

ファジィ組合せ最適化

龍谷大学経営学部 多田 実 (Minoru Tada)

大阪大学工学部 石井 博昭 (Hiroaki Ishii)

大阪大学工学部 西田 俊夫 (Toshio Nishida)

1. はじめに

1965年に Z a d e h によって提唱されたファジィ理論は様々な分野, 例えば, 人工知能, エキスパートシステム, 列車制御などに応用されているが, OR の組合せ最適化問題にもファジィ集合の帰属度関数を導入することによって, より柔軟性のあるモデルを定式化することができる.

'ファジィ' (fuzzy) とはもともと境界が不明瞭 (あいまい) であることを表す言葉であるが, ファジィ集合は以下のように定義される.

<定義> 全体集合 U におけるファジィ集合 A とは,

$$\mu_A : U \rightarrow [0, 1]$$

となる帰属度関数 (membership function) μ_A によって特性づけられた集合で,

$\mu_A(u)$ ($u \in U$) の値を A における要素 u の帰属度 (所属度) という.

今回, 我々はスケジューリング問題とネットワーク・フロー問題に帰属度関数を用いてファジィ化する場合の定式化の例とその解法を与える.

2. ファジィ・スケジューリング問題

スケジューリング問題では以下の2種類のファジィ化が考えられる。

<2-1 ファジィ処理時間>

スケジューリング問題（順序づけ問題）では、何らかの‘仕事’が‘機械’で処理されるのだが、ここでいう機械（machine, processor）とは、処理する装置、あるいは仕事をする人間のことで、機械で処理される対象のことを仕事（job）と呼ぶ。通常、各仕事の機械ごとにおける処理時間は‘決まった値’（rigid）だが、ある状況（例えば機械の調子や仕事をする人間の体調など）を考慮すれば、処理時間を固定した値にしない方が（即ち、ファジィ処理時間）むしろ自然かもしれない。

図1はファジィ処理時間を表す帰属度関数の例である。この関数はその形が三角形をしていることからTFN（triangular fuzzy number）と呼ばれ、ある仕事 J の処理時間が p_J の時にその帰属度が1になることから、「仕事 J は時間 p_J で処理される可能性が最も強い」ことを示す。

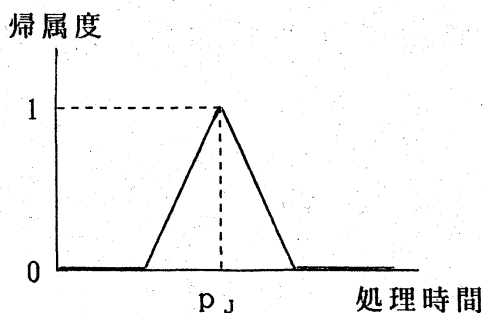


図1. ファジィ処理時間の例

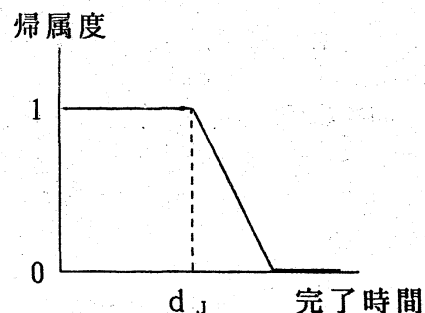


図2. ファジィ納期の例

<2-2 ファジィ納期>

通常のスケジューリング問題では、仕事の'納期' (due date) もまた決まった値だが、これも固定した値にしない方がよい場合がある。例えば、ある仕事の完了時間に対して、意思決定者が「少しの遅れならあまり好ましくないが構わない、だが、ある時期より遅いのは絶対にダメだ」と考える場合、図2のような帰属度関数を導入することによってうまく表現できる。この場合、帰属度は仕事の完了時間に対する意思決定者の'満足度' (1なら'大満足', 0.8なら'かなり満足', 0なら'不満足') を示すものになる。

<2-3 問題の定式化とその解法>

以上2種類のファジィ化は様々なスケジューリング問題に適応できるが、ここではファジィ納期に関する問題の定式化の例 ([7] 参照) を紹介する。

” 重み付きファジィ納期—機械スケジューリング問題”

処理されるべき n 個の仕事 J_1, \dots, J_n とその処理時間 p_1, \dots, p_n が与えられ、各仕事には完了時間に対する満足度を示す帰属度関数 μ_J が以下のようにならされている。

$$\mu_J(c_J) = \begin{cases} 1 & c_J \leq d_J \\ 1 - (c_J - d_J) / e_J & d_J < c_J < d_J + e_J \\ 0 & d_J + e_J \leq c_J \end{cases} \quad (1)$$

