数理解析研究所講究録
第 727 巻 1990 年 69-80

$L^2(\Gamma\backslash G)$にあらわれるユニタリー表現の構成

大阪府立大学　今野泰子 (Yasuko Konno)

§0. 序

Gは連結な半単純リー群で compact factor を持たないものとし、Γはその離散部分群で $\Gamma\backslash G$が compact なものとする。このとき、Gの右正則表現 $(U_\Gamma, L^2(\Gamma\backslash G))$ は既約表現の直和に分解し、各表現の重複度は有限である。Gの unitary dual を$\hat{G}$とし、$\hat{G} \ni (U, H_U)$ に対して、UのU_Γにおける重複度を $m(U,\Gamma)$ $(0 \leqq m(U,\Gamma) < \infty)$ であらわす。$m(U,\Gamma)$ については、保型形式の次元などとも関連して、様々な方法によって研究されてきたが、具体的に $m(U,\Gamma)$ を与える一般的な結果としては、可積分な離散系列の表現に対する Langlands の式があるのみである。

次のような定性的な問題を考える。どのような $U \in \hat{G}$ が、あるΓに対して $m(U,\Gamma) \neq \{0\}$ となりうるか? 以後、このようなUを automorphic な表現と呼ぼう。離散系列の表現は automorphic であることが知られている。しかし、それ以外の表現に対しては、一般には、ほとんど知られていない。

ところで、有限次元既約 G-module F が与えられたとき、Γ の F に係数をもつ cohomology $H^*(\Gamma, F)$ の次元について、次の松嶋－村上の式が知られている。

$$(0,1)\qquad \dim H^*(\Gamma, F) = \sum_{U\in\hat{G}} m(U,\Gamma) \dim H^*(\mathfrak{g}, K; H_U^0 \otimes F)$$

ここで、$\mathfrak{g}$ は G のリー環、K は極大 compact 群，H_U^0 は H_U の K-finite な元の作る $(\mathfrak{g}, K)$－module であり、右辺の和は実は有限和となっている。この式から、$H^*(\Gamma, F)$ の非消滅は、ある U が automorphic であるかどうかに関係している。このような立場から、いくつかの G に対し、automorphic な表現の例が見つけられている。

ここでは、$SU(p,q)$ の中に埋めこまれている G に対し、Weil 表現を使って automorphic な表現を得る一つの方法を与える。それは、Borel & Wallach [1] の方法にならったものである。応用として、$Sp(r,s)$ の離散部分群の cohomology の非消滅が示される。

§1. automorphic な表現の構成.

G が $SU(p,q)$ に埋めこまれているとき、その埋めこみを通じて、G の automorphic となるべき表現を構成したい。それが arithmetic 部分群に関して automorphic となることを期待するため、埋めこみは数体上の代数群としての埋めこみとな

っている必要がある。そのための準備をしよう。

以下、$G' = SU(p,q)$ $(p \geqq q \geqq 1)$ とし、$n = p+q$ とする。G' を代数群の部分群として実現しておく。k を $\mathbb{Q}$ の総実な有限次拡大体 ($\deg k/\mathbb{Q} = d+1$) とし、$\Sigma = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_d\}$ を k の $\mathbb{R}$ の中への同型の群とする ($\sigma_0 = id.$)。$k' = k(\sqrt{-1})$, $E = (k')^n$ とおく。E 上の非退化なエルミート形式 h が与えられ、$\mathrm{sgn}\, h = (p,q)$ で、共役 ${}^{\sigma}h$ $(\sigma \neq \sigma_0)$ はすべて正値とする。このとき k 上の代数群 $\mathbb{G}'$ で、$\mathbb{G}'(k) = \{ g \in SL(n,k') \mid g \text{ は } h \text{ を保つ} \}$, $\mathbb{G}'(\mathbb{R}) = G'$, $({}^{\sigma}\mathbb{G}')(\mathbb{R}) = SU(n)$ $(\sigma \neq \sigma_0)$ であるものが定義される。今後、我々の群は次のような状況にあると仮定する。

