

A multi-parametric linear program
and its dual and converse programs

久大 経済 岩本誠一 (Seiichi Iwamoto)

1. はじめに

本論文では, Bellman [1, p.47] が提示した マルチパラメトリックな N 変数 $(N-1)$ 制約 線形計画問題(主問題) およびその 双対問題, 逆転問題, 双対逆転問題 の合計 4つの 線形計画問題を考える。いずれも $(N-1)$ 個のパラメータ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1})'$ を 右辺定数ベクトル または 目的係数ベクトルとして含む問題である。

第2節では用語・定義を説明して, 4問題を導入する。第3節では4つの最適値関数の関係, 性質, 上界・下界を与え, 特にパラメータが非負単調列 a とときには, 4問題の完全解を与える。

2. 双対問題と逆転問題

以下 本論文を通じて 次の記号・定義を用いる。

N : 2以上の自然数

$$A = \begin{bmatrix} / & / & & \\ & / & / & 0 \\ & 0 & \dots & / \\ & & & / \\ & & & / \end{bmatrix} \begin{matrix} N-1 \\ \\ \\ N \end{matrix}$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-1} \end{bmatrix} \quad e = \begin{bmatrix} / \\ / \\ \vdots \\ / \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ \\ N \end{matrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \end{bmatrix}$$

(,) : 内積

A' : A の転置行列

R^n : n 次元ユークリッド空間, $R^n \ni x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$R_+^n = \{x \in R^n \mid x_i \geq 0, 1 \leq i \leq n\}$$

$$R_-^n = \{x \in R^n \mid x_i \leq 0, 1 \leq i \leq n\}$$

$$x \geq y \iff x_i \geq y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$x > y \iff x \geq y, x \neq y$$

$$x > y \iff x_i > y_i \quad 1 \leq i \leq n$$

$$a \vee b = \max(a, b) = \begin{cases} a & \{a \geq b \\ b & \{a < b \end{cases} \text{ のとき, 特 } a^+ = a \vee 0$$

$$a \wedge b = \min(a, b) = \begin{cases} a & \{a \leq b \\ b & \{a > b \end{cases} \text{ のとき, 特 } a^- = a \wedge 0$$

$$\bigvee_{i=1}^n a_i = \max_{1 \leq i \leq n} a_i \quad : \quad a_1, a_2, \dots, a_n \text{ の最大値}$$

$$\bigwedge_{i=1}^n a_i = \min_{1 \leq i \leq n} a_i \quad : \quad a_1, a_2, \dots, a_n \text{ の最小値}$$

$$\bar{\lambda} = 1 - \lambda$$

以下、次の4つの線形計画(LP)問題を考える。

$$\text{問題1} \quad f_N(a) = \min(e, x) \quad \text{s.t.} \quad Ax \geq a, \quad x \in \mathbb{R}_+^N$$

$$\text{問題2} \quad g_N(a) = \text{Max}(a, y) \quad \text{s.t.} \quad A'y \leq e, \quad y \in \mathbb{R}_+^{N-1}$$

ただし、問題1, 2においては $a \in \mathbb{R}^{N-1}$ とする。

$$\text{問題3} \quad F_N(a) = \text{Max}(e, x) \quad \text{s.t.} \quad Ax \leq a, \quad x \in \mathbb{R}_+^N$$

$$\text{問題4} \quad G_N(a) = \min(a, y) \quad \text{s.t.} \quad A'y \geq e, \quad y \in \mathbb{R}_+^{N-1}$$

ただし、問題3, 4では特に $a \in \mathbb{R}_+^{N-1}$ に制限する。

問題1は Bellman [1, p.47] が提示している。問題1と問題2の対、および問題3と問題4の対はともに線形計画における主問題と双対問題の関係にある。これを単に双対関係 dual relation という。また、問題1と問題3の対は互に“逆転”領域における最小化問題と最大化問題である。ただし、ここで逆転領域とは制約関係が

$$Ax \leq b, \quad x \in X \quad \text{と} \quad Ax \geq b, \quad x \in X$$

の関係にあるときをいう。このとき問題1と問題3は互に逆転関係 converse relation にあるという。したがって問題2と問題4の対もまた互に逆転関係にあり、一方を主問題、他方を逆転問題という。