($J=1, \dots, n$)

ここで、 c_j は J_j の完了時間を表し、 $d_j, e_j \geq 0$ である。また各仕事には重み w_j が与えられており、仕事の処理を完了すれば、そのときの満足度と重みとの積に等しい利益 g_j が得られるとする。

$$g_j = w_j \mu_j \quad (2)$$

以上が与えられたとき、各仕事ごとに得られる利益のうち最小のものをできるだけ大きくするような実行可能なスケジュールを求める問題P1を考える。

$$P1: \min_j g_j \rightarrow \max \quad (3)$$

この問題を解くために、まず $\min_j g_j = t (> 0)$ と固定する。すると全ての J に対して

$$c_j \leq e_j (1 - t/w_j) + d_j \quad (4)$$

とならなければならないので、この問題は納期が上の(4)式の右辺(これを $d_j(t)$ とおく)で与えられる一機械スケジューリング問題となり、もし実行可能なスケジュールが存在すれば、それは納期の早い仕事から順にスケジュールすればよいことが知られている(EDDルール[8])。(4)式の右辺の大小順は t の値によって変わるので

$$t_{ij} = (d_i - d_j + e_i - e_j) / (e_i/w_i - e_j/w_j) \quad (5)$$

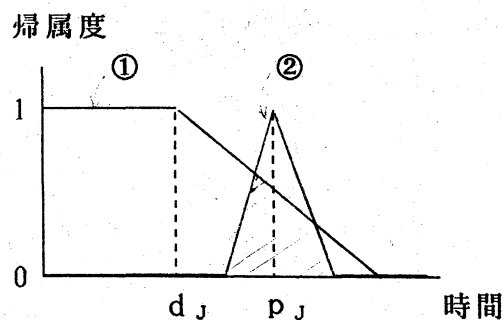
となる高々 $n(n-1)/2$ 個の異なる t_{ij} を次の(6)式のようにソートする。

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_q = \min_j w_j \quad (6)$$

そして、 $T_i = [t_{i-1}, t_i]$ ($i=1, \dots, q$) とおけば、各仕事から最低 $t_0 \in T_1$ の利益を得るための納期の大小順は固定される。よって全ての仕事を $d_j(t_0)$ の非減少順に並べた結果、全ての仕事の完了時間が納期 $D_j(t_0)$ 以下であれば $\min g_j = t_0$ となる実行可能なスケジュールが存在することになる。もし存在するなら最小利益の最大値 t^* は t_0 以上、存在しなければ t_0 未満になる。従って2部探索法を用いて t^* を求め、 t^* が決まると $D_j(t^*)$ の小さい順に並べることにより最適スケジュールは求まる。

□

上の P 1 は納期のみをファジィとしたが、処理時間をもファジィとする場合は例えば、'agreement index' (このとき各仕事は、①納期 と②処理時間 に関する2種類の帰属度関数を持つが、この2つのグラフを重ね合わせた時にできる共通(交わり)部分と処理時間に関するグラフ全体との面積比；図3参照)の最小値を最大にすることを目的とするスケジューリング問題が考えられる。詳しくは[2]を参照されたい。



$$\text{agreement index} = \frac{\text{shaded area}}{\text{area of curve ②}}$$

図3. agreement index の例

3. ファジィ・ネットワーク・フロー問題

ここでは、ネットワーク・フロー問題に関して以下の3種類のファジィ化を簡単に紹介した後、〈3-3〉に対する定式化の例とその解法を与える。

〈3-1 ファジィ容量〉

ネットワーク・フロー問題の典型的なものに最大フローを求める問題があるが、これは各アークに'容量' (capacity) の制約を持つようなネットワーク上での流量の最大値を求める問題である。ファジィ容量とは容量制約を緩める、即ち、「少しなら容量制約を破っても構わない」場合の最大流問題に用いられる容量のことで、[1]では以下の図4のような帰属度関数を提案し、ファジィ容量での最大流問題を解いている。