⊛ k 上の代数群 $\mathbb{G}$ があって $G = \mathbb{G}(\mathbb{R})$ であり、しかも、k 上定義された埋めこみ $\Phi ; \mathbb{G} \hookrightarrow \mathbb{G}'$ が存在する。

例えば、$G = SU(p,q)$, $Sp(r,\mathbb{R})$, $Sp(r,s)$ などはこのような群である。Φ による G の G' への埋めこみを $\phi = \Phi|_G ; G \hookrightarrow G'$ とする。

表現の構成に、Weil 表現のテンソル積を用いる。正整数 m に対し、$Mp(m,\mathbb{R})$ を m 次 metaplectic group とし、被覆写像を $\nu ; Mp(m,\mathbb{R}) \longrightarrow Sp(m,\mathbb{R})$ とする。$Mp(m,\mathbb{R})$ を $L^2(\mathbb{R}^m)$ 上の unitary 作用素の群の中に実現することによって Weil 表現 $(W^m, L^2(\mathbb{R}^m))$ が得られる。その ℓ 次テンソル積表現を $(\overset{\ell}{\otimes} W^m, \overset{\ell}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^m))$ としよう。同型 $\overset{\ell}{\otimes} L^2(\mathbb{R}^m) \cong L^2(\mathbb{R}^{m\ell})$ に注意すれ

ば、自然な埋めこみ

$$\begin{array}{ccc} \prod^{\ell} Mp(m,\mathbb{R}) & \xhookrightarrow{\tilde{\iota}^{\ell}} & Mp(m\ell,\mathbb{R}) \\ \downarrow \nu & & \downarrow \nu \\ \prod^{\ell} Sp(m,\mathbb{R}) & \xhookrightarrow{\iota^{\ell}} & Sp(m\ell,\mathbb{R}) \end{array}$$

が得られ、$Mp(m,\mathbb{R})$ を対角として $\prod^{\ell} Mp(m,\mathbb{R})$ の部分群と考えるとき、$\otimes^{\ell} W^{m} \cong W^{m\ell} \circ \tilde{\iota}^{\ell} |_{Mp(m,\mathbb{R})}$ である。

さて、正整数 ℓ をとり固定しておく。G' は自然に $Sp(n,\mathbb{R})$ に、従って $Sp(n\ell,\mathbb{R})$ に埋めこまれ、その埋めこみは $Mp(n\ell,\mathbb{R})$ への埋めこみに持ち上げられる。従って G の埋めこみ

$$(1.1)\qquad \begin{array}{ccccc} G & \xhookrightarrow{\phi} & G' & \xhookrightarrow{\tau^{\ell}} & Sp(n\ell,\mathbb{R}) \\ & & & \searrow^{\tilde{\tau}^{\ell}} & \uparrow \nu \\ & & & & Mp(n\ell,\mathbb{R}) \end{array}$$

を得る。そこで G' のユニタリー表現 $(V^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$，$G$ のユニタリー表現 $(U^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$ を次のように定義する。

$$V^{\ell} = W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell} \quad , \quad U^{\ell} = V^{\ell} \circ \phi = W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell} \circ \phi .$$

すなわち、V^{ℓ} は G' の harmonic 表現の ℓ 次 tensor 積，U^{ℓ} は V^{ℓ} の G への制限である。Kashiwara & Vergne ([2]) によれば、V^{ℓ} は重複度有限な既約表現の直和に分解する。一方、U^{ℓ} については一般にはそのようなことは言えない。しかし、ある場合には U^{ℓ} も分解する (例えば $\ell \leqq 3$ の場合など)。いずれにせよ、U^{ℓ} の部分表現として得られる G の既約表現が存在する場合、それらが我々の automorphic な表現の候補となる。

今、(U, H_U) は $(U^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$ の既約な部分表現であるとする。U が automorphic となるための一つの十分条件を与えたい。