本論文では問題1を主問題 primal problem, 問題2を

双対問題 dual problem, 問題3を逆転問題 converse problem, 問題4を双対逆転問題 primal-converse problem とよびよる。呼ぶこととする。最大化が行なわれる(問題2,3の)領域はコンパクト凸であり, 最小化される(問題1,4の)領域は非有界・閉凸集合である。

3. 最適値関数の性質と相互関係

問題1と2の対, および問題3と4の対の間には次の双対関係がある。

命題 3.1 (i) $f_N(a) = g_N(a) \quad a \in \mathbb{R}^{N-1}$

(ii) $F_N(a) = G_N(a) \quad a \in \mathbb{R}_+^{N-1}$

さて問題1の最大値関数 f_N と問題2の最小値関数 g_N の性質を考えよう。このため, まず問題1を線形不等式系で表現しておこう。

$$\begin{array}{ll}
 \min & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{N-1} + x_N \\
 \text{s.t. (1)} & x_1 + x_2 \geq a_1 \\
 & (2) \quad x_2 + x_3 \geq a_2 \\
 & \vdots \\
 & (N-1) \quad x_{N-1} + x_N \geq a_{N-1} \\
 (N) & x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N \geq 0
 \end{array}$$

問題1
(主問題)

この不等式系(1)~(N)に同値な表現として次が得られる。

補題 3.1 線形不等式系 $Ax \geq a, x \in \mathbb{R}_+^N$ は次の不等式系 (1)⁺ ~ (N)⁺ に同値である。ただし $a \in \mathbb{R}^{N-1}$ 。

$$\begin{aligned}
 (1)^+ \quad x_1 + x_2 &\geq a_1^+ \\
 (2)^+ \quad x_2 + x_3 &\geq a_2^+ \\
 \vdots &\vdots \\
 (N-1)^+ \quad x_{N-1} + x_N &\geq a_{N-1}^+ \\
 (N)^+ \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N &\geq 0.
 \end{aligned}$$

補題 3.2 (i) $f_N(a) = 0 \quad a \in \mathbb{R}_-^{N-1}$

$$f_N(a) \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} a_i^+ \quad a \in \mathbb{R}^{N-1}$$

(ii) 関数 f_N は次の意味で非減少である。

$$(ii-a) \quad a_1 \leq a_2 \Rightarrow f_N(a_1) \leq f_N(a_2)$$

$$(ii-b) \quad 0 \leq a_1 < a_2 \Rightarrow 0 \leq f_N(a_1) < f_N(a_2)$$

$$(ii-c) \quad 0 < a \Rightarrow 0 < f_N(a)$$

(iii) 関数 f_N は凸である。

補題 3.3 (i) N が偶数 n とし

$$f_N(a) \geq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \dots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-2}^+)$$

(ii) N が奇数 n とし

$$f_N(a) \geq (a_1^+ + a_3^+ + a_5^+ + \dots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-1}^+).$$

次に問題2を線形不等式系で表現し考えよう。

問題2
(双対問題)

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} \\
 \text{s.t.} \quad & (1) \quad y_1 \leq 1 \\
 & (2) \quad y_1 + y_2 \leq 1 \\
 & (3) \quad y_2 + y_3 \leq 1 \\
 & \vdots \\
 & (N-2) \quad y_{N-2} + y_{N-1} \leq 1 \\
 & (N) \quad y_{N-1} \leq 1 \\
 & (N+1) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-2}, y_{N-1} \geq 0
 \end{aligned}$$

左に $a \in \mathbb{R}^{N-1}$.

