数理解析研究所講究録
第725巻 1990年 132-151

Invariant theory for the extended affine root system

京大数理研　佐竹 郁夫 (IKUO SATAKE)

§0 Introduction

0° ここでは、extended affine root 系と呼ばれるものを導入して、それ上定義されるWeyl群に関する、不変式論について述べる。この研究は特異点理論に基づいている。

1° すなわち、単純特異点と呼ばれる次の特異点

$$A_l \quad : \quad x^{l+1} + y^2 + z^2 = 0$$
$$D_l \quad : \quad x^2y + y^{l-1} + z^2 = 0$$
$$E_6 \quad : \quad x^4 + y^3 + z^2 = 0$$
$$E_7 \quad : \quad x^4 + xy^3 + z^2 = 0$$
$$E_8 \quad : \quad x^5 + y^3 + z^2 = 0$$

に対して、その semiuniversal deformation を考え、これをアフィン代数多様体の族とみて、Gauss Manin 接続を考える。このとき、左側に冠した記号に対応する、Lie環のルート系を用いることにより、このGauss Manin接続を再構成することができる。

すなわち、complex Cartan subalgebra を $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$，その Weyl 群を W，$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 上の Weyl 群不変な内積を I，(complex bilinear form) とすると、$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ が線型空間であるから、I から自然に $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に metric を入れることができ、この I の Weyl 群不変性から、metric を $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$ 上に induce できる。これから定義される metric compatible な $T(\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W)$ 上の connection (meromorphic connection) が、上記 Gauss Manin 接続と同一視できる。（Saito [5] 参照）
以下、言葉を流用して、この接続を Gauss Manin 接続と呼ぶ。

2° そこで、特異点の hierarchy で次に位置する、単純楕円型特異点に関しても同様の構成を行いたい。

超曲面特異点として定義される単純楕円型特異点は次のものである。

$$E_6^{(1,1)} : zy^2 - x(x-z)(x-\lambda z) = 0$$

$$E_7^{(1,1)} : xy(x-y)(x-\lambda y) + z^2 = 0$$

$$E_8^{(1,1)} : y(y-x^2)(y-\lambda x^2) + z^2 = 0$$

$$(\lambda \neq 0, 1)$$

左側に冠した記号は、Saito [6] により導入された

extended affine root systemにおける記号である。（以下、省略してe.a.r.s.と書くことがある。）

これらの特異点に対して、単純特異点の場合と同様な構成を、このe.a.r.s.を用いることによってできる。（ただし、対応するLie環については、現在研究途上である。Yamada [8] 参照）

e.a.r.s.はSaito [6]により完全に分類されており、その中に、$A_\ell^{(1,1)}$型と呼ばれる系列がある。

従って、逆に、これに対して同様の構成を行うことによって、meromorphic connectionの系列が定義できる。特に$\ell=4$の場合には、超曲面特異点でない単純楕円型特異点に対する、Gauss Manin接続を与えていると考えられる。これらは、代数多様体の族から得られるGauss Manin接続と、未だ同一視できないものも含んでいるが、言葉を流用して、$A_\ell^{(1,1)}$型Gauss Manin接続と呼ぶことにする。

$3°$ これらの研究のためには、$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$、いいかえれば$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$上のWeyl群不変式環の構造が基本的であり、それについては古典的に、次の定理が知られている。

Th 0-1 (Chevalley)

$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ 上の多項式環を $P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]$ とする。W は $P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]$ 上に作用するが、ある W-不変な多項式 $f_1, \cdots, f_\ell$ が存在して、

$$P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]^W = \mathbb{C}[f_1, \cdots, f_\ell]$$

但し、ℓ はルート系の rank である。

$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$ 上に Gauss Manin 接続が定義できるが、斎藤による「原始積分」の理論から、$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$ 上に「flat structure」が定義できる。

Th 0-2 (Saito [7])

