

ガウス和の一般化とその応用

京大教養 齋藤 裕 (Hiroshi Saito)

ガウス和の一般化はいろいろなされているが、ここでは二次指標に対するガウス和の一つの一般化を定義し、そのジークル保型形式、及び対称行列のなすベクトル空間に付随する関数への応用を与える。詳細は[8]を御参照下さい。

§1. ガウス和

p を 3 以上の素数を表し、 F を標数 p の素体を表す。§1 の結果は、 F が有限体の場合にも同様に成立するが、応用は素体の場合だけであり、簡単のためこのようにする。 Λ_n を F 係数の n 次対称行列全体を表し、 Λ_{nr} を、 Λ_n の元で階数 r のもの全体のなす部分集合を表す。また $e_p(x) = \exp(2\pi i x/p)$ と置く。 F^\times の指標 χ に対して

$$W_n^n(N, \chi) = \sum_{S \in \Lambda_n} \chi(\det S) e_p(\text{tr}(NS)), \quad N \in \Lambda_n$$

と定義する。これは、概均質ベクトル空間に付随するガウス

和の特別の場合であり、Th. 1 (1) におけるように、既に村上
順氏 [2] により具体的に計算されている。 χ_0 で F の単位指
標を、 χ_p で位数 2 の指標を表す。 $S \in \Lambda_{nr}$ に対し

$$S = {}^t g \begin{pmatrix} S_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} g, \quad S_0 \in \Lambda_{nr}$$

となる $g \in GL_n(F)$ をとり、 $\chi = \chi_0$ または χ_p に対し、

$$\chi(S) = \chi(\det S_0)$$

と定義すれば、これは g のとり方によらずに定まる。 $r=0$
のときは、 $\chi(S) = 1$ と定める。 $\chi = \chi_0, \chi_p$ に対し、

$$W_r^n(N, \chi) = \sum_{S \in \Lambda_{nr}} \chi(S) \varepsilon_p(\text{tr}(NS)), \quad N \in \Lambda_n$$

と定義する。

$a, b \in \mathbb{C}$ に対し

$$(a, b)_m = \begin{cases} \prod_{i=1}^m (1 - ab^{i-1}) & m \geq 1 \\ 1 & m = 0 \end{cases}$$

と置くと、 $W_r^n(N, \chi)$ は次のように具体的に与えられる。

定理 1. $N \in \Lambda_{nt}$ とする。

(1) (Murakami) $\chi^2 \neq 1$ とすると

$$W_n^n(N, \lambda) = \begin{cases} \lambda_p^{n-1}(N) \bar{\chi}(N) G(\lambda_p)^{n(n-1)/2} G(\lambda)^{[(n+1)/2]} \\ \quad \times G(\lambda \lambda_p)^{[n/2]} \quad , \quad t = n \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

$\therefore \tau \quad G(\lambda) \quad (\lambda \in \hat{F}^*)$ は普通 α ガウス和 $\sum_{n=1}^{p-1} \chi(n) \varepsilon_p(n)$ を表す。また $\bar{\chi}(N) = \bar{\chi}(\det N)$ 。

(2) $\lambda = \lambda_p$ とする。

(a) n が奇数のとき

$$W_n^n(N, \lambda_p) = \begin{cases} (-1)^{(n-2m-1)} \lambda_p (-1)^m \lambda_p(N) p^{(n^2+(2m+1)^2)/4} \\ \quad \times (p^{-1}, p^{-2})_m G(\lambda_p) \quad \text{if } n-t=2m \\ 0 \quad \text{otherwise} \end{cases}$$

(b) n が偶数のとき

$$W_n^n(N, \lambda_p) = (-1)^{(n-2m)/2} \lambda_p (-1)^{n/2} p^{(n^2+(2m)^2)/4} \\ \times (p^{-1}, p^{-2})_m$$