内題の最大値関数 $g_N: \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^1$ は次の上界をもつ。

補題 3.4 (i) N が偶数 n のとき

$$g_N(a) \leq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})] \\ \wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数 n のとき

$$g_N(a) \leq [a_1 + (a_2 \vee a_3) + (a_4 \vee a_5) + \cdots + (a_{N-3} \vee a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ \wedge [(a_1 \vee a_2) + (a_3 \vee a_4) + \cdots + (a_{N-2} \vee a_{N-1})].$$

したがって、命題 3.1, 補題 3.3, 補題 3.4 より, 問題 1 の最小値関数 f_N と内題 2 の最大値関数 g_N の上界・下界が得られる。

命題 3.2 (i) N が偶数 n のとき

$$\frac{1}{2} \sum_1^{N-1} a_i^+ \\ \leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\ \leq f_N(a) = g_N(a) \\ \leq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \cdots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\ \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \cdots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\ \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_1^{N-1} a_i^+ \right)$$

(ii) N が奇数 n のとき

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \sum_1^{N-1} a_i^+ \\
& \leq (a_1^+ + a_3^+ + \dots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-1}^+) \\
& \leq f_N(a) = g_N(a) \\
& \leq [a_1^+ + (a_2^+ \vee a_3^+) + (a_4^+ \vee a_5^+) + \dots + (a_{N-3}^+ \vee a_{N-2}^+) + a_{N-1}^+] \\
& \quad \wedge [(a_1^+ \vee a_2^+) + (a_3^+ \vee a_4^+) + \dots + (a_{N-2}^+ \vee a_{N-1}^+)] \\
& \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_1^{N-1} a_i^+ \right).
\end{aligned}$$

系 3.1 ([1, p.47]) 数列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ一つ a_{i_0} が正ならば

$$f_N(a) = g_N(a) = \bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0}.$$

このとき, $\hat{x}_{i_0} = a_{i_0}$, $\hat{x}_i = 0$ ($i \neq i_0$) が問題1の最小点であり, $y_{i_0}^* = 1$, $y_i^* = 0$ ($i \neq i_0$) が問題2の最大点である。

系 3.2

$$\frac{1}{2} \sum_1^{N-1} a_i^+ \leq f_N(a) = g_N(a) \leq \frac{N}{2} \left(\bigvee_1^{N-1} a_i^+ \right).$$

次に問題3と問題4の最適値関数を与えよう。まず問題3を線形不等式系で表現しておく。

$$\begin{array}{ll}
\text{Max} & x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_{N-1} + x_N \\
\text{s.t.} & (1) \quad x_1 + x_2 \leq a_1 \\
& (2) \quad \quad \quad x_2 + x_3 \leq a_2 \\
& \quad \quad \quad \vdots \\
& (N-1) \quad \quad \quad \quad \quad x_{N-1} + x_N \leq a_{N-1} \\
& (N) \quad x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N \geq 0
\end{array}$$

問題3
(逆転問題)

ただし $a \in R_+^{N-1}$.

問題3の最大値関数 $F_N: R_+^{N-1} \rightarrow R_+^1$ には次の性質がある。

補題 3.5 (i) $0 \leq F_N(a) \leq \frac{1}{2} (a_1 + \sum_{i=1}^{N-1} a_i + a_{N-1})$

(ii) 関数 F_N は次の意味で非減少である。

(ii-a) $a_1 \leq a_2 \Rightarrow F_N(a_1) \leq F_N(a_2)$

(ii-b) $a_1 < a_2 \Rightarrow F_N(a_1) < F_N(a_2)$

(ii-c) $0 < a \Rightarrow 0 < F_N(a)$

(iii) 関数 F_N は凹である。

補題 3.6 (i) N が偶数のとき

$$F_N(a) \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1})$$

(ii) N が奇数のとき

$$F_N(a) \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1}).$$

次に問題4を線形不等式で表現して考えよう。

$$\begin{array}{ll} \text{Max} & a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 + \dots + a_{N-2} y_{N-2} + a_{N-1} y_{N-1} \\ \text{s.t.} & (1) \quad y_1 \geq 1 \\ \text{問題4} & (2) \quad y_1 + y_2 \geq 1 \\ \text{(双対逐転問題)} & (3) \quad y_2 + y_3 \geq 1 \\ & \vdots \\ & (N-1) \quad y_{N-2} + y_{N-1} \geq 1 \\ & (N) \quad y_{N-1} \geq 1 \\ & (N+1) \quad y_1, y_2, y_3, \dots, y_{N-2}, y_{N-1} \geq 0 \end{array}$$

ただし $a \in R_+^{N-1}$.

