数理解析研究所講究録
第725巻 1990年 90-96

同変Nash予想について

阪市大理 枡田幹也 (Mikiya Masuda)

§0. 序

変換群論, つまり群作用をもつ空間の研究, は今まで主にC^∞までのカテゴリーでなされて来た。そこでは、有効な研究方法が開発され、豊富な情報が得られている。最近これらの情報、経験を基に、トポロジーの観点から、代数的カテゴリーでの群作用、つまり代数的群作用を研究しようという試みがある。その一つの問題として「同変Nash予想」がある。これは、C^∞カテゴリーの変換群論と代数的カテゴリーの変換群論を結ぶ掛け橋である。本稿では、同変Nash予想の部分的解決を報告する。詳細は、[DM1]を参照して下さい。また、同変Nash予想に関する概説として[M]がある。本稿の結果は、K.H.Dovermann氏との共同研究であることを付記しておく。

§1. 同変Nash予想。

以下、Gはコンパクト Lie 群とする。

<u>定義</u>. X が非特異代数G多様体とは

$\Longleftrightarrow$ $\exists V$ 実G表現空間, $\exists p_i : V \to \mathbb{R}$ $(1 \leq i \leq k)$ 多項式

s.t. $X = \{x \in V \mid p_1(x) = \cdots = p_k(x) = 0\}$

G不変かつ非特異

<u>注</u>。 $p = p_1^2 + \cdots + p_k^2$ とおくと、X は一つの多項式 p の零点集合と思える。

非特異代数G多様体は、代数的構造を忘れると境界のない C^ω G多様体である。特に、コンパクトならば、C^ω閉G多様体となる。次の予想はこの逆を問う。

<u>同変Nash予想</u>. 任意の C^ω閉多様体は、代数的に実現される。つまり、ある非特異代数G多様体と同変微分同相。

注(1) 作用がない時、上の予想は1952年にNashが予想したもので、1973年Tognoliによって肯定的に解かれた。

(2) 上の予想で「閉」を「開」に置きかえたものは正しくない。

次の部分的解決を得た。

定理（[DM1]）次のいずれかの場合、同変Nash予想は正しい。

(1) G作用がsemifreeかつnon-free（つまり、固定点を必ず持ち、固定点以外では、作用は自由）。

(2) Gが奇位数可換群。

(1), (2) いずれも証明のアイデアは同じである。現在の所、自由なG作用に対して、多くの場合予想が成立することがわかるが、一般には不明。それ故(1)で、non-freeという条件がついている。また、(2)において可換性を仮定しているが、この仮定が取り除かれる可能性は十分にある。

さて、上の定理の応用を一つ述べよう。それが同変Nash予想を考える動機となった（[DM2], [DMP]参照）。

応用　Gを、巡回群でないSylow部分群を3つ以上持つ奇位数可換群とする（例．$G=(\mathbb{Z}_3)^2\times(\mathbb{Z}_5)^2\times(\mathbb{Z}_7)^2$）。この時、非特異代数G多様体Xで、次をみたすものが存在する。

(i) $X^G=\phi$ （X^Gは固定点集合を表わす）。

(ii) Xは$\mathbb{R}^n$と微分同相。

Xが$\mathbb{R}^n$と非特異代数多様体として同型かどうかは不明。一般に、$\mathbb{R}^n$と微分同相であるが同型でない非特異代数多様体は存在する（$\mathbb{R}^n$と同型でないことを見るには、例えば複素化が異なることを見る）。　$\mathbb{R}^n$上のG表現は必ず原点を固定点に持つから、上の作用はかなりエキゾチックな作用と言える。Gに"巡回群でないSylow部分群を2つ以上持つ"という奇妙な仮定がついているが、Gが可換群の場合、(i)をみたすにはそれは必要条件である。

〈応用の証明〉 PetrieによりC^∞ G作用を持つ球面Σで、$\Sigma^G=\{一点\}$となるものが構成されている（ここでGの仮定が必要）。上の定理(2)により、ΣはあるG表現空間Vの中の非特異代数多様体と思ってよい。またΣ^{G}もそう。 $p: V\to\mathbb{R}$, $q: V\to\mathbb{R}$をそれぞれΣ, Σ^Gを零点集合に持つ多項式とする。

$$X=\{(v,t)\in V\times\mathbb{R} \mid p(v)=0,\ t\,q(v)-1=0\}$$

は非特異代数G多様体で

$$\begin{array}{ccc} \Sigma-\Sigma^G & \longrightarrow & X \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ v & \longmapsto & (v,\ 1/q(v)) \end{array}$$

