

The relation between the Eisenstein series and  
the modular forms for the Picard modular group

千葉大理

志賀 弘典

(Hitomoni Shiga)

千葉大理

芳賀 晶子

(Akiko Haga)

0. はじめに .

$x, y$  をパラメータとする複素アフィン代数曲線

$$C(x, y): w^3 = z(z-1)(z-x)(z-y)$$

は一般に種数 3 となり, それらのモジュライの空間が 2 次元  
超球 (と同型の領域)  $D = \{ \eta = {}^t[\eta_0, \eta_1, \eta_2] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \mid \text{Im} H \bar{\eta} < 0 \}$   
(ただし  $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ) を虚 2 次元体  $k = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$  の  $H$  に関する  
エタリ群  $\Gamma = \Gamma(H, \mathcal{O}_k) = \{ g \in M_3(\mathcal{O}_k) \mid {}^t g H \bar{g} = H \}$  (ただし  
 $\mathcal{O}_k$  は  $k$  の整数環) の作用でわって得られることが知られてい  
る (cf. [p]). このとき現れる  $D$  上の  $\Gamma$  (及びその部分群) に  
関する保型函数を Eisenstein 級数によ, て表示したい. この  
小論では逆に Eisenstein 級数を, 既に  $\psi$ -constant で与えられて  
いる保型形式を用いて表示する. このことから Eisenstein 級数  
の Fourier 展開が得られる. この結果がより一般の超球上の保  
型函数の表示に対する手懸りとなるよう期待している.

なおここでは重み  $3k$  ( $k \geq 2$ ) の収束する Eisenstein 級数のみ扱、だが  $k=1$  のときに何らかの方法で Eisenstein 級数を定義できるかどうか、これから先我々の議論を進める上で懸案として残されている。

1.  $\Gamma_1$  に対する Neben type modular form.

$\Gamma$  の合同部分群  $\Gamma_1 = \{g \in \Gamma \mid g \equiv \text{id} \pmod{\sqrt{3}}\}$  を考える。このとき  $\Gamma/\Gamma_1 \cong S_4$  (4次対称群) であり次が言えてくる。

### 命題 1 ([P], [T], [D-M])

$\mathbb{P}^1/\Gamma_1$  は 4つの cusp を添加してコンパクト化され、それは  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  と双正則同型である。cusp は  $\Gamma_1$  に関する軌道の代表として  $C_\infty = {}^t[0, 1, 0]$ ,  $C_0 = {}^t[1, \omega, -\omega]$ ,  $C_1 = {}^t[1, \omega, \omega^2]$ ,  $C_2 = {}^t[1, 0, 0]$  をとることができる ( $\omega = \exp(\frac{2}{3}\pi i)$ )。

$\frac{\eta_1}{\eta_0} = v$ ,  $\frac{\eta_2}{\eta_0} = u$  とおき、領域  $D \in \{(u, v) \in \mathbb{C}^2 \mid 2\text{Re } v + |u|^2 < 0\}$  と表示する。

$f(u, v) \in D$  上正則な函数とし、 $\gamma = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \in \Gamma$  に対し

$$f(u, v) \Big|_{[\gamma]}^k = (\det \gamma)^k (a + bv + cu)^{-3k} f(\gamma(u, v))$$

と定める。 $\Gamma'$  を  $\Gamma$  の部分群とし、 $\Gamma'$  の各元  $\gamma$  に対し

$$f(u, v) \Big|_{[\gamma]}^k = (\det \gamma)^k f(u, v)$$

となるとき、 $f(u, v) \in \Gamma'$  に関する 重さ  $k$  の Neben type modular form と呼ぶことにし、その全体を  $\hat{M}_k(\Gamma')$  で表わす。

### 命題 2 ([SR 2])

次数付環  $\hat{\oplus}_k M_k(\Gamma_1)$  は  $\mathbb{C}[X_1, X_2, X_3]$  と同型である。  $\mathbb{C}$ -algebra としての生成元  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  を theta constants を用いて次のように与えることができる:

$$\varphi_k(u, v) = \vartheta^3 \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} (0, \Omega(u, v)),$$