K'，KをそれぞれG'，Gの極大compact群で，$\psi(K)\subset K'$となるものとする。$(V^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$の$K'$-finite vectorの集合を$L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0$，$(U, H_U)$の$K$-finite vectorの集合を$H_U^0$とするとき，ともに$(\mathfrak{g}, K)$-moduleであり$L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0 \cap H_U \subset H_U^0$である。このときもしも$L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0 \cap H_U \neq \{0\}$ならば，$U$の既約性から$L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0 \cap H_U = H_U^0$となる。しかも$K' = S(U(p) \times U(q))$の場合には，$L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0$は実は$\mathbb{R}^{n\ell}$上のHermite functionによって張られる部分空間となっている。0でないこのような関数の存在があるΓに対する$L^2(\Gamma\backslash G)$へのH_Uの自明でないG-準同型の存在を保証することになり，次の定理がいえる。

<u>定理1</u>　Gは⊛をみたしているとする。$(V^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$の既約部分表現$(U, H_U)$は，$H_U \cap L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0 \neq \{0\}$ならば，automorphicである。

この定理の証明の概略は，次節で述べる。定理1において特に，$G = G'$，$\Psi = id$の場合を考えれば，勿論定理の仮定は満たされており，次の系を得る。

<u>系1</u>　$G = SU(p, q)$とする。任意の正整数ℓに対して$(V^{\ell}, L^2(\mathbb{R}^{n\ell}))$のすべての既約部分表現はautomorphicである。

注意 ①. $L^2(\mathbb{R}^{nl})^0$ は K－module となるが．もしも．その各 K－type が重複度有限ならば．U^l は既約表現の直和に分解し．各部分表現は定理の条件をみたす。

②. Enright & Parthasarathy によれば．SU(p, q) の highest weight をもつ既約ユニタリー表現は．すべてある V^l の部分表現となっている。従って．automorphic である。

§2. Γ の構成．

この節では．定理 1 の証明の概略をのべる．すなわち．U^l の既約部分表現 (U, H_U) で定理の条件をみたすものが与えられたとき．$m(U, \Gamma) \neq 0$ となる G の cocompact な離散部分群 Γ の存在を示す。Γ の構成のための準備をしよう。

まず．U^l を構成するために用いた埋めこみ (1,1) を k 上の代数群としての埋めこみに持ちこもう。G' を定義する E 上のエルミート形式 h の虚部 $\mathrm{Im}\,h$ によって．k 上の symplectic group Sp_n が定義され．自然に G' は Sp_n に埋めこまれている。更に l 個の直和をとることにより $\overset{l}{\oplus}$E 上の交代形式 $\overset{l}{\oplus}\mathrm{Im}\,h$ から．Sp_{nl} が得られ．自然に Sp_n は Sp_{nl} の部分群となっている。従って．k 上の埋めこみ

$$G \xhookrightarrow{\Phi} G' \xhookrightarrow{\pi^l} Sp_{nl}$$

が得られる。ここで．スカラー k を $\mathbb{Q}$ へ制限すれば．$\mathbb{Q}$ 上

$$\mathcal{G} = Res_{k/\mathbb{Q}}\, \mathbb{G} \xhookrightarrow{\ \Phi_{\mathbb{Q}} = Res_{k/\mathbb{Q}}\Phi\ } \mathcal{G}' = Res_{k/\mathbb{Q}}\, \mathbb{G}' \xhookrightarrow{\ \Pi^{\ell}_{\mathbb{Q}} = Res_{k/\mathbb{Q}}\Pi^{\ell}\ } \mathcal{S}p_{n\ell} = Res_{k/\mathbb{Q}}\, Sp_{n\ell}$$