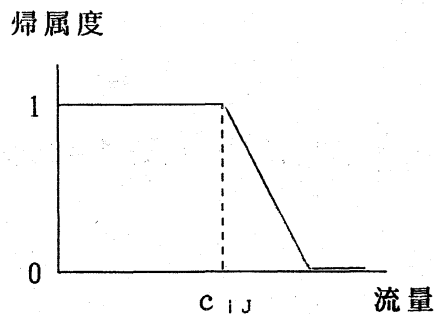


図4. ファジィ容量の例1

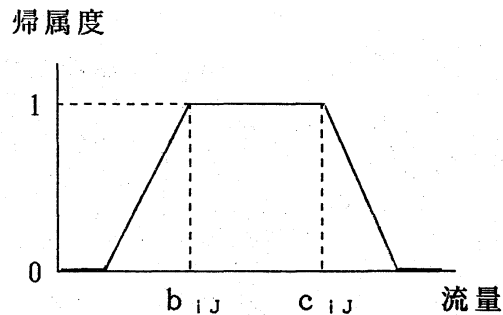


図5. ファジィ容量の例2

また「流量が少なすぎてもダメ」な場合は、図5のような帰属度関数が考えられる。これらはいずれも流量に対するその満足度を示す関数である。なお、解法に関しては[1]を参照されたい。

< 3-2 ファジィ輸送費用 >

2部グラフ上で考えられる問題に輸送問題がある。これは供給点と需要点をつなぐアークにそこを通過する流量1単位当りの輸送費用が決められていて、総輸送費用を最小にするようなフローを求める問題である。この各アークが持つ輸送費用があいまいな場合に考えられるのがファジィ輸送費用で、[4]ではその帰属度関数としてTFN(図1参照)を提案している。

前述のようにTFNは3点を決めればその形が決まる関数なので、ファジィ輸送費の順序づけ(大小関係)は比較的決めやすく、その順序づけさえできれば通常の輸送問題を解くように'飛び石法'(stepping stone method)を用いて解くことができる。

< 3-3 ファジィ供給量・需要量 >

輸送問題のファジィ版として、上のファジィ輸送費用以外に供給量や需要量があいまいなものとする場合が考えられる。

帰属度 μ_s

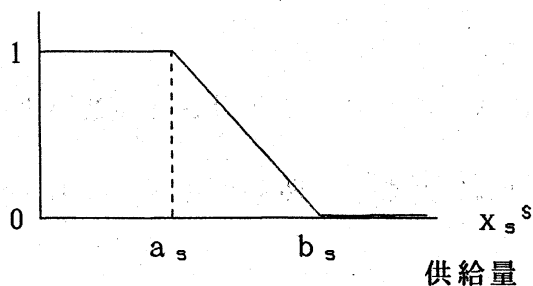


図6. ファジィ供給量の例

帰属度 μ_t

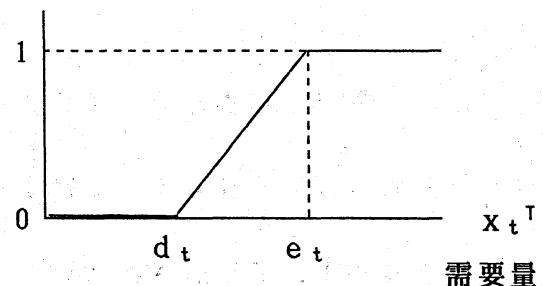


図7. ファジィ需要量の例

帰属度関数を図6, 7のような形に決めた理由は, 供給側においては a_s の生産がすでにあり a_s 以下送り出すのには "よい" (=満足度1) が, それより多く送り出すためには ($a_s < x_s^s < b_s$) 新たに生産をしなければならないので満足度は単調減少関数になる. また b_s 以上は "生産できない" (=満足度0) ことを示す. 逆に需要側では, 到着量が d_t 以下では不満足, e_t 以上は大満足, それらの中間 ($d_t < x_t^T < e_t$) では満足度は単調増加関数になる.

<3-4 問題の定式化とその解法>

ここでは<3-3>で紹介した'供給量と需要量をファジィとする輸送問題'(我々はこれをファジィ輸送問題と呼ぶ)の定式化の例とその解法を与える.