ただし,

$$\vartheta \begin{bmatrix} \vec{a} \\ \vec{r} \end{bmatrix} (0, \Omega) = \sum_{\vec{n} \in \mathbb{Z}^3} \exp \left\{ \pi i {}^t(\vec{n} + \vec{a}) \Omega (\vec{n} + \vec{a}) + 2\pi i {}^t(\vec{n} + \vec{a}) \vec{r} \right\}$$

$$\Omega(u, v) = \begin{pmatrix} (u^2 + 2\omega^2 v) / (1 - \omega) & \omega^2 u & (\omega u^2 - \omega^2 v) / (1 - \omega) \\ \omega^2 u & -\omega^2 & u \\ (\omega u^2 - \omega^2 v) / (1 - \omega) & u & (u^2 + 2v) / (\omega - \omega^2) \end{pmatrix}$$

Remark 1.  $q = \exp(2\pi i \frac{v}{F_3})$  とおくと, この表示から  $\varphi_k(u, v)$  は  $q$  に関しての中級数表示 (Fourier 展開) を持つことが分る.

Remark 2.  $[\varphi_2, \varphi_1, \varphi_0]$  により与えられる  $\Gamma_1^D$  から  $\mathbb{P}^2$  への写像  $\bar{\Phi}$  が命題 1 の同型を与えている。さらに

$P_0 = {}^t[1, 0, 0]$ ,  $P_1 = {}^t[0, 1, 0]$ ,  $P_2 = {}^t[0, 0, 1]$ ,  $P_\infty = {}^t[1, 1, 1]$  とおくと  $\bar{\Phi}(c_i) = P_i$  ( $i=0, 1, 2, \infty$ ) となっている。

## 2. Eisenstein 級数

$k$  を正の整数,  $f \in \Gamma$  の固定元として Eisenstein 級数を次のように定める:

$$G_{\Gamma, k, f}(u, v) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{f, \infty} \setminus \bar{f}\Gamma} \frac{1}{(p + qv + \pi u)^{3k}} \quad (1)$$

ただし,  $\Gamma_{1,\infty} = \{\sigma \in \Gamma_1 \mid \sigma(c_\infty) = c_\infty\}$  と

$$\gamma = \begin{pmatrix} p & q & r \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{pmatrix}$$

と与えられているものとする.

Fact 1. (1)の右辺は  $k > \frac{5}{3}$  で広義一様に絶対収束する. 従って以下  $k > 2$  とし考える.

Fact 2.  $G_{\Gamma_1, k, g}(u, v) \in \hat{M}_k(\Gamma_1)$ .

Fact 3.  $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & 1 \\ 0 & -\omega & \omega \end{pmatrix}$ ,  $g_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & \omega & \omega \\ 0 & \omega^2 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,

$g_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  とおくと  $g_j(c_\infty) = c_j$  ( $j=0, 1, 2, \infty$ ) となり,

かつ  $G_{\Gamma_1, k, g_j}(c_i) = \delta_{ij}$  ( $i, j=0, 1, 2, \infty$ ) — (2)

となる.

Fact 4.  $k \in \mathbb{Z}$  と固定すると  $G_{\Gamma_1, k, g}$  ( $g \in \Gamma$ ) たちで生成する  $\mathbb{C}$ -vector space は 4次元であり, 各  $g \in \Gamma$  に対し  $G_{\Gamma_1, k, g}(u, v)$  は  $u, v$  の  $G_{\Gamma_1, k, g_i}(u, v)$  ( $i=0, 1, 2, \infty$ ) と一致する.

3.  $G_{\Gamma_1, 2, g_i}(u, v)$  と  $\varphi_k(u, v)$  との関係.

