 0.005 毎の  $S(\cdot, t)$ の差分解のグラフである。これを見て分かるとおり、 $\varepsilon$ の値が大きくなるにつれて、自由境界の速度が遅くなっている。さらに、自由境界の加速度が、 $\varepsilon = 0, 0.01$ では正であるが、 $\varepsilon = 1$ ではほぼゼロ、 $\varepsilon$ の値がそれより大きくなると負になっている。従って、 $\varepsilon = 0$ のとき

(界面張力を無視したとき)は、前節で述べたように、 $\mu$ の値で加速度の符号が定まったが、 $\varepsilon > 0$ では $\varepsilon$ の値も関係する。

自由境界の加速度の符号に言及する理由は以下のとおりである。[5]等で行なわれている $\varepsilon = 0$ のときの空間2次元の数値実験を見ると、fingering instabilityは $\mu > 3$ のときに起こっている。さらに、[2]の結果によると、 $S(x, y, t) = \bar{S}(x, t)$ という形の2次元空間における(1次元的な)解の自由境界に正弦曲線の摂動を加えた解の自由境界は、線形化の意味で、 $\mu > 3$ のとき不安定で、 $\mu < 3$ のとき安定になる。これらの $\mu = 3$ という値は、前節で述べたとおり、自由曲線の加速度の符号の決定と関係がある。また、直感的に考えると、不安定化は「自由境界を $x = \eta(y, t)$ と表すとき、 $\eta(y_1, 0) - \eta(y_2, 0) > 0$ であれば $\eta(y_1, t) - \eta(y_2, t)$ の値は $t$ が増すにつれて大きくなる」と解釈できるであろう。これは、自由境界の加速度の符号と関連する。なお、言うまでもなく、このことは、数値実験等によるもので、数学的に示されたものではない。

また、図12と図13を見ると、 $\varepsilon$ の値が大きいとき、自由境界が止まるようにも思えるし、右端まで達するようにも思える。これは定常解の有無と関係する。そこで、(15), (16), (10)の定常問題

$$(17) \quad v f(S)_x - \varepsilon (d(S) S_x)_x = 0$$

$$(18) \quad v \int_0^1 \frac{dx}{\lambda(S)} = p^* - c\varepsilon$$

$$(19) \quad S(0) = 1, \quad S(1) = 0$$

を満足する関数 $S(x)$ と実数 $v$ の有無を調べる。なお、圧力 $p$ に関する境界条件は、すでに、(18)の中に織り込んでいる。(17)より、

$$v f(S) - \varepsilon d(S) S_x = \text{定数}$$

であるが、この定数の値は(19)よりゼロであることが分かる。また、 $d(S) = f(S) k_o(S) / \mu$ より、

$$f(S) = 0 \quad \text{または} \quad v - \varepsilon \frac{k_o(S)}{\mu} S_x = 0$$

となるが、左式より  $S(x) = 0$  , 右式より  $S(x) = (3\frac{\mu}{\varepsilon}vx)^{1/3} + 1$  を得るので、結局、

$$(20) \quad S(x) = \max\{(3\frac{\mu}{\varepsilon}vx)^{1/3} + 1, 0\}$$

が成り立つ。また、(19) の第 2 式を満たすためには、

$$(21) \quad v \leq -\frac{\varepsilon}{3\mu}$$

でなければならない。(20) を (18) に代入することにより、実数  $v$  に関する単独方程式

$$(22) \quad v - (p^* - c\varepsilon) \left[ \int_0^1 \frac{dx}{\lambda(\max\{(3\frac{\mu}{\varepsilon}vx)^{1/3} + 1, 0\})} \right]^{-1} = 0$$

を得る。従って、(21), (22) を満足する実数  $v$  が存在すれば定常解が構成でき、そうでなければ定常解が存在しないことになる。この  $v$  の存在、非存在に関しては、現在、検討をしている。数値実験では、図 9 ~ 図 13 におけるパラメータの値では、(22) の左辺は常に負になり、定常解の非存在が示唆される。従って、図 12 と 図 13 における自由境界は、右端まで達することが予想される。

### 参考文献

- [1] J.Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, American Elsevier Publishing Company Inc., 1972.
- [2] A.J.Chorin, *The Instability of Fronts in a Porous Medium*, Comm. Math. Phys., 91, 1983.
- [3] L.P.Dake, *Fundamentals of reservoir engineering*, Elsevier Scientific Publishing Company, 1978.
- [4] B.Engquist and S.Osher, *Stable and Entropy Satisfying Approximations for Transonic Flow Calculations*, Math. Comp., 34, 1980.
- [5] J.Glimm, D.Marchesin and O.McBryan, *Unstable fingers in two phase flow*, Comm. Pure Appl. Math., 24, 1981.

- [6] B.L.Méhauté, 応用流体力学入門, 堀川清司訳, 1976.
- [7] M.Mimura, T.Nakaki and K.Tomoeda, *A numerical approach to interface curves for some nonlinear diffusion equations*, Japan J. Appl. Math., 1, 1984.
- [8] A.E.Scheidegger, *The physics of flow through porous media*, Third edition, University of Toronto Press, 1974.
- [9] M.F.Wheeler(editor), *Numerical simulation in oil recovery*, Springer-Verlag, 1988.