$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}/W$ 上 定義される Gauss Manin 接続の「leading term」をとることにより、「flat structure」が定義される。とくに、flat coordinate とよばれる W-不変式 $\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_\ell$ が存在して、

$$P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]^W = \mathbb{C}[\tilde{f}_1, \cdots, \tilde{f}_\ell]$$

Chevalley の定理により、$P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]^W$ が多項式環になることはわかるが、その generator の選び方については何も主張していない。Saito の定理は、$P[\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}]^W$ に「flat structure」と呼ばれる上部構造を与えて、とくに、特殊な W－不変式、いわば Gauss Manin 接続の観点から「よい不変式」を選びうる、という事を主張しているのである。

4° 3° で述べた事を e. a. r. s. の場合に拡張したい。Th(0-1) の Chevalley の定理に相当する部分は、Bernstein, J. N ; Schwarzman, O. V. ; Kac, V. ; Peterson, D ; Looijenga, E. により示されている。

Th(0-2) の Saito の定理に相当する部分は、$E_6^{(1,1)}$, $E_7^{(1,1)}$, $E_8^{(1,1)}$ を含むある class について、やはり示されている。$A_\ell^{(1,1)}$ 型については Th(0-2) に相当する定理は（そのままの形では）ない。

ここでは、$A_\ell^{(1,1)}$ 型について、その Gauss Manin 系の構造を知るための step として、具体的な計算をすることを目標とする。

§1 $A_\ell^{(1,1)}$型 extended affine root system とその Weyl 群

Def ($A_\ell^{(1,1)}$ 型 e.a.r.s.)

$\varepsilon_0, \cdots, \varepsilon_\ell$, a, b を basis とする $\mathbb{R}$ 上の linear space を V i.e. $V := \bigoplus_{i=0}^{\ell} \mathbb{R}\varepsilon_i \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ とする。

これに内積を、$I'(\varepsilon_i, a) = I'(a, \varepsilon_i) = 0$ $(\forall i)$

$I'(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \delta_{ij}$, $I'(\varepsilon_i, b) = I'(b, \varepsilon_i) = 0 (\forall i)$

$I'(a, a) = I'(b, b) = I'(a, b) = I'(b, a) = 0$

と入れる。

$$R := \left\{ \pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) + nb + ma \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq i < j \leq \ell \\ m, n \in \mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

$$F := \bigoplus_{i=0}^{\ell-1} \mathbb{R}(\varepsilon_i - \varepsilon_{i+1}) \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$$

$$G := \mathbb{R}a$$

$$I'|_F = I$$

とする。このとき (R, F, G, I) を $A_\ell^{(1,1)}$ 型 extended affine root system と呼び、R をそのルートと呼ぶ。

定義からわかるように、これは classical な A_ℓ 型ルート系に、2方向の null root $\mathbb{Z}a$, $\mathbb{Z}b$ をつけ加えたものである。

$\alpha_i := \varepsilon_{i-1} - \varepsilon_i \quad (i = 1, \cdots, \ell)$ とする。

$\mathrm{rad}\, I = \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b$ となっている。

$\alpha \in R$ に対して、

$$w_\alpha(u) := u - I(u, \alpha^\vee)\alpha$$

$$\left(u \in F, \quad \alpha^\vee := \frac{2\alpha}{I(\alpha,\alpha)} \right)$$

と定義する。

Def (Weyl 群 W_R)

W_R : w_α ($\alpha \in R$) で生成される群

W_{R_f} : W_R が $F/\mathrm{rad}\, I$ 上引き起こす変換群

(classical な A_ℓ 型 Weyl 群に同型となる)

とすると、surjection $P_*: W_R \to W_{R_f}$ が得られ、

$\mathrm{Ker}\, P_* =: H_R$ とする。

i.e. $0 \to H_R \longrightarrow W_R \xrightarrow{P_*} W_{R_f} \longrightarrow 1$

$L := \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}\alpha_i$ とすると、

Def (hyperbolic extension)