となる。ただし、$Res_{k/\mathbb{Q}}$ は k を $\mathbb{Q}$ へ制限する functor であり、$\mathcal{G}$、$\mathcal{G}'$、$\mathcal{S}p_{n\ell}$、$\Phi_{\mathbb{Q}}$、$\Pi^{\ell}_{\mathbb{Q}}$ などは、上のように定義する。更に $Res_{k/\mathbb{Q}}(\overset{\ell}{\oplus} E)$ 上の交代形式 $Res_{k/\mathbb{Q}}(\overset{\ell}{\oplus}\, \mathrm{Im}\, h)$ を β とし、β によって定義される $\mathbb{Q}$ 上の symplectic group Sp_N (但し $N = n\ell(d+1)$) を考えれば、$\mathcal{S}p_{n\ell} \subset Sp_N$ となっている。従って、$\mathbb{R}$-point の群をとることによって、次の埋めこみの図式が得られる。

$$\begin{tikzcd}
(2,1) & \mathcal{G}(\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\Phi_{\mathbb{Q}}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \mathcal{G}'(\mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\Pi^{\ell}_{\mathbb{Q}}"] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & \mathcal{S}p_{n\ell}(\mathbb{R}) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & Sp_N(\mathbb{R}) \arrow[d, phantom, "\wr\|"] \\
(2,2) & G \times \prod_{i=1}^{d} G_i \arrow[r, hook, "\varphi \times \prod_{i=1}^{d}\varphi_i"'] & SU(p,q) \times \prod^{d} SU(n) \arrow[r, hook, "\tau^{\ell} \times \prod_{i=1}^{d}\tau^{\ell}_i"'] \arrow[dr, "\tilde{\tau}^{\ell} \times \prod_{i=1}^{d}\tilde{\tau}^{\ell}_i"'] & \prod^{d+1} Sp(n\ell, \mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\iota^{d+1}"'] & Sp(N, \mathbb{R}) \\
 & & & \prod^{d+1} Mp(n\ell, \mathbb{R}) \arrow[r, hook, "\tilde{\iota}^{d+1}"] \arrow[u, "\prod^{d+1}\nu"] & Mp(N, \mathbb{R}) \arrow[u, "\nu"']
\end{tikzcd}$$

ここで、$1 \leqq i \leqq d$ に対し、$G_i = ({}^{\sigma_i}\mathbb{G})(\mathbb{R})$ であり、φ_i、τ^{ℓ}_i は、$\Phi_{\mathbb{Q}}$、$\Pi^{\ell}_{\mathbb{Q}}$ の σ_i による共役から得られる写像をあらわす。又、(2,1) と (2,2) の間の各同型 " $\cong$ " は $\mathbb{R}$ 上の同型である。

(2,2) の埋めこみにおいて、$Mp(N, \mathbb{R})$ の Weil 表現 W^N を考えれば、$W^N|_{G \times \prod_{i=1}^{d} G_i} \cong W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell} \circ \varphi \,\hat{\otimes}\, W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell}_1 \circ \varphi_1 \,\hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes}\, W^{n\ell} \circ \tilde{\tau}^{\ell}_d \circ \varphi_d$ ($\hat{\otimes}$ は exterior tensor product) であるから、我々の表現 U は W^N の $G \times \prod_{i=1}^{d} G_i$ への制限の第1成分の部分表現となっている。又、(2,1) の埋めこみを使えば、G のアリスメティックな部分

群を次のように構成することができる。交代形式βが標準的な形となるような$\mathbb{Q}$上の基底を一つとり、この基底に関して$Sp_N(\mathbb{R})$を行列群$Sp(N,\mathbb{R})$として実現しておく。このとき、

$$\Omega_0 = \left\{ \gamma \in \mathcal{G}(\mathbb{Q}) \,\middle|\, (\Pi_{\mathbb{Q}}^{\ell} \circ \Phi_{\mathbb{Q}})(\gamma) \in Sp(N,\mathbb{Z}) \right\}$$