により、$\Sigma-\Sigma^G$と同変微分同相。 Σは球面でΣ^Gは一点だったから、$\Sigma-\Sigma^G$は$\mathbb{R}^n$ ($n=\dim\Sigma$)と微分同相。よって、上のXが求めるもの。 ▨

§2, G同境

G=引手の時は、前に述べた様にTognoliにより予想は肯定的に解決されている。 その証明は大きく分けて、次の2つのステップからなる。

<u>補題1</u>. 非特異代数多様体と同境なC^∞閉多様体は、代数的に実現される。

この補題により、(向きを考えない)同境環$\mathfrak{N}_*$の生成元を調べることに問題は帰着される(トポロジーの問題!)。一方$\mathfrak{N}_*$の環構造は決定されており、$\mathbb{R}P^m$や$\mathbb{R}P^s\times\mathbb{R}P^t$のある超曲面で与えられることがわかっている。 これらが代数的に実現されることをみるのは難しくない。 つまり次を得る。

<u>補題2</u> $\mathfrak{N}_*$の生成元として非特異代数多様体がとれる。

補題1, 2より、G=引けの時、予想が正しいことが従う。補題1の証明は、技術的な困難はあるが、アイデアは明快である。

さて、Gが非自明の場合を考える際、まず、上の証明

がG作用があってもどの程度成立するかを見るのが自然であろう。 補題1の証明は、G作用がある場合にも少し修正すれば成立することがチェックできる。

<u>補題1'</u>([DMP]) 非特異代数G多様体とG同境なC^{∞} (加) G多様体は、代数的に実現される。

従って、(向きを考えない)G同境環$\mathfrak{N}_*^G$の生成元を調べることに問題は帰着される。 しかし、Gが非自明の時には、$\mathfrak{N}_*^G$の環構造は一般にわかっていない。 だが、我々の目的のためには、$\mathfrak{N}_*^G$の環としての構造を知る必要はない、つまり、関係式等をきっちり知る必要はない。 いくつかの非特異代数G多様体で生成されることを示せばよいのである。
定理の(1)又は(2)の時には、$\mathfrak{N}_*^G$はGベクトル束の実射影束という形のものと自由なG作用をもつものたちによって生成されることがわかり、それらが代数的に実現されることが示せ定理が従う。 詳細は[DMT]を参照のこと。 また、[M, 87]に$G=\mathbb{Z}_2$の場合の証明が与えられている。

§3 結び

非特異代数多様体の構造はC^{∞}多様体の構造より、

"fine"である。丁度、C^∞多様体の研究に、リーマン距離を(わざわざ)入れ、曲率を用いて、距離の取り方によらないC^∞多様体としての不変量を導き出したように、C^ω用多様体の研究に、代数多様体の構造を使うことができないだろうか。いくつかこの観点からの研究がある様であるが、もっと多くの研究がなされてもいいように思う。G作用がある場合も、C^ωカテゴリーでの変換群論のいくつかの結果を、代数的構造を用いて証明できないだろうか。例えば、「向きづけ可能なC^ω用多様体上の$\mathbb{Z}_p$ (p:奇素数)作用は、1点だけを固定点に持つことはない」というConner-Floydの定理があるが、代数的構造を用いた全く別証明があれば面白い。

参考文献

[DM1] K.H.Dovermann and M.Mikiya, The equivariant Nash conjecture and strictly algebraic vector bundles (仮題), 準備中.

[DM2] ———, Fixed point free low dimensional algebraic actions of A_5 on contractible varieties, Comment. Math. Helv. (to appear).

[DMP] ——— and T.Petrie, Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to $\mathbb{R}^n$, Progress in Math. 80 (1989), Birkhäuser, 49-80.

[M] 枡田幹也, トポロジストから見た代数的群作用の一面, 数学 (近刊)。