$\therefore \tau \quad m$ は $n-t=2m$ 又は $2m-1$ を満たす自然数。

(3) $\lambda = \lambda_0$ とする。

(a) n が奇数のとき

$$W_n^n(N, \lambda_0) = (-1)^{(n-2m+1)/2} p^{(n^2+(2m+1)^2-1)/4} \\ \times (p^{-1}, p^{-2})_m$$

m は (2) (b) と同じ。

(b) n が偶数のとき

$$W_n^n(N, \chi_c) = \begin{cases} (-1)^{(n-2m)/2} \chi_p (-1)^{(n-2m)/2} \chi_p(N) \\ \times p^{(n^2 + (2m+1)^2 - 1)/4} (p^{-1}, p^{-2})_m \text{ if } n-t \\ = 2m \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

証明は、[2]の方針に従って

$$W_n^n(N, \chi) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma^2=1} W_n^n(N, \chi, \sigma),$$

$$W_n^n(N, \chi, \sigma) = \sum_{S \in \Lambda_n \cap {}^t B \omega_\sigma B} \chi(S) e_p(\text{tr}(NS)),$$

と分解して計算する。ここで、 σ は位数2の n 文字の置換全体を動かす、 ω_σ は σ に対応する置換行列、 B は $GL_n(F)$ の上三角行列の全体 \wedge 同群を表す。 $t=n$ の時は $\sigma=1$ を除いて $W_n^n(N, \chi, \sigma) = 0$ となるが、 $t < n$ の時はそれ以外に t 零にならない t の数があつて計算が長くなる。

以下 $\chi = \chi_c, \chi_p$ の場合のみ考える。 $W_r^n(N, \chi)$ の N に依存する仕方では、 $r=n$ のときは定理1でわかるが、次は容易に示される。

補題2. $\chi = \chi_c$ 又は χ_p とする。

(1) $g \in GL_n(F)$ に對して

$$W_r^n({}^t g N g, \chi) = W_r^n(N, \chi)$$

が成り立つ。

(2) $a \in F^\times$ に対し

$$W_r^n(aN, \chi_p) = \chi_p(a)^r W_r^n(N, \chi_p)$$

$$W_r^n(aN, \chi_0) = W_r^n(N, \chi_0)$$

が成り立つ。

系 3. $N \in \Lambda_{nt}$ とする。

(1) r が奇数, t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_p) \chi_p(N)$ は N に依存しない。

(2) r が奇数, t が偶数ならば, $W_r^n(N, \chi_p) = 0$ 。

(3) r が偶数, t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_p)$ は N に依存しない。

(4) t が奇数ならば, $W_r^n(N, \chi_0)$ は N に依存しない。

r が偶数で, t が偶数の時にも, $W_r^n(N, \chi_p)$ は N に依存しないことが証明できる。

系 3 (1) に注意して, $1 \leq 2u-1, 2v-1 \leq n$ を満たす自然数 u, v と $N \in \Lambda_{n, 2v-1}$ に対し

$$W_0^n(u, v) = W_{2u-1}^n(N, \chi_p) \chi_p(N)$$

と置けば、これは N の取り方によらないことがわかる。これを用いて行列値 α が λ の和 $W_0^n(\lambda_p)$ を次で定義する。

定義 4.

$$W_0^n(\lambda_p) = (W_0^n(u, v))$$

ここで、 $W_0^n(\lambda_p)$ は (u, v) 成分が $W_0^n(u, v)$ の $[\frac{n+1}{2}]$ 次の正方行列。

例 5. $n=3, 5$ の時 $W_0^n(\lambda_p)$ は次のように与えられる。

$$W_0^3(\lambda_p) = \begin{pmatrix} p^2 & \lambda_p(-1)p \\ \lambda_p(-1)p^4(1-p^{-1}) & -p^2 \end{pmatrix} G(\lambda_p)$$

$$W_0^5(\lambda_p) = \begin{pmatrix} p^4 & \lambda_p(-1)p^3 & p^2 \\ \lambda_p(-1)p^{10}(1+p^{-2})(1-p^{-3}) & p^7 - p^6(1+p^{-2}) & -\lambda_p(-1)p^5(1+p^2) \\ p^{12}(1-p^{-1})(1-p^{-3}) & -\lambda_p(-1)p^8(1-p^{-1}) & p^6 \end{pmatrix}$$

$$\times G(\lambda_p)$$

$W_0^1(\lambda_p)^2 = G(\lambda_p)^2 = \lambda_p(-1)p$ の類似として、次の定理を証明できる。

明である。

定理6.