とすれば、アリスメティック部分群についてのよく知られた議論から、Ω_0は$\mathcal{G}(\mathbb{R})$の cocompact な離散部分群となり、従って、$P_0 ; \mathcal{G}(\mathbb{R}) \longrightarrow G$を第1成分への射影とすれば、$\Gamma_0 = P_0(\Omega_0)$は$G$の cocompact な離散部分群となる。我々の目標は、このΓ_0の指数有限な部分群の中に、求めるΓが存在することを示すことである。

そのための鍵となる Borel と Wallach による定理を用意しよう。Weil 表現$(W^N, L^2(\mathbb{R}^N))$について、そのC^∞-vector の作る部分空間は、位相もこめて Schwartz space $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$と一致し、$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$は$Mp(N,\mathbb{R})$-加群と考えられる。Hermite function によって張られる$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$の部分空間を

$$\varphi_0^N \cdot P(\mathbb{R}^N) = \left\{ \varphi_0^N \cdot P \;\middle|\; P ; \text{多項式} \right\}$$

ただし、$\varphi_0^N(x) = (2\pi)^{-\frac{N}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, x\rangle\right) \quad (x \in \mathbb{R}^N)$

とすれば、次の定理が成り立つ。

<u>定理</u>（Borel & Wallach）　$g_0 \in Mp(N,\mathbb{R})$, $\varphi_0 \in g_0(\varphi_0^N \cdot P(\mathbb{R}^N))$とする。$\varphi_0 \neq 0$ならば、次の条件(i),(ii),(iii)をみたす$Mp(N,\mathbb{R})$

の離散部分群 $\tilde{\Delta}$ と $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ の連続汎関数 μ が存在する。

(i). $\nu(\tilde{\Delta})$ は $Sp(N,\mathbb{Z})$ の congruence subgroup を含む。

(ii). μ は $\tilde{\Delta}$−不変である，すなわち $\mu\circ\tilde{\gamma}=\mu$ $(\tilde{\gamma}\in\tilde{\Delta})$.

(iii). $\mu(\varphi_0)\neq 0$

この定理は [1], VIII, §3, の Theorem 3.9 を我々の使いやすい形に変形したものであり，theta distribution とよばれる $\tilde{\Delta}$−不変な distribution を構成することによって示される。

さて，定理 1 の証明の概略をのべよう。(U, H_U) は上記のように (2.2) の埋めこみによって $W^N|G\times\prod_{i=1}^{d}G_i$ の才 1 成分に実現されている。仮定より，$\xi_0\in H_U\cap L^2(\mathbb{R}^{nl})^0$ で，$\xi_0\neq 0$ とする。K' は $S(U(p)\times U(q))$ と共役であり，$L^2(\mathbb{R}^{nl})$ の $S(U(p)\times U(q))$−finite vector の集合は $\phi_0^{nl}\cdot P(\mathbb{R}^{nl})$ であることから，$L^2(\mathbb{R}^{nl})^0$ は

$$L^2(\mathbb{R}^{nl})^0 = \gamma(\phi_0^{nl}\cdot P(\mathbb{R}^{nl})) \quad (\gamma\in Mp(nl,\mathbb{R}))$$

という形をしている。従って，$\varphi_0=\xi_0\otimes\underbrace{\phi_0^{nl}\otimes\cdots\otimes\phi_0^{nl}}_{d=}$ とおけば，ある $\gamma_0\in Mp(N,\mathbb{R})$ に対して

$$\varphi_0\in\gamma_0(\phi_0^{nl}P(\mathbb{R}^{nl})\otimes\cdots\otimes\phi_0^{nl}P(\mathbb{R}^{nl}))=\gamma_0(\phi_0^{N}\cdot P(\mathbb{R}^N))$$

となり，しかも $\varphi_0\neq 0$ である。この φ_0 を (2,1) の埋めこみの状況へ移しても，やはりそのようになっている。そこで，Borel & Wallach の定理をこの φ_0 に対して適用すれば，(i), (ii), (iii) をみたす $\tilde{\Delta}$ と μ を得る。今，$\nu(\tilde{\Delta})$ に含まれる