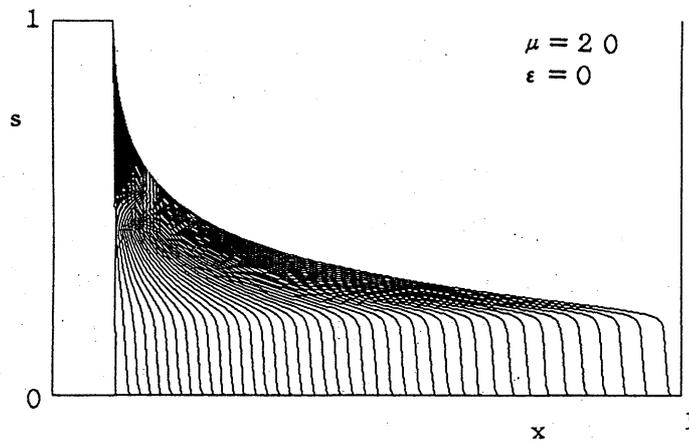


図9 数値計算 ( $\epsilon = 0$ , 時刻 0.1 ごと)

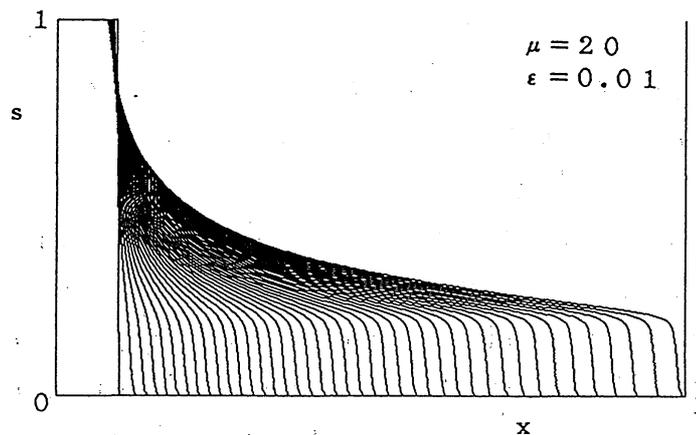


図10 数値計算 ( $\epsilon = 0.01$ , 時刻 0.1 ごと)

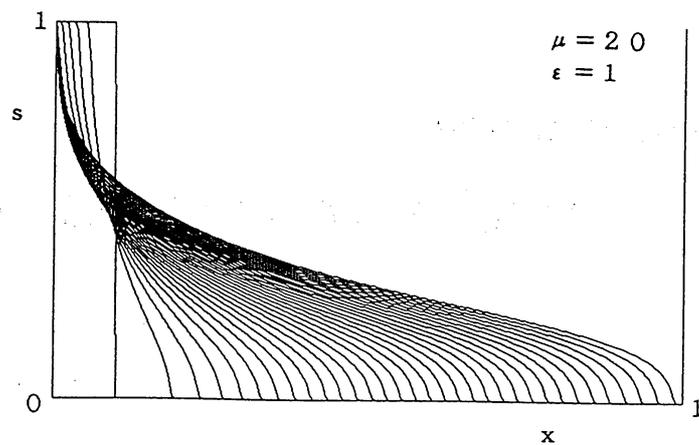


図 1 1 数值計算 ( $\varepsilon = 1$ , 時刻 0.1 ごと)

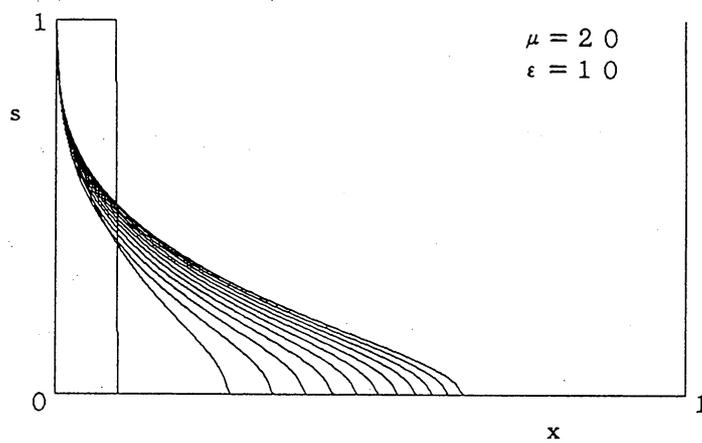


図 1 2 数值計算 ( $\varepsilon = 10$ , 時刻 0.05 ごと)

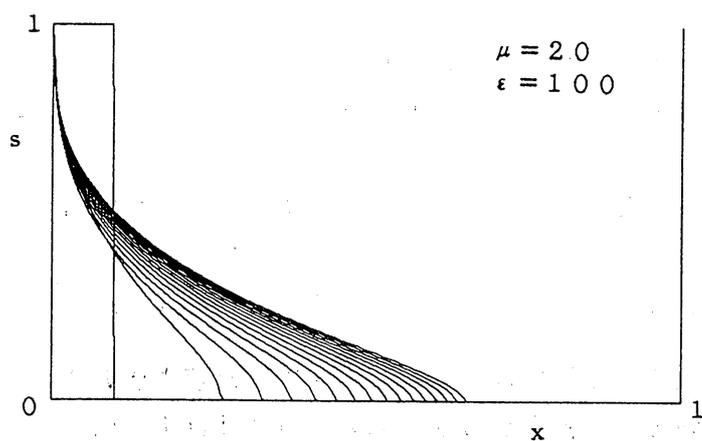


図 1 3 数值計算 ( $\varepsilon = 100$ , 時刻 0.005 ごと)