$\tilde{F} := F \oplus \mathbb{R}\tilde{\lambda}$

$\tilde{I}$ を、$\tilde{I}(\tilde{\lambda}, b) = \tilde{I}(b, \tilde{\lambda}) = 1$

$\tilde{I}(\tilde{\lambda}, a) = \tilde{I}(a, \tilde{\lambda}) = 0$

$\tilde{I}(\tilde{\lambda}, x) = \tilde{I}(x, \tilde{\lambda}) = 0 \quad (x \in L)$

$\tilde{I}(\tilde{\lambda}, \tilde{\lambda}) = 0. \qquad \tilde{I}|_F = I$

で $\tilde{I}$ を定義する。

$(\tilde{F}, \tilde{I})$ を (F, I) の hyperbolic extension と呼び、$\tilde{w}_\alpha$ を同様に $\tilde{w}_\alpha(u) := u - \tilde{I}(u, \alpha^\vee)\alpha$ $(u \in \tilde{F},\ \alpha \in R)$ で定義し、$\tilde{w}_\alpha$ で生成される群を $\tilde{W}_R$ とする。

$\tilde{w}_\alpha|_F = w_\alpha$ より得られる全射 : $\tilde{W}_R \to W_R$ の Ker を $\tilde{K}_R$ とする。

$$0 \to \tilde{K}_R \to \tilde{W}_R \to W_R \to 1$$

さらに $\tilde{w}_\alpha|_L$ として得られる全射 $\tilde{W}_R \to W_{R_f}$ の Ker を $\tilde{H}_R$ とすると、まとめて次の図式を得る。

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{K}_R & \to & \tilde{H}_R & \to & H_R & \to & 1 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \tilde{K}_R & \to & \tilde{W}_R & \to & W_R & \to & 1 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & W_{R_f} & = & W_{R_f} & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & 1 & & 1 & &
\end{array}
$$

§2. Weyl 群不変式環

1° 古典的な場合の $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ に相当するものを導入する。

Def

$$\widetilde{\mathbb{E}} := \{ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\widetilde{F}, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ \mathrm{Im}\, b(x) > 0 \}$$

$$\mathbb{E} := \{ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(F, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ \mathrm{Im}\, b(x) > 0 \}$$

$$\mathbb{H} := \{ x \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathrm{rad}\, I, \mathbb{C}) \mid a(x) = 1,\ \mathrm{Im}\, b(x) > 0 \}$$

（複素上半平面と同一視する）

自然な inclusion : $\mathrm{rad}\, I \hookrightarrow F \hookrightarrow \widetilde{F}$ から、

projection $\widetilde{\mathbb{E}} \to \mathbb{E} \to \mathbb{H}$ が induce される。

$\widetilde{\mathbb{E}} \to \mathbb{E}$ なる自然な projection に $\widetilde{W}_R$, W_R が transposed inverse で equivariant に作用するが、

Prop (Saito [7])

$\widetilde{\mathbb{E}} \to \mathbb{E} \to \mathbb{H}$

にそれぞれ $\widetilde{H}_R$, H_R を作用させて、

$$\begin{array}{ccccc} \widetilde{\mathbb{E}}/\widetilde{H}_R & \to & \mathbb{E}/H_R & \to & \mathbb{H} \\ \| & & \| & & \\ L^* & & X & & \end{array}$$

とする。

i) X は $\mathbb{H}$ で parametrize された Abelian variety の family となる。

ii) L^* は X の $\mathbb{C}^*$ bundle となる。

iii) L を L^* より定まる X 上の line bundle とすると、L^{-1} は ample である。

iv) L の zero section を (各 $\tau \in H$ ごとに) blow down したものを $\mathbb{L}$ とかく.