命題 3. ([Sh2])  $\varphi_k(u, v)$  は次の Fourier 展開をもつ:

$$\varphi_k(u, v) = \left\{ \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu \in N(\nu)} \left( H_{\mu}^{(k)+}(u) + H_{\mu}^{(k)-}(u) \right) q^{\nu} \right\}^3 \quad \text{--- (3)}$$

ただし  $\mu$  は  $\mathcal{O}_K$  の元をうごき,

$$H_{\mu}^{(k)\pm} = \left( \exp \pi i \frac{\mu^2 n^2}{\sqrt{-3}} \right) \mathcal{J} \left[ \begin{matrix} \pm 1/6 \\ \pm 1/6 \end{matrix} \right] (\mu u, -\omega^2) \times \exp \left\{ \pm \frac{2}{3} \pi i k \operatorname{tr}(\mu) \right\}.$$

一方 theta-constant に関する変換公式 ( $[M], [R-F]$ ) が知られている:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \operatorname{Sp}(n, \mathbb{Z}), \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon' \\ \varepsilon'' \end{bmatrix} \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^n \text{ に対し}$$

$$\mathcal{J}[M \circ \varepsilon](0, M \circ \Omega) = K(M, \varepsilon) \sqrt{\det(C\Omega + D)} \mathcal{J}[\varepsilon](0, \Omega) \quad \text{--- (4)}$$

ただし,  $M \circ \varepsilon = \begin{pmatrix} D\varepsilon' - C\varepsilon'' + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(C^t D) \\ -B\varepsilon' + A\varepsilon'' + \frac{1}{2} \operatorname{tr}(A^t B) \end{pmatrix}$ , ( $\operatorname{tr}$  は対角線ベクトルの意)

$$M \circ \Omega = (A\Omega + B)(C\Omega + D)^{-1}$$

であり  $K(M, \varepsilon)$  は  $M$  と  $\varepsilon$  から定まる絶対値 1 の代数的数.

以下  $\mathcal{F}_k$  の  $\operatorname{cusp}$  での値を求めよう.  $\mathcal{F}_k(c_\infty) = \left\{ \mathcal{J} \left[ \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right] (0, -\omega^2) \right\}^3$  となることは表示 (3) から分る.  $\mathcal{F}_k(c_i)$  を知るには,  $\mathcal{F}_k(u, v) \Big|_{[g_i]_1}$  を計算すればよい. このときある  $M_i \in \operatorname{Sp}(3, \mathbb{Z})$  をみつけて  $\Omega(g_i(u, v)) = M_i \circ \Omega(u, v)$  とする. すると  $\mathcal{F}_k = \mathcal{J}^3[\varepsilon_k]$  とかくことにして

$$\left( K(M_i, \varepsilon_k) \sqrt{\det(C_i \Omega + D_i)} \right)^3 \mathcal{J}^3 [M_i^{-1} \circ \varepsilon_k](0, \Omega(c_\infty))$$

が  $\mathcal{F}_k$  の  $c_i$  での値となる. ただし,

$$M_i = \begin{pmatrix} A_i & B_i \\ C_i & D_i \end{pmatrix}, \quad \varepsilon_k = \begin{bmatrix} 0 & 1/6 & 0 \\ k/3 & 1/6 & k/3 \end{bmatrix}.$$

これから  $\mathcal{F}_k$  の  $\operatorname{cusp}$  での値は次のように与えられる.

	$c_\infty$	$c_0$	$c_1$	$c_2$
$\varphi_0$	$\left\{ 2\sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \begin{smallmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{smallmatrix} \right] (0, -\omega^2) \right\}^3$	0	0	$e_0 \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \begin{smallmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{smallmatrix} \right] (0, \omega/3)$
$\varphi_1$	"	0	$e_1 \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \begin{smallmatrix} -1/6 \\ -1/6 \end{smallmatrix} \right] (0, \omega/3)$	0
$\varphi_2$	"	$e_2 \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \begin{smallmatrix} 1/6 \\ -1/6 \end{smallmatrix} \right] (0, \omega/3)$	0	0

ただし,

$$e_i = \left( K(M_i, \varepsilon_{2-i}) \sqrt{\det(C_i \Omega(c_\infty) + D_i)} \right)^3.$$

命題 2 から  $G_{\Gamma, 2, g_i}(u, v)$  は  $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$  の齊次二次式であり, 一方その cusp での値は Fact 3 で分っている.  $G_{\Gamma, 2, g_\infty}(u, v)$  に対し