"ファジィ輸送問題"

この問題は二部グラフ上で考えられ, S を供給点, T を需要点の集合とし, $|S| = m$, $|T| = n$ とする. ある供給点 s と需要点 t を直結するアーク a_{st} ($s \in S, t \in T$) には, 流量1単位当りにかかるコスト c_{st} が与えられていて, 総輸送費用の上限値を C とする. そして, 供給点 s から送り出す流量の和と需要点 t へ到着する流量の和をそれぞれ, x_s^s, x_t^T ($s \in S, t \in T$) とし, アーク a_{st} に流れるフローの量を f_{st} とする. また, 図6, 7で示した各供給点と各需要点の流量に対する満足度を示す帰属度関数 μ_s, μ_t は次の(7), (8)式で与えられる.

$$\mu_s(x_s^s) = \begin{cases} 1 & x_s^s \leq a_s \\ F_s(x_s^s) & a_s < x_s^s < b_s \\ 0 & x_s^s \geq b_s \end{cases} \quad (7)$$

($F_s(x_s^s)$): 単調減少関数)

$$\mu_t(x_t^T) = \begin{cases} 0 & x_t^T \leq c_t \\ G_t(x_t^T) & c_t < x_t^T < d_t \\ 1 & x_t^T \geq d_t \end{cases} \quad (8)$$

($G_t(x_t^T)$): 単調増加関数)

ここで, a_s, b_s, d_t, e_t は正の整数で, $F_s(x_s^s), G_t(x_t^T)$ は簡単のため以下に示されるような線形関数とするが, 一般形でも少し複雑になるが, 次に示すアルゴリズムで同様に解ける.

$$F_s(x_s^s) = - \frac{1}{b_s - a_s} (x_s^s - b_s) \quad (9)$$

$$G_t(x_t^T) = \frac{1}{e_t - d_t} (x_t^T - e_t) + 1 \quad (10)$$

これらの記号を用いると, この問題は以下のように定式化できる.

$$\begin{aligned} P2: \quad & \min \{ \mu_s(x_s^s), \mu_t(x_t^T) \} \rightarrow \max \\ \text{s. t.} \quad & C \leq \bar{C} \quad \left(\text{ここで, } C = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n c_{st} f_{st} \quad (s \in S, t \in T) \right) \end{aligned} \quad (11)$$

この問題の目的は総費用の上限値制約のもとで、すべての満足度の中で一番低い値をもつ満足度をできるだけ高くするような流量を求めることで、言い替えれば、'すべての満足度が一致すれば最も公平な流し方'（これをperfect transportation; 略してp. t. と呼ぶことにする）を求めることになる。すべてのノードにおける流量が定まれば、それらを満たすフローの中で、最も費用のかからない流し方を飛び石法などで決定すればよい。

そして、その総費用がC以下なら、そのフローが最適な解となる。もし総費用の制約がなければ、以下の手順でp. t. が常に実現できる。

Procedure - 1:

Step 1. すべての帰属度関数をパラメータ α とおき、 x_s^s , x_t^T について解く。即ち、 $F_s(x_s^s) = \alpha$, $G_t(x_t^T) = \alpha$ とおき、 $x_s^s = F^{-1}_s(\alpha)$, $x_t^T = G^{-1}_t(\alpha)$ を計算する。

Step 2.

$$\sum_{s=1}^m F^{-1}_s(\alpha) = \sum_{t=1}^n G^{-1}_t(\alpha)$$
を計算すれば α が求められ、この α を x_s^s , x_t^T の式に代入することによってp. t. を達成する流量が求まる。

□

ところが上の手順で得た x_s^s , x_t^T で最小費用流を求めたところ、それが総費用の制約を満たさないときは流量を決めなおさなければならない。即ち、総費用の制約を満足させるには輸送量を減らす必要があり、その結果、帰属度関数の定

義より供給側では満足度は上がり需要側では満足度は下がるので、目的関数の意味から需要側の満足度を均一に保ちつつ輸送量を減少させればよい。またそのとき、需要側の満足度をできるだけ高く保ちたいので、現在のフローで使われているアークのうち、流量1単位当りにかかるコストが最大のものを各需要点ごとに捜し（これらのアークを $s(t)$ $t=1, \dots, n$, 対応するコストを $c_{s(t)}$ で表す）、これらの流量を減らす。この操作は n 本のアーク $s(t)$ のうち少なくとも1本のアークの輸送量が0となるまで繰り返され、0となれば現在の流量で最小費用流を求め、総費用の制約を満たしているか調べる。もし満たしていなければ同様の操作を繰り返し、そうでなければ以下の手順で解が求められる。