$\mathbb{L}$ は、$\mathbb{H}$ で parametrize された、孤立特異点をもつ affine algebraic variety の family となる。

従って、以下に見るように theta 函数を用いて、不変式を構成することができる。

theta 函数を定義するために、$\widetilde{\mathbb{E}}$, $\mathbb{E}$ に座標を導入しよう。

$$\widetilde{F} = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{R}\alpha_i \oplus \mathbb{R}a \oplus \mathbb{R}b \oplus \mathbb{R}\widetilde{\lambda}$$

に対して、α_i', a', b', $\widetilde{\lambda}' \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\widetilde{F}, \mathbb{C})$ を、それぞれ α_i, a, b, $\widetilde{\lambda}$ の dual basis とする。これを用いると、

$$\widetilde{\mathbb{E}} = \left\{ \sum x_i \alpha_i' + a' + \tau b' + t\widetilde{\lambda}' \mid x_i, t \in \mathbb{C}, \tau \in \mathbb{H} \right\}$$

$$\mathbb{E} = \left\{ \sum_{i=1}^{\ell} x_i\alpha_i' + a' + \tau b' \;\middle|\; x_i \in \mathbb{C},\ \tau \in \mathbb{H} \right\}$$

と書ける。

α_i を、classical な Cartan subalgebra $\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の元とみなし、$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$（$\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}$ の dual space。内積を $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle := I(\alpha_i, \alpha_j)$ で入れる）に入っている内積を用いて定義される map $\iota : \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*$ を用いて、次の map を定義する。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathbb{E}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* \times \mathbb{C} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum_{i=1}^{\ell} x_i\alpha_i' + a' + \tau b' + t\tilde{\lambda}' & \longmapsto & \left(\tau,\ \iota\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i\alpha_i\right),\ t\right) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{H} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum_{i=1}^{\ell} x_i\alpha_i' + a' + \tau b' & \longmapsto & \left(\tau,\ \iota\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i\alpha_i\right)\right) \end{array}$$

この同型を用いて、$\widetilde{\mathbb{E}}$ 上の函数を explicit に定義する。

<u>2°</u> Chevalley type theorem を確立するために、$\widetilde{\mathbb{E}}$ 上の Weyl 群 $\widetilde{W}_R$ 不変式環、いいかえれば L^* 上の classical Weyl 群 W_{R_f} 不変式環を、次の形で定式化する。

$$S_m := \Gamma(X, \mathcal{O}(L^{-\otimes m}))$$
$$S := \bigoplus_{m=0}^{\infty} S_m$$
$S_m^W :=$ S_m のうちで、W_{R_f} 不変なもの全体.
$$S^W := \bigoplus_{m=0}^{\infty} S_m^W$$

$\tilde{\mathbb{E}} \simeq \mathbb{H} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* \times \mathbb{C}$ 上の函数 $\Theta_{\mu,m}^M(\tau, z, t)$
$\left(M = \bigoplus_{i=1}^{\ell} \mathbb{Z}\alpha_i \quad , \quad \mu \in \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^* \quad , \quad m \in \mathbb{Z}_+ \right)$
を、

$$\Theta_{\mu,m}^M(\tau, z, t) := e^{-2\pi\sqrt{-1}mt} \sum_{\gamma \in M + \frac{\mu}{m}} \exp\left[\pi\sqrt{-1}m\tau\langle\gamma,\gamma\rangle - 2\pi\sqrt{-1}m\langle\gamma, z\rangle\right]$$

で定義する。

w_i : fundamental weight (i.e. $\langle\alpha_i, w_j\rangle = \delta_{ij}$)
$\rho = \sum_{i=1}^{\ell} w_i$, $w_0 = 0$ とする.

$$\frac{A_{\Lambda_i+\rho}}{A_\rho} := \frac{\sum_{w \in W_{R_f}} (\det w)\, \Theta_{w(w_i+\rho),\, \ell+2}^M}{\sum_{w \in W_{R_f}} (\det w)\, \Theta_{w(\rho),\, \ell+1}^M}$$