$Sp(N,\mathbb{Z})$ の congruence subgroup を Δ とする。このとき、Ω_0 の congruence subgroup Ω で、$\Pi_{\mathbb{Q}}^{\ell}(\Phi_{\mathbb{Q}}(\Omega)) \subset \Delta$ となるものがとれる。$\Gamma = P_0(\Omega)$ とすれば、Γ は Γ_0 の指数有限な部分群となるが、この Γ が我々の求めるものである。実際、μ を用いて、$(\mathfrak{g}, K)$-module としての準同型 $A_\mu ; H_U^0 \longrightarrow C^\infty(\Gamma \backslash G)$ を

$$A_\mu(\xi)(\Gamma g) = \mu(U^{\ell}(g)\xi \otimes \varphi_0^{n\ell} \otimes \cdots \otimes \varphi_0^{n\ell}) \qquad (\xi \in H_U^0)$$

によって定義する。(ここで、$H_U^0 = H_U \cap L^2(\mathbb{R}^{n\ell})^0 \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\ell})$, $\overset{d+1}{\otimes} \mathcal{S}(\mathbb{R}^{n\ell}) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ であることに注意。) このとき、A_μ が連続な G-準同型 $\bar{A}_\mu ; H_U \longrightarrow L^2(\Gamma \backslash G)$ に拡張されることを示すことができる。勿論、$\bar{A}_\mu(\xi_0)(e\Gamma) = A_\mu(\xi_0)(e\Gamma) = \mu(\varphi_0) \neq 0$ ゆえ、$\bar{A}_\mu$ は自明でない G-準同型である。

§3. $G = Sp(r,s)$ の場合

$G = Sp(r,s)$ の場合に定理 1 を適用してみよう。この節の結果はすべて [3] に含まれているが、定理 1 の応用という立場から述べる。

$G = Sp(r,s)$ $(r \geqq s \geqq 1)$ とする。G を $GL(2(r+s), \mathbb{C})$ 内に実現するとき、自然に G は $SU(2r, 2s)$ の部分群となる。従って、$p = 2r$, $q = 2s$ ととるとき、G は自然に $G' = SU(p,q)$ に埋めこまれており、定理 1 の条件 ⊛ をみたしていることは容易に示される。

今，$\ell=1$ の場合を考える。G' の表現 V^1 は，既約表現の直和に分解し，その重複度はすべて 1 である。そこで，V^1 の各既約成分 (V, H_V) の G への制限 $U = V|_G$ を詳細に調べれば，U は G の表現として既約となることが示される。従って，勿論，$H_U \cap L^2(\mathbb{R}^n)^0 = H_V \cap L^2(\mathbb{R}^n)^0 \neq \{0\}$ である。従って，定理 1 より次の系を得る。

系 2　$G = Sp(r, s)$ の場合，$(U^1, L^2(\mathbb{R}^n))$ のすべての既約部分表現は *automorphic* である。

この系を (0,1) 式と結びつけることによって，ある *cohomology* の非消滅を示すことができる。今，G の離散部分群 Γ (*cocompact*) と自明でない有限次元既約 G-*module* F に対し，$H^*(\Gamma, F)$ を考える。*Vogan* と *Zuckerman* の消滅定理([4])によれば，$G = Sp(r, s)$ の場合，

$$H^i(\Gamma, F) = \{0\} \qquad (i < 2s)$$

である。従って，$H^{2s}(\Gamma, F)$ の消滅，非消滅が問題となる。正の整数 j に対し，(σ_j, F_j) を G の $\mathbb{C}^{2(r+s)}$ 上の標準的表現の j 回対称テンソル積とし，その反傾表現を (σ_j^*, F_j^*) とする。このとき，系 2 の表現 (U, H_U) の中に，

$$H^{2s}(\mathfrak{g}, K ; H_U^0 \otimes F_j^*) \neq \{0\}$$

となるものを見つけることができる。従って、(0,1) より次の定理が得られる。

<u>定理2</u> j を正の整数とするとき、$G = