数理解析研究所講究録
第 726 巻 1990 年 37-43

不完全修理を伴うシステムの最適取り替え

愛知工業大学　大鋳 史男

<u>序</u> 何らかの事象が non-homogeneous Poisson process $\{N(t), t\geq 0\}$ に従って発生するものとする。事象発生時点で何らかの action を取り，action の結果成功であれば過程はそこで kill される。不成功であれば継続して事象が発生する。action に要する時間は無視できるとする。N 回目の事象発生時点で action の結果が初めて成功であるとすれば，過程が kill されるまでの時間は S_N である。ここで $S_k \equiv \inf\{t \mid N(t)=k\}$ である。

例えば，計算機が処理しなければならない task が non-homogeneous Poisson process に従って発生し，各 task の処理の結果が成功，不成功であれば S_N は初めて task の処理が成功するまでの時間を表わす。又故障が non-homogeneous Poisson process に従って発生し，各故障に対する action の結果が完全修理，不完全修理であれば，S_N は初めて完全修理が行なわれるまでの時間を表わす。

我々の関心は S_N の分布関数の確率的単調性と，S_N 以前にある定まった時刻で過程を stop する時，どの時点で stop させれば最適かという問題である。最適規準は long-run average cost である。

<u>Formulation and Results</u>

仮定 ① $\{N(t), t \geq 0\}$: continuous intensity function $\lambda(t)$ を持つ non-homogeneous Poisson process , $\Lambda(t) \equiv \int_0^t \lambda(u)du$, $S_k \equiv \inf\{t \mid N(t)=k\}$

② N : positive integer valued random variable で $\{S_k\}_{k=1}^{\infty}$ に対する randomized stopping time[6], i.e.,

$\forall k \geq 1$, $\Pr\{N>k \mid S_1, \ldots, S_k, S_{k+1}, \ldots\} = \Pr\{N>k \mid S_1, \ldots, S_k\}$.

Nの性質 ① $\forall k \geq 1$, $\Pr\{N>k \mid S_1, \ldots, S_k, S_{k+1}\} = \Pr\{N>k \mid S_1, \ldots, S_k\}$

② $\forall k \geq 1$, $\Pr\{N>k \mid S_k, S_{k+1}\} = \Pr\{N>k \mid S_k\}$.

Proof: ①は仮定②から直接導かれる。②は仮定②と S_k の定義とから導かれる。　〈証明終〉

S_N の分布　$\Pr\{S_N > t\} = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N=k, S_k > t\}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_t^{\infty} \Pr\{N=k \mid S_k = y\} e^{-\Lambda(y)} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) dy$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \Pr\{N>k, N(t)=k\} = e^{-\Lambda(t)} + e^{-\Lambda(t)} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \Pr\{N>k \mid S_k = y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) dy = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\Lambda(t)} .$$

Proof: 才1番目, 才2番目の等号は明らか。才3番目の等号は $S_k > t \Leftrightarrow N(t) < k$ に注意すれば明らか。才4番目の等号は, $k \geq 1$ の時

$$\Pr\{N>k, N(t)=k\} = \Pr\{N>k, S_k \leq t < S_{k+1}\}$$
$$= \int_0^t \int_t^{\infty} \Pr\{N>k \mid S_k = y, S_{k+1} = x\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) \lambda(x) e^{-\Lambda(x)} dx dy$$
$$= \int_0^t \Pr\{N>k \mid S_k = y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-1}}{(k-1)!} \lambda(y) e^{-\Lambda(t)} dy$$

であることから明らか。

才5番目の等号は

$$\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\} = \int_0^t \Pr\{N\geqq k \mid S_{k-1}=s,\ S_k=t\}\Pr\{S_{k-1}\in ds \mid S_k=t\}$$
$$= \int_0^t \Pr\{N\geqq k \mid S_{k-1}=s\}\Pr\{S_{k-1}\in ds \mid S_k=t\},$$
$$\Pr\{S_{k-1}\in ds \mid S_k=t\} = \frac{[\Lambda(s)]^{k-2}/(k-2)!}{[\Lambda(t)]^{k-1}/(k-1)!}\lambda(s)ds$$

であることを用いて明らか。　〈証明終〉

<u>S_N の密度関数</u>

$$\frac{d}{dt}\Pr\{S_N\leqq t\} = \sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N=k \mid S_k=t\}\,e^{-\Lambda(t)}\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(t) \ .$$

<u>Proof:</u>　$\Pr\{S_N>t\}$ を直接微分すればよい。　〈証明終〉

<u>Notations.</u>　$F_N(t)\equiv\Pr\{S_N\leqq t\}$,　$\bar{F}_N(t)\equiv 1-F_N(t)$,