と定義する。($A_\ell^{(1)}$ 型 affine Kac-Moody algebra の、fundamental weight を highest weight とする、irreducible highest weight representation の character に ($\mathcal{O}(\mathbb{H})$ factor を

除いて）一致している。）

Th.（Bernstein, J.N. and Schwarzman, O.V [1], [2]; Kac, V. and Peterson, D. [3]; Looijenga, E. [4]）

S^W は $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ 係数の多項式環となり、その独立な generator として、$\frac{A_{\Lambda_i+\rho}}{A_\rho}$ がとれる。

i.e. $S^W = \mathcal{O}(\mathbb{H})\left[\frac{A_{\Lambda_0+\rho}}{A_\rho}, \cdots, \frac{A_{\Lambda_\ell+\rho}}{A_\rho}\right]$

但し $\mathcal{O}(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ 上の（global な）正則函数である。

$S := \mathbb{H}\times\mathbb{C}^{\ell+1} \ni (\tau, x_0, \cdots, x_\ell)$ として、

$$\begin{array}{ccc}\pi: \mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{H}\times\mathbb{C}^{\ell+1} \\ \cup\!\!\!\shortmid & & \cup\!\!\!\shortmid \\ (\tau, z, t) & \longmapsto & (\tau, x_0, \cdots, x_\ell)\end{array}$$

を $\begin{cases}\tau = \tau \\ x_i = \dfrac{A_{\Lambda_i+\rho}}{A_\rho} \quad (i=0, \cdots, \ell)\end{cases}$

で定義すると、

π は $\widetilde{W}_R$ 不変式を並べたものだから、

$\widetilde{E}/\widetilde{W}_R = \mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C}/\widetilde{W}_R = L^*/W_{Rf}$

からの map とできる。

$$
\begin{tikzcd}
\pi : \mathbb{H} \times \mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^{*} \times \mathbb{C} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{\ell+1} \\
& L^{*}/W_{Rf} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

上記定理と解析幾何の一般論とから、

$$
\begin{tikzcd}
L^{*}/W_{Rf} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbb{H} \times (\mathbb{C}^{\ell+1} \setminus \{0\}) \arrow[d] \\
\mathbb{L}/W_{Rf} \arrow[r, "\sim"] & \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{\ell+1}
\end{tikzcd}
$$

となる。従って、以下、π を $\widetilde{W}_R$ quotient map とみなす。

§3 metric と connection

$1°$ $\widetilde{\mathbb{E}}$ は affine space として定義されていたから、$\widetilde{\mathbb{E}} \ni x$ に対して同型 $T_x^* \widetilde{\mathbb{E}} \xrightarrow{\sim} (\widetilde{F}/G) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ が定義できる。$\widetilde{F}/G$ には、内積 $\widetilde{I}$ が入っていたから、$\widetilde{\mathbb{E}}$ に dual metric $\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}} : \Omega^1_{\widetilde{\mathbb{E}}} \times \Omega^1_{\widetilde{\mathbb{E}}} \to \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ ($\Omega^1_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ は $\widetilde{\mathbb{E}}$ 上の hol. 1-form, $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ は $\widetilde{\mathbb{E}}$ 上の hol. fn. 上記 $\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ は $\mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$-bilinear) を定義できる。

$\widetilde{I}$ は $\widetilde{F}/G$ 上 non degenerate だから、$\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ で $T_x^* \widetilde{\mathbb{E}}$ と $T_x \widetilde{\mathbb{E}}$ とを同一視して、$\widetilde{\mathbb{E}}$ 上の metric $\widetilde{I}^*_{\widetilde{\mathbb{E}}} : \mathrm{Der}_{\widetilde{\mathbb{E}}} \times \mathrm{Der}_{\widetilde{\mathbb{E}}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ が定義できる。$\widetilde{I}$ は $\widetilde{W}_R$ 不変だったことから、これら $\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$, $\widetilde{I}^*_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ を $\widetilde{\mathbb{E}}/\widetilde{W}_R$ 上に落とすことができる。