コスト制約 $C = \sum_{s=1}^m \sum_{t=1}^n c_{st} f_{st} \leq C$ が等式で成立していれば、現在の解が最適解であるが、不等式 ($<$) の場合は輸送量を減らしすぎている（言い替えれば、需要側の満足度の値を上げることができる）ので、総輸送費がちょうど C になる流量を求める。このとき最適解を求めるには、コスト制約の式を不等式で成立させている現在の解は必要なく、それより1回前に最小費用流を求めた解（これを $(f_{st}^*)'$ とする）と同じ'形'（線形計画法での'基底解の配置'と同意）をしていることに注意しなければならない。いま求めるべき解を f_{st}^* とし、また $(f_{st}^*)'$ のときの最小総輸送費を C' 、対応する満足度を α' とすれば、 $(f_{st}^*)'$ のときの各需要点への到着量は $x_t^T = G^{-1}_t(\alpha')$ で与えられ、これが f_{st}^* のときになると、対応する満足度を α^* ($< \alpha'$) とすれば各到着量は $x_t^T = G^{-1}_t(\alpha^*)$ に減少する。よって、次の(12)式を解けば α^* が求まり、

各到着量 x_t^T が決まる。

$$\sum_{t=1}^n c_{st} \{ G^{-1}_t(\alpha') - G^{-1}_t(\alpha^*) \} = C' - C \quad (12)$$

下の図8は満足度 α に対する最小費用 $C(\alpha)$ (即ち, α より満足度を下げないということを制約条件としたときの総輸送費の最小値) の様子を表す。ここで関数の傾きが変わらない部分は解の形が変わらないので, 満足度 α' (対応する解 $(f_{st}^*)'$) さえ見つけられれば (12) 式を用いて最適解 (満足度が α^* のときの解) が求められる。

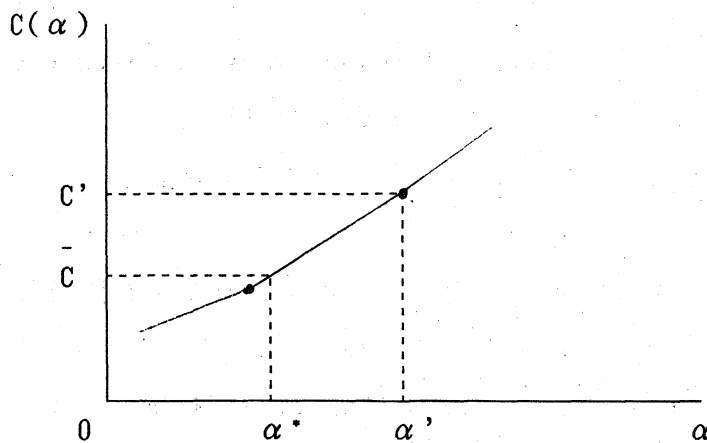


図8. α に対する最小費用

以上の議論から P2 を解くためのアルゴリズムが得られる。このとき, α' を効率よく見つけるために 2 部探索法を用いればよい ([2] 参照)。

4. おわりに

いくつかの組合せ問題をファジィ化することによって、より柔軟性のある、ある意味ではより現実的なモデルが考えられることを示した。例えば通常の輸送問題では、供給量の合計が需要量の合計より小さい場合実行可能でない。このような状況の時、ファジィ化する意味がでてくると思われる。

また、ファジィ集合の帰属度関数を満足度を表す関数として用いたネットワーク・フロー問題は他にも [5], [6] がある。今後の課題は、帰属度関数に線形の仮定を必要とする問題を非線形でも解けるように改良することである。

参 考 文 献

- [1] S.Chanas and W.Kolodziejczyk, "Integer Flows in Network with Fuzzy Capacity Constraints", NETWORKS, Vol.16 (1986) 17-31
- [2] 石井,多田,西田, "ファジィ輸送問題", 日本ファジィ学会誌,第2巻,第1号, 79-84
- [3] 石井,益田, "ファジィ処理時間をもつスケジューリング問題", 日本OR学会秋季研究発表会 77'ストラク集 (1988),74-75
- [4] A.Kaufmann and M.Gupta, "Fuzzy Mathematical Model in Engineering and Management Science", North-Holland, 1988
- [5] M.Tada, H.Ishii, T.Nishida and T.Masuda, "Fuzzy sharing problem", Fuzzy sets and systems, Vol 33, No.3 (1989) 303-313
- [6] M.Tada, H.Ishii and T.Nishida, "Fuzzy transportation problem with integral flow", MATHEMATICA JAPONICA (to appear).
- [7] M.TADA, H.ISHII and T.NISHIDA, "Weighted Fuzzy Due Date Scheduling Problem", APORS '88 proceedings (to appear).
- [8] W.E.Smith, "Various optimisers for single stage production", Nav. Res. Logist. Quart., 3 (1956), 59-66