$f_N(t)\equiv d\Pr\{S_N\leqq t\}/dt$,　$\lambda_N(t)\equiv f_N(t)/\bar{F}_N(t)$,

$$\lambda(k,t)\equiv\Pr\{N=k \mid N\geqq k,\ S_k=t\} = \frac{\Pr\{N=k \mid S_k=t\}}{\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}} \ .$$

<u>Theorem.</u>　$\lambda(k,t)\uparrow_{k,t}$,　$\lambda(t)\uparrow_t$,　$\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}$: TP_2 in k, t [4] $\Rightarrow$ $\lambda_N(t)\uparrow_t$.

<u>Proof:</u>　$\Delta>0$ として

$$\lambda_N(t)\leqq \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}\lambda(k,t+\Delta)\lambda(t+\Delta)\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}$$
$$\leqq \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}\lambda(k,t+\Delta)\lambda(t+\Delta)\frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t\}\frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}$$
$$\leqq \frac{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t+\Delta\}\lambda(k,t+\Delta)\lambda(t+\Delta)\frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty}\Pr\{N\geqq k \mid S_k=t+\Delta\}\frac{[\Lambda(t+\Delta)]^{k-1}}{(k-1)!}} \ .$$

第1番目の不等号は $\lambda(k,t)\uparrow_t$, $\lambda(t)\uparrow_t$ であることから，第2番目の不等号は *basic composition theorem* [4] と $\lambda(k,t)\uparrow_k$ であ

ることから，オ3番目の不等号は basic composition theorem, $\lambda(k,t)\uparrow k$, $P_r\{N\geq k \mid S_k=t\}$: TP_2 in k,t であることから成立する。　〈証明終〉

Remark.　$\lambda(k,t)\uparrow k,t$ と $P_r\{N\geq k\mid S_k=t\}$: TP_2 in k,t との間には一般には直接の関係はない。　〈Remark終〉

Tを非負実数とし，$C(T)$を次のように定める。

$$C(T)=\begin{cases} cN+a+b_1, & S_N\leqq T, \\ cN(T)+a+b_2, & S_N>T. \end{cases}$$

ここで $c\geqq 0$, $a\geqq 0$, $b_1\geqq 0$, $b_2\geqq 0$ である。

$$\mathcal{C}(T)\equiv\frac{E[C(T)]}{E[\min(S_N,T)]}$$

とし，$\mathcal{C}(T)$を最小にするTが存在するための十分条件を提示する。

Theorem.

$$\mathcal{C}(T)=\frac{a+b_1+(b_2-b_1)\bar{\bar{F}}_N(t)+c\int_0^T\lambda(x)\bar{\bar{F}}_N(x)dx}{\int_0^T\bar{\bar{F}}_N(x)dx}.$$

Proof:　$E[\min(S_N,T)]=\int_0^T\bar{\bar{F}}_N(x)dx$ は明らか。分子を考える。$E[C(T)]=E[cN+a+b_1; S_N\leqq T]+E[cN(T)+a+b_2; T<S_N]$.
$=a+b_1+(b_2-b_1)P_r\{T<S_N\}+c\{E[N; S_N\leqq T]+E[N(T); T<S_N]\}$.

$E[N; S_N\leqq T]=\sum_{k=1}^{\infty}kP_r\{N=k, S_k\leqq T\}$.

$E[N(T); T<S_N]=\sum_{k=1}^{\infty}kP_r\{N(T)=k, T<S_N\}$,

$P_r\{N(T)=k, T<S_N\}=\sum_{n=k+1}^{\infty}P_r\{N(T)=k, T<S_n, N=n\}$

$= \Pr\{S_k \leq T < S_{k+1}, N \geq k+1\} = \Pr\{S_k \leq T, N \geq k+1\} - \Pr\{S_{k+1} \leq T, N \geq k+1\}$

故 $E[N(T); T < S_N] = \sum_{k=1}^{\infty} k \Pr\{S_k \leq T, N \geq k+1\} - \sum_{k=2}^{\infty} (k-1) \Pr\{S_k \leq T, N \geq k\}$。 以上から

$$E[N; S_N \leq T] + E[N(T); T < S_N] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{S_k \leq T, N \geq k\}.$$