これを explicit に計算しよう。

z_i を、$\mathfrak{h}^*$ の $\langle\ ,\ \rangle$ に関する orthonormal basis とする。($\langle z_i, z_j \rangle = \delta_{ij}$)

$$\widetilde{\mathbb{E}} \simeq \mathbb{H} \times \left(\bigoplus_{i=1}^{l} \mathbb{C} z_i\right) \times \mathbb{C}$$

すると $\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}$ は、

$$\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}(d\tau, dz_i) = 0, \quad \widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}(dt, dz_i) = 0$$

$$\widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}(d\tau, dt) = 0, \quad \widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}(dt, dt) = \widetilde{I}_{\widetilde{\mathbb{E}}}(d\tau, d\tau) = 0$$

$\tilde{I}_{\tilde{E}}(dz_i, dz_j) = \delta_{ij}$ となる。

引き戻し

$$\pi^* : \Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1_{\tilde{E}}$$
$$df \longmapsto \frac{\partial f}{\partial \tau} d\tau + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^{l} \frac{\partial f}{\partial z_i} dz_i$$

を用いて、$\tilde{I}_{\tilde{E}}$ の induce する S 上の bilinear form $\tilde{I}_S$ を計算する。

map π の Jacobian を J とすると、

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tau}{\partial \tau} & \frac{\partial \tau}{\partial t} & \frac{\partial \tau}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial \tau}{\partial z_l} \\ \frac{\partial s_0}{\partial \tau} & \frac{\partial s_0}{\partial t} & \frac{\partial s_0}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial s_0}{\partial z_l} \\ & & \cdots\cdots & & \\ \frac{\partial s_l}{\partial \tau} & \frac{\partial s_l}{\partial t} & \frac{\partial s_l}{\partial z_1} & \cdots & \frac{\partial s_l}{\partial z_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial s_0}{\partial \tau} & \frac{\partial s_0}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial s_0}{\partial z_l} \\ & \cdots & & \\ \frac{\partial s_l}{\partial \tau} & \frac{\partial s_l}{\partial t} & \cdots & \frac{\partial s_l}{\partial z_l} \end{bmatrix}$$

但し、$\frac{A_{s_i+\rho}}{A_\rho}$ を s_i を略記した。

これを用いて、$S = \mathbb{H} \times \mathbb{C}^{l+1}$ での dual metric $\tilde{I}_S$ は、

$$\begin{bmatrix} \tilde{I}_S(d\tau, d\tau) & \tilde{I}_S(d\tau, dx_i) \\ & \\ \tilde{I}_S(dx_i, d\tau) & \tilde{I}_S(dx_i, dx_j) \end{bmatrix} = J \left[\begin{array}{cc|ccc} 0 & 1 & & 0 & \\ 1 & 0 & & & \\ \hline & & 1 & & 0 \\ & 0 & & \ddots & \\ & & 0 & & 1 \end{array}\right] {}^tJ$$

$$
= \left[\begin{array}{c|ccc}
0 & \dfrac{\partial A_0}{\partial t} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial A_\ell}{\partial t} \\
\hline
\dfrac{\partial A_0}{\partial t} & & & \\
\vdots & & F(A_i, A_j) & \\
\dfrac{\partial A_\ell}{\partial t} & & &
\end{array}\right]
$$

（但し、

$$F(A_i, A_j) = \frac{\partial A_i}{\partial t}\frac{\partial A_j}{\partial \tau} + \frac{\partial A_i}{\partial \tau}\frac{\partial A_j}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\ell}\frac{\partial A_i}{\partial z_k}\frac{\partial A_j}{\partial z_k}$$

$(i, j = 0, \cdots, \ell)$ ）

となる。

<u>Def</u>

$$D := \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\ell}\left(\frac{\partial}{\partial z_i}\right)^2$$