$$W_0^n(\lambda_p)^2 = \lambda_p(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} E_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$$

ここで $E_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}$ は次数 $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$ の単位行列を表す。特に行列 $W_0^n(\lambda_p)$ は正則である。

$W_r^n(N, \lambda_0)$ の場合を取り扱うために、いくつかの命題を示す。

補題7. $\lambda = \lambda_0$ 又は λ_p とする。 $M_{rn}^* \in$

$$M_{rn}^* = \{ Y \in M_{rn}(\mathbb{F}) \mid \text{rank } Y = r \}$$

と定義すると、次の式が成り立つ。

$$W_r^n(N, \lambda) = \sum_{Y \in GL_r(\mathbb{F}) \setminus M_{rn}^*} W_r^r(YN^tY, \lambda)$$

この補題により $W_r^n(N, \lambda)$ の計算は、定理1に帰着される。定理1から次の命題がわかる。

命題8. n は奇数とし、 $M \in A_n$, $N \in A_{n-1} \oplus -1$ かつ $\lambda_p(M) = \lambda_p(N)$ を満たすとすると

$$W_n^n(M, \lambda_p) = G(\lambda_p)^n W_{n-1}^{n-1}(N, \lambda_0).$$

補題7と命題8を用いて次の命題が示される。

命題9. r を奇数とする。 $M \in \Lambda_n$, $N \in \Lambda_{n-1+t-1}$ が $\lambda_p(M) = \lambda_p(N)$ を充てんとすると

$$W_r^n(M, \lambda_p) = G(\lambda_p)^r (W_r^{n-1}(N, \lambda_0) + W_{r-1}^{n-1}(N, \lambda_0)).$$

系10. $N \in \Lambda_n$ とする。 r と t が共に奇数ならば $W_r^n(N, \lambda_0) + W_{r-1}^n(N, \lambda_0) = 0$ 。 t が偶数で、 r が奇数ならば、 $(W_r^n(N, \lambda_0) + W_{r-1}^n(N, \lambda_0)) \lambda_p(N)$ は、 N に依存しない。

$0 \leq 2u, 2v \leq n$ なる自然数 u, v と $N \in \Lambda_{n+2v}$ に対して

$$W_e^n(u, v) = \begin{cases} W_{2u}^n(N, \lambda_0) \lambda_p(N) & n = 2v \\ (W_{2u+1}^n(N, \lambda_0) + W_{2u}^n(N, \lambda_0)) \lambda_p(N) & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{W}_e^n(u, v) = G(\lambda_p)^{2u+1} W_e^n(u, v)$$

で $W_e^n(u, v)$, $\tilde{W}_e^n(u, v)$ を定義すれば、これらは u, v に

のみ依存して決まる。

定義 11.

$$W_e^n(\lambda_p) = (W_e^n(i-1, j-1))$$

$$\tilde{W}_e^n(\lambda_p) = (\tilde{W}_e^n(i-1, j-1))$$

ここで $W_e^n(\lambda_p)$, $\tilde{W}_e^n(\lambda_p)$ は (i, j) 成分が、夫々 $W_e^n(i-1, j-1)$, $\tilde{W}_e^n(i-1, j-1)$ である $[\frac{n}{2}] + 1$ 次 α 正方行列である。

命題 8, 9 より $\tilde{W}_e^n(\lambda_p) = W_0^{n+1}(\lambda_p)$ がわかる。従って、
次の命題を得る。

命題 12.

$$\tilde{W}_e^n(\lambda_p)^2 = \lambda_p(-1) p^{(n+1)(n+2)/2} \in [\frac{n}{2}] + 1$$