(1)  $c_2, c_3, c_4$  で 0,

(2)  $c_2, c_3, c_4$  を入れかえ  $c_\infty$  を不変にする  $\Gamma$  の変換  $g$  に対して不変なことが導かれるので,  $a(\varphi_0\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_0)$  の形となる. ここで両者の  $c_\infty$  での値を比較して  $a = 12^{-3} \cdot \sqrt{\frac{1}{6}} \left[ \begin{smallmatrix} 1/6 \\ 1/6 \end{smallmatrix} \right] (0, -\omega^2)$  となる. 他の場合も同様にして以下の表示を得る.

命題

$$G_{\Gamma, 2, g_\infty}(u, v) = a_\infty (\varphi_0\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_0)$$

$$G_{\Gamma, 2, g_0}(u, v) = a_0 (3\varphi_2^2 - 2\varphi_1\varphi_2 - 2\varphi_2\varphi_0 + \varphi_0\varphi_1)$$

$$G_{\Gamma, 2, g_1}(u, v) = a_1 (3\varphi_1^2 - 2\varphi_0\varphi_1 - 2\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2\varphi_0)$$

$$G_{\Gamma, 2, g_2}(u, v) = a_2 (3\varphi_0^2 - 2\varphi_2\varphi_0 - 2\varphi_0\varphi_1 + \varphi_1\varphi_2),$$

$$a_\infty = \frac{1}{24} \varphi_0(c_\infty)^{-2}, \quad a_i = \frac{1}{3} \varphi_{2-i}(c_i)^{-2}.$$

## References

- [A] Alezais, R., Sur une classe de fonctions hyperfuchsienues et sur certaines substitutions linéaires qui s'y repportent, *Ann. Sci. E. N. S.*, 3 setrie Tom 19 (1902), 261-323.
- [D-M] Deligne, P.-G. D. Mostow, Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy, *preprint*.
- [F] Feustel, J. M., Ringe automorpher Formen auf der komplexen Einheitskugel und ihre Erzeugung durch Theta-Konstanten, *Akademie der Wiss. DDR, Berlin*, 1986.
- [H] Holzapfel, R. P., *Geometry and Arithmetic around Euler partial differential equations*. Reidel, Dordrecht/Boston/Lancaster, 1986.
- [I] Igusa, J., *Theta functions*, Springer, Heidelberg, New-York, 1972.
- [M] Mumford, D., *Tata lectures on theta I*, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, 1983.
- [N] Namba, M., Equivalence problem and automorphic groups of certain compact Riemann surfaces, *Tsukuba J. Math.*, 5 (1981), 319-338.
- [P] Picard, E., Sur les fonctions de deux variables indépendentes analogues aux fonctions modulaires, *Acta Math.*, 2 (1883), 114-135.
- [P-S] Pjateckii-Sapiro, I. I., *Geometry of classical domains and automorphic functions*, Fizmatgiz, Moscow, 1961.
- [R-F] Rauch, H. E. and Farkas, H. M., *Theta functions with applications to Riemann surfaces*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1974.
- [Sh] Shiga, H., One attempt to the K3 modular function I-II, *Ann. Scuola Norm. Pisa*, Ser. IV-Vol. VI (1979), 609-635, Ser. IV-Vol. VIII (1981), 157-182.
- [Si] Siegel, C. L., *Topics in complex function theory II*, Wiley, New York (1971).
- [T] Terada, T., Fonctions hypergéométriques  $F_1$  et fonctions automorphes I-II, *J. Math. Soc. Japan*, 35 (1983), 451-475, 37 (1985), 173-185.
- [W] Wakabayashi, I., Note on Picard's modular function of two variables, *Private note*.

[Sh<sub>2</sub>] H. Shiga, On the representation of Picard modular function by  $\theta$  constants I-II, *Pub. R.I.M.S. Kyoto Univ.* vol 24 (1988), 311-360

[Sh<sub>3</sub>] H. Shiga, On the construction of algebraic numbers as special values of the Picard modular function, *preprint*