この不等式系 (1)~(N+1) から

$$y_{N-2} + y_{N-1} \geq 1, \quad y_{N-1} \geq 0, \quad y_1 + y_2 \geq 1, \quad y_1 \geq 0$$

を削除しても同値である。問題4の最大値関数 $G_N: \mathbb{R}_+^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}_+$ の1つの下界を求めよう。

補題 3.7 (i) N が偶数のとき

$$G_N(a) \geq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}]$$

(ii) N が奇数のとき

$$G_N(a) \geq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})].$$

命題 3.1, 補題 3.6, 補題 3.7 より, 問題 3 の最大値関数 F_N と問題 4 の最小値関数 G_N の上界・下界が得られる。

命題 3.3 (i) N が偶数のとき

$$\frac{N}{2} \left(\bigwedge_1^{N-1} a_i \right) \\ \leq [a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \cdots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1})] \\ \vee [(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \cdots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1}] \\ \leq G_N(a) = F_N(a) \\ \leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\ \leq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2} (a_2 + a_3 + \cdots + a_{N-2}) \\ = \frac{1}{2} (a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1}).$$

(ii) N が奇数のとき

$$\begin{aligned}
 & \frac{N}{2} \left(\bigwedge_1^{N-1} a_i \right) \\
 & \leq \left[a_1 + (a_2 \wedge a_3) + (a_4 \wedge a_5) + \dots + (a_{N-3} \wedge a_{N-2}) + a_{N-1} \right] \\
 & \quad \vee \left[(a_1 \wedge a_2) + (a_3 \wedge a_4) + \dots + (a_{N-2} \wedge a_{N-1}) \right] \\
 & \leq G_N(a) = F_N(a) \\
 & \leq (a_1 + a_3 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1}) \\
 & \leq (a_1 + a_{N-1}) + \frac{1}{2} (a_2 + a_3 + \dots + a_{N-2}) \\
 & = \frac{1}{2} \left(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1} \right).
 \end{aligned}$$

系 3.3 列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ のうちただ一つ a_{i_0} が正で他がすべて 0

ならば,

$$F_N(a) = G_N(a) = \begin{cases} \bigvee_1^{N-1} a_i = a_{i_0} & i_0 = 1 \text{ 或 } N-1 \text{ のとき} \\ 0 & \text{その他 } (1 < i_0 < N-1) \text{ のとき} \end{cases}$$

このとき

$$x^* = \begin{cases} (a_1, 0, \dots, 0) \text{ 或 } (0, \dots, 0, a_{N-1}) \\ (0, 0, \dots, 0) \end{cases}$$

が問題 3 の最大点であり, 実行可能な

$$\hat{y} = \begin{cases} (1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) \text{ 或 } (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{N-2}, 1) \\ (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{i_0-1}, 0, \hat{y}_{i_0+1}, \dots, \hat{y}_{N-1}) \end{cases}$$

が問題 4 の最小点である。

系 3.4

$$\frac{N}{2} \left(\bigwedge_1^{N-1} a_i \right) \leq F_N(a) = G_N(a) \leq \frac{1}{2} \left(a_1 + \sum_1^{N-1} a_i + a_{N-1} \right).$$

命題 3.2 と 命題 3.3 より, 次の逆転関係が得られる。

命題 3.4 $a \in R_+^{N-1}$ としておく。

(i) N が偶数のとき

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \\ &\leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \\ &\leq f_N(a) = g_N(a) \end{aligned}$$

(ii) N が奇数のとき, 特に $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ からは,

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq (a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}) \wedge (a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}) \\ &\leq (a_1^+ + a_3^+ + \cdots + a_{N-2}^+) \vee (a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-1}^+) \\ &\leq f_N(a) = g_N(a). \end{aligned}$$

注意 1 (i) N を偶数とする。

$$a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} < a_1 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1}$$

のとき,

$$\begin{aligned} G_N(a) &= F_N(a) \\ &\leq a_1 + a_3 + \cdots + a_{N-1} \\ &< a_2^+ + a_4^+ + \cdots + a_{N-2}^+ \\ &\leq f_N(a) = g_N(a). \end{aligned}$$

(ii) N を奇数とする。

$$(ii-a) \quad a_1 = 0, \quad a_3 + a_5 + \cdots + a_{N-2} + a_{N-1} < a_2 + a_4 + \cdots + a_{N-1}$$