特に $W_e^n(\lambda_p)$ は正則行列である。

注意 1. $p=2$ のとき t , F_2 上の α -二次形式を用いて $W_e^n(\lambda_p)$ を定義することができる。

注意 2. $W_0^3(\lambda_p)$, $W_0^5(\lambda_p)$ は次のように対角化される。

$$P^{-1} W_0^3(\lambda_p) P = \begin{pmatrix} p^{\frac{5}{2}} & 0 \\ 0 & -p^{\frac{5}{2}} \end{pmatrix} G(\lambda_p), \quad P = \begin{pmatrix} \lambda_p(-1) & \lambda_p(-1) \\ -p+p^{\frac{3}{2}} & -p-p^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}W_0^5(\lambda_p)P = \begin{pmatrix} p^7 & 0 \\ & p^7 \\ 0 & -p^7 \end{pmatrix} G(\lambda_p) P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{p^4-1}p^4 & -\lambda_{p^4-1}p & -\lambda_{p^4-1}(p^4+p) \\ -p^2 & p^5 & -p^5+p^4 \end{pmatrix}$$

一般には今の所わからない。

§2. 応用 I. (Siegel 保型形式の twisting operator)

簡単のため, p を奇素数, ν を 2 以上の自然数, χ を $(\chi) p \mid p^\nu$ を充てず $\text{mod } p^\nu$ の指標 ((χ) は χ の導手), $\chi = \chi_0$ 又は χ_p とする。

$$\Gamma_0(p^\nu) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp_n(\mathbb{Z}) \mid C \equiv 0 \pmod{p^\nu} \right\}$$

とし, $\Gamma_0(p^\nu)$ に関する指標 χ , weight k の正則な Siegel 保型形式の空間を $M_k(p^\nu, \chi)$, cusp form の空間を $S_k(p^\nu, \chi)$ で表す。 $f \in M_k(p^\nu, \chi)$ に対して

$$f | S_\chi^{(r)} = \sum_{S \in \Lambda_{nr}} \chi(S) f |_k \begin{pmatrix} E & S/p \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

と定義すると, [6] の Prop. 2.64 と同じように

命題 13. $f \in M_k(p^\nu, \chi)$ とすると, $f | S_\chi^{(r)} \in M_k(p^\nu, \chi)$ 。

$\chi = \chi_0$ 又は χ_p と, $r, 0 \leq r \leq n, l$ に対して

$$\chi^{(r)}(N) = \begin{cases} \chi(N) & \text{if } N \in \Lambda_{nr} \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると、 $f \in M_k(p, \chi)$ に対して別の twisting operator $R_\chi^{(r)}$ を

$$f | R_\chi^{(r)} = \sum_N a(N) \chi^{(r)}(N) e(\text{tr}(NZ)), \quad z \in H_n$$

で定義される。ここで $e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x)$ で $f = \sum_N a(N) e(\text{tr}(NZ))$ を f の Fourier 展開とする。 H_n は Siegel 上半空間を表す。これらの operators を係数とするベクトルを

$$S_{\chi_p}^0 = {}^t (S_{\chi_p}^{(1)}, S_{\chi_p}^{(3)}, \dots, S_{\chi_p}^{(2\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)})$$

$$S_{\chi_p}^e = \begin{cases} {}^t ((S_{\chi_p}^{(0)} + S_{\chi_p}^{(1)}), \dots, (S_{\chi_p}^{(n-2)} + S_{\chi_p}^{(n-1)}), S_{\chi_p}^{(n)}) & n \text{ 偶数} \\ {}^t ((S_{\chi_p}^{(0)} + S_{\chi_p}^{(1)}), \dots, (S_{\chi_p}^{(n-1)} + S_{\chi_p}^{(n)})) & n \text{ 奇数} \end{cases}$$

$$R_{\chi_p}^0 = {}^t (R_{\chi_p}^{(1)}, R_{\chi_p}^{(3)}, \dots, R_{\chi_p}^{(2\lfloor (n+1)/2 \rfloor - 1)})$$

$$R_{\chi_p}^e = {}^t (R_{\chi_p}^{(0)}, R_{\chi_p}^{(2)}, \dots, R_{\chi_p}^{(2\lfloor n/2 \rfloor)})$$

と定めると、§1 の結果より次の命題が得られる。

命題 14. $S_{\chi_p}^0 = W_0^n(\chi_p) R_{\chi_p}^0$
 $S_{\chi_p}^e = W_e^n(\chi_p) R_{\chi_p}^e$

系 15 $f \in M_k(p^v, \chi)$ に対して $f | R_{\chi_p}^{(r)} \in M_k(p^v, \chi)$.