$k \geq 2$ の時

$$\Pr\{S_k \leq T, N \geq k\} = \int_0^T \int_0^x \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = y, S_k = x\} \Pr\{S_{k-1} \in dy, S_k \in dx\}$$
$$= \int_0^T \int_0^x \Pr\{N \geq k \mid S_{k-1} = y\} \frac{[\Lambda(y)]^{k-2}}{(k-2)!} \lambda(y) \lambda(x) e^{-\Lambda(x)} dy\, dx.$$

従って

$$E[N; S_N \leq T] + E[N(T); T < S_N] = \int_0^T \lambda(x) \bar{\bar{F}}_N(x) dx. \quad \text{〈証明終〉}$$

簡単な計算により

$$dC_1(T)/dT \text{ の分子} = \bar{\bar{F}}_N(T) \{\tilde{\lambda}(T) \int_0^T \bar{\bar{F}}_N(x) dx - \int_0^T \tilde{\lambda}(x) \bar{\bar{F}}_N(x) dx - (a + b_2)\},$$

$\tilde{\lambda}(t) \equiv c\lambda(t) - (b_2 - b_1)\lambda_N(t)$ 。

<u>Lemma.</u> ① $b_1 \geq b_2$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \uparrow k, t$, $\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}$: TP_2 in k, t $\Rightarrow \tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ 。

② $b_2 \geq b_1$, $c \geq b_2 - b_1$, $\lambda(t) \uparrow t$, $\lambda(k,t) \downarrow k, t$, $\Pr\{N \geq k \mid S_k = t\}$: TP_2 in k, t $\Rightarrow \tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ 。

<u>Proof:</u> ① 条件下で $\lambda_N(t) \uparrow t$ はすでに示されているから $\tilde{\lambda}(t) \uparrow t$ は明らか。

② $$\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t) \left\{ c - (b_2 - b_1) \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \lambda(k,t) \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty} \Pr\{N \geq k \mid S_k = t\} \frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}} \right\}.$$

条件から $\{\}$ 内分数式は t に関して減少故

$$\tilde{\lambda}(t)=(c-b_2+b_1)\lambda(t)+(b_2-b_1)\lambda(t)\left\{1-\frac{\sum_{k=1}^{\infty}P_r\{N\geq k\mid S_k=t\}\lambda(k,t)\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}{\sum_{k=1}^{\infty}P_r\{N\geq k\mid S_k=t\}\frac{[\Lambda(t)]^{k-1}}{(k-1)!}}\right\}$$

は t に関して増加である。　　〈証明終〉

$$h(t)\equiv\tilde{\lambda}(T)\int_0^T\bar{F}_N(x)dx-\int_0^T\tilde{\lambda}(x)\bar{F}_N(x)dx\ 。$$

<u>Theorem.</u>　Lemma①又は②それぞれの条件下で，$h(T)\uparrow_T$ であり，さらに $h(T)$ が連続で $\lim_{T\to\infty}h(T)>a+b_2$ であれば，$h(T)=a+b_2$ を満たす T が存在し，この T が $C(T)$ を最小にする T である。$\{T\mid h(T)=a+b_2\}$ は連結集合である。

<u>Proof:</u>　後半は明らかである。前半は次の通り。$\tilde{\lambda}(T)\uparrow_T$ であるから，$\Delta>0$ として

$$\begin{aligned}h(T+\Delta)-h(T)&=\{\tilde{\lambda}(T+\Delta)-\tilde{\lambda}(T)\}\int_0^{T+\Delta}\bar{F}_N(x)dx+\tilde{\lambda}(T)\int_T^{T+\Delta}\bar{F}_N(x)dx\\&\quad+\int_0^T\{\tilde{\lambda}(T)-\tilde{\lambda}(x)\}\bar{F}_N(x)dx\\&\geq 0\ 。\end{aligned}$$

〈証明終〉

<u>References</u>

[1] Barlow, R.E. and L.C. Hunter (1960) Optimal Preventive Maintenance Policies, Operations Research **8**, 90-110.

[2] Brown, M. and F. Proschan (1983) Imperfect Repair, J. Appl. Prob. **20**, 851-859.

[3] Block, H.W., W.S. Borges and T.H. Savits (1985) Age-dependent Minimal Repair, J. Appl. Prob. **22**, 370-385.

[4] Karlin, S. (1968) Total Positivity, Vol.1. Stanford,

Calif. : Stanford University Press.

[5] Nummelin, E. (1980) A General Failure Model : Optimal Replacement with State Dependent Replacement and Failure Costs, Math. OR **5**, 381-387.

[6] Pitman, J. W. and T. P. Speed (1973) A Note on Random Times, Stochastic Processes and their Applications **1**, 369-374。

[7] 小和田正 (1983) 確率過程とその応用, 実教出版株式会社.