を Laplacian と呼ぶ。

これを用いると、

$$F(A_i, A_j) = D(A_i \cdot A_j) - D(A_i)A_j - D(A_j)A_i$$

string function の理論より、実は

$$\frac{A_{\Lambda_i+\rho}}{A_\rho} = \eta^{-\ell}(\tau)\,\Theta^M_{w_i,1}$$

$$\left(\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n\geq 1}(1-q^n) \quad q = e^{2\pi i\tau}\right)$$

と書けることがわかり、さらに

$D(\Theta^M_{\mu,m}) = 0$ が簡単にわかる。

2° $\mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C}$ 上の自己同型を定義する。

$\mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C}\ni(\tau, z, t)$ として、

① $(\tau, z, t)\mapsto(\tau, z-w_i, t)$

② $(\tau, z, t)\mapsto(\tau, z+\tau w_i, t-\langle w_i, z\rangle-\frac{\tau}{2}\langle w_i, w_i\rangle)$

③ $(\tau, z, t)\mapsto\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}, \frac{z}{c\tau+d}, t+\frac{c}{2}\frac{\langle z, z\rangle}{c\tau+d}\right)$

$$\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL(2,\mathbb{Z})\right)$$

これらは $\mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C}$ の解析的自己同型群の元であって、$\widetilde{W}_R$ の normalizer の元である。従って、$\mathbb{H}\times\mathfrak{h}_{\mathbb{C}}^*\times\mathbb{C}/\widetilde{W}_R$ 上の変換群を ①, ②, ③ は生成する。

①, ②, ③ のうち、①, ② で $(C_{l+1})^2$ をなし、(C_{l+1} は $l+1$ 次巡回群)、③ の変換と合せて、$(C_{l+1})^2\rtimes SL(2,\mathbb{Z})$ となっている。この群を $\widetilde{G}$ としよう。

Prop dual metric tensor $\widetilde{I}_S$ は、$\widetilde{G}$ に対して、($\mathcal{O}(\mathbb{H})$ factor を除いて) 不変。さらに、$\mathbb{E}$ 上の function に対して、D の作用と $\widetilde{G}$ の作用は ($\mathcal{O}(\mathbb{H})$ factor をのぞいて) 可換である。

Cor　$1°$ で述べた D の性質と string function の理論，及び logarithmic vector field の性質と上記 proposition を合わせ用いる事により、metric $\tilde{I}_S^*$，dual metric $\tilde{I}_S$，さらには connection を explicit に計算することができる。

参考文献

[1] Bernstein, J.N. and Schwarzman, O.V. : Chevalley's Theorem for complex crystallographic Coxeter groups, Funct. Anal. Appl. 12 N4 (1978)

[2] Bernstein, J.N and Schwarzman, O.V. : Chevalley's Theorem for Complex Crystallographic Coxeter groups and Affine Root systems, Seminar on Supermanifolds 2, edited by Leites, 1986 No.22, Matem. Inst., Stockholms Univ.

[3] Kac, V. and Peterson, D : Infinite-Dimensional Lie Algebras, Theta-Functions and Modular Forms, Advances in Mathematics, Vol. 53, 1984

[4] Looijenga, E. : Root systems and elliptic curves. Inventiones Math., 38 (1976)

[5] Saito, K. : On a linear structure of a quotient variety by a finite reflexion group, pre-print RIMS-288 (1979)

[6] Saito, K. : Extended affine root systems I (Coxeter transformation), Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 75-179

[7] Saito, K : Extended affine root system II (Flat invariants) preprint RIMS-633 (1988)

[8] Yamada, H.K. : Extended affine Lie algebras and their vertex representations, preprint RIMS 578 (1987)

[9] Satake, I. : Gauss Manin connection for the extended affine root system of type $A_l^{(1,1)}$ 京都大学修士論文 (1989)