f は Hecke operator との関係については、次の命題が示される。

命題 16. $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GSp_n^+(\mathbb{R}) \cap M_{2n}(\mathbb{Z})$, $c \equiv 0 \pmod{p^v}$ とし, $\mu \in M$ の multiplier とする。 $f \in M_k(p^v, \chi)$ に対して

$$\begin{aligned} f | \Gamma_0(p^v) M \Gamma_0(p^v) | R_{\chi}^{(r)} \\ = \chi(\mu)^r f | R_{\chi}^{(r)} | \Gamma_0(p^v) M \Gamma_0(p^v) \end{aligned}$$

が成り立つ。

r に対して

$$\begin{aligned} M_k^{(r)}(p^v, \chi) &= M_k(p^v, \chi) / (R_{\chi_p}^{(r)})^2 \\ &= \left\{ f \in M_k(p^v, \chi) \mid \text{rank}(N \pmod{p}) \neq r \Rightarrow a(N) = 0 \right\} \end{aligned}$$

と置くと

$$M_k(p^v, \chi) = \bigoplus_{r=0}^n M_k^{(r)}(p^v, \chi)$$

は Wecke operator に関連して $M_{\mathbb{R}}(p, \chi)$ の分解を与える。

Wecke operator の同時固有関数 f で

$$f|Rx_p^{(n)} = f$$

を満たすものは、 $n=r=1$, $p \equiv 3 \pmod{4}$ の時には、虚二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{-p})$ の量指標から得られた。一般に α のような f と特徴付けることは、興味あるように思われる (cf. [3])。

§3 応用 II (対称行列のなすベクトル空間に付随する

L 関数)

p を奇素数とし、 χ を F^\times の指標とする。 $\chi^2 \neq 1$ の場合は佐藤文広氏 [5] により取り扱われているので、 $\chi = \chi_0$ とは χ_p とする。 V で、 n 次の実係数の対称行列の全体 \mathcal{A} のなすベクトル空間を表し、 V_i で signature が $(i, n-i)$ であるものの全体 \mathcal{A} のなす V の部分集合を表す。 $G^+ = \{g \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det g > 0\}$ とすれば、 $\rho(g)\chi = \chi^t g$, $\chi \in V$ で G^+ は V に作用する。 $\Gamma = SL_n(\mathbb{Z})$ と置く。 L で、 \mathbb{Q} 係数の n 次対称行列のなすベクトル空間の格子で

$$\rho(\gamma)L = L \quad \gamma \in \Gamma, \quad L \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p = \Lambda_n(\mathbb{Z}_p)$$

を満たす α とする。 α は $\Lambda_n(\mathbb{Z}_p)$ は \mathbb{Z}_p 係数の n 次対

行行列全体を表す。 $\mu(x)$ ($x \in L$) で G_2^+/Γ_2 の測度を表す (測度の詳細については省略)。 $\therefore \Gamma G_2^+ = \{g \in G^+ \mid \rho(g)x = x\}$, $\Gamma_x = \Gamma \cap G_2^+$ 。 $n \geq 3$ の時, $\mu(x)$ は有限となること知られてゐる。 $L_i = L \cap V_i$ と置いて L 関数 ξ , $n \geq 3$ のとき

$$\xi_i(\delta, L, \chi^{(i)}) = \sum_{x \in L_i/\Gamma} \mu(x) \chi^{(i)}(x) |x|^{-\delta}$$

で定義する。 $\xi_i(\delta, L, \chi^{(i)})$ は $\operatorname{Re} \delta > \frac{n+1}{2}$ で絶対収束する行列係数の L 関数 ξ

$$\xi^0(\delta, L, \chi_p) = \left(\begin{array}{ccc} \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(1)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(1)}) \\ \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(2)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(2)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(2[(n+1)/2]-1)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(2[(n+1)/2]-1)}) \end{array} \right)$$

$$\xi^e(\delta, L, \chi_p) = \left(\begin{array}{ccc} \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(0)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(0)}) \\ \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(2)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(2)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(\delta, L, \chi_p^{(2[\frac{n}{2}]}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_p^{(2[\frac{n}{2}]}) \end{array} \right)$$

$$\xi(\delta, L, \chi_0) = \left(\begin{array}{ccc} \xi_0(\delta, L, \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}) \\ \xi_0(\delta, L, \chi_0^{(2)} + \chi_0^{(3)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_0^{(2)} + \chi_0^{(3)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(\delta, L, \chi_0^{(n-1)} + \chi_0^{(n)}) & \dots & \xi_n(\delta, L, \chi_0^{(n-1)} + \chi_0^{(n)}) \end{array} \right) \text{ if } n \text{ is odd}$$

$$\left(\begin{array}{ccc} \xi_0(\Delta, L, \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}) & \cdots & \xi_n(\Delta, L, \chi_0^{(0)} + \chi_0^{(1)}) \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_0(\Delta, L, \chi_0^{(n-2)} + \chi_0^{(n-1)}) & \cdots & \xi_n(\Delta, L, \chi_0^{(n-2)} + \chi_0^{(n-1)}) \\ \xi_0(\Delta, L, \chi_0^{(n)}) & \cdots & \xi_n(\Delta, L, \chi_0^{(n)}) \end{array} \right) \text{ if } n \text{ is even}$$

と定義すると次の定理の証明される。

定理 17. $n \geq 3$ とする。 $\xi^0(\Delta, L, \chi_p)$, $\xi^e(\Delta, L, \chi_p)$, $\xi(\Delta, L, \chi_0)$ は、全平面に有理形関数として解析接続され、関数等式

$$\xi^0\left(\frac{n+1}{2} - \Delta, L, \chi_p\right) = v(L)^{-1} \chi_p(-1) p^{-n(n+1)/2} p^{n\Delta} \gamma(\Delta) W_0^n(\chi_p) \xi^0(\Delta, L^*, \chi_p) u(\Delta)$$

$$\xi\left(\frac{n+1}{2} - \Delta, L, \chi_p\right) = v(L)^{-1} p^{-n(n+1)/2} p^{n\Delta} \gamma(\Delta) W_e^n(\chi_p) \xi^e(\Delta, L^*, \chi_p) u(\Delta)$$

を充たす。ここで L^* は L の dual lattice,

$$\gamma(\Delta) = \pi^{n(n-1)/4} (2\pi)^{n\Delta} e^{(n\Delta/4)} \prod_{i=0}^{n-1} \Gamma\left(\Delta - \frac{n-1-i}{2}\right),$$

$u(\Delta)$ は指数関数の一次結合を成分とする $n+1$ 次の方行列である。

証明は [7] に従う。 $n+1$ 列目には u であり、その極と留数を記述できる。 $n=2$ の場合も [4], [7] に従って取り扱うことができる。例えは $\chi_p(-1) = -1$ のとき

$$\zeta_2\left(\frac{s}{2}, L^*, \chi_p\right) = i^{-1} v(L) W_0^2(\chi_p) p^{2s-2} 2^{s-2} \pi^{1/2-s} \Gamma\left(s-\frac{1}{2}\right) \Gamma(s) \\ \times \sin \pi s \zeta_2(s, L, \chi_p)$$

を示せる。これは、荒川恒男氏の [1] で述べられておられることと合っている。

文献

- [1] T. Arakawa, Special values of L-functions associated with the space of quadratic forms and the representation of $Sp(2n, F_p)$ in the space of Siegel cusp forms, *Adv. Studies in Pure Math.* 15, 1989, 96-169
- [2] J. Murakami, 概均質ベクトル空間のカウス和. 第31回代数学シンポジウム報告集, 1985.
- [3] H. Saito, M. Yamauchi, Trace formula of certain Hecke operators for $T_0(g^v)$, *Nagoya Math. J.* 76, 1-33 (1979).
- [4] F. Sato, On zeta functions of ternary zero forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, 28, 585-604 (1981).
- [5] F. Sato, On functional equations of zeta distributions, *Adv. Studies in Pure Math.* 15, 1989, 465-508
- [6] G. Shimura, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten, Princeton U.P., 1971
- [7] T. Shintani, On zeta functions associated with the vector space of quadratic forms, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo* 22, 25-65 (1975).
- [8] H. Saito, A generalization of Gauss sums and its applications to Siegel modular forms and L-functions associated with the vector space of quadratic forms (preprint)