のとき

$$G_N(a) = F_N(a)$$

$$\begin{aligned}
&\leq a_1 + a_3 + \dots + a_{N-2} + a_{N-1} \\
&< a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} \\
&= a_2^+ + a_4^+ + \dots + a_{N-1}^+ \\
&\leq f_N(a) = g_N(a)
\end{aligned}$$

$$(ii-b) \quad a_{N-1} = 0, \quad a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-3} < a_1 + a_3 + \dots + a_{N-2}$$

αとき

$$G_N(a) = F_N(a)$$

$$\begin{aligned}
&\leq a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} \\
&< a_1^+ + a_3^+ + \dots + a_{N-2}^+ \\
&\leq f_N(a) = g_N(a).
\end{aligned}$$

したがって、以上3つのαの場合には、逆転問題の最適値は主問題の最適値より小さい。

注意2 $N=3$, $a_1 \geq a_2 > 0$ とする。 αとき

$$\begin{aligned}
f_3(a) &= \min x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \geq a_1 \\
&x_2 + x_3 \geq a_2 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

より

$$(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0, a_1, 0) \quad \alpha \text{ とき}, \quad f_3(a) = a_1.$$

他方

$$\begin{aligned}
F_3(a) &= \text{Max} x_1 + x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad &x_1 + x_2 \leq a_1 \\
&x_2 + x_3 \leq a_2 \\
&x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{aligned}$$

だから、

$$(\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \hat{x}_3^*) = (a_1, 0, a_2) \text{ のとき, } F_3(a) = a_1 + a_2.$$

したがって

$$F_3(a) = a_1 + a_2 > a_1 = f_3(a).$$

となり, 命題 3.4 (ii) には条件「 $a_1 = 0$ または $a_{N-1} = 0$ 」は欠かせないことがわかる。この例では, 逆転問題の最大値は主問題の最小値より大きくなっている。

命題 3.2, 3.3 で与えた最適値関数 f_N, g_N, F_N, G_N に対する上界・下界は, 非負単調列 $\{a_i\}_1^{N-1}$ を考えると, 可成り厳密であることがわかる。

系 3.5 パラメータ $a = (a_1, a_2, \dots, a_{N-1})'$ が非負単調非減少列

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{N-1}$$

のとき, 問題 1 ~ 問題 4 は共通の最適値と以下の最適点をもつ。

(i) N が偶数のとき, 4 問題は共通の最適値

$$(i-a) \quad f_N(a) = g_N(a) = F_N(a) = G_N(a) = a_1 + a_3 + \dots + a_{N-1}$$

と次の最適点をもつ。

$$(i-b-1) \quad (\hat{x}_1^*, \hat{x}_2^*, \dots, \hat{x}_N^*) = (a_1, 0, a_3, 0, a_5, 0, \dots, a_{N-1}, 0)$$

は問題 1 の最小点である。

$$(i-b-2) \quad (y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$$

は問題 2 の最大点である。

$$(i-b-3) \quad (x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) = (0, a_1, 0, a_3, 0, a_5, \dots, 0, a_{N-1})$$

は問題 3 の最大点である。

(i-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

(ii) N が奇数 a とき, 4内題は以下の最適解をもつ。

$$(ii-a) \quad \begin{aligned} f_N(a) = g_N(a) &= a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} \\ &\leq a_1 + a_2 + a_4 + \dots + a_{N-1} = F_N(a) = G_N(a) \end{aligned}$$

(ii-b-1) $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_N) = (0, a_2, 0, a_4, 0, a_6, \dots, a_{N-1}, 0)$ は問題1の最小点である。

(ii-b-2) $(y_1^*, y_2^*, \dots, y_{N-1}^*) = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1)$ は問題2の最大点である。

(ii-b-3) $(x_1^*, x_2^*, \dots, x_N^*) = (a_1, 0, a_2, 0, a_4, 0, \dots, 0, a_{N-1})$ は問題3の最大点である。

(ii-b-4) $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \dots, \hat{y}_{N-1}) = (1, 1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ は問題4の最小点である。

参考文献

[1] R. Bellman, Dynamic Programming, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[2] 岩本誠一, 「動的計画論」, 九州大学出版会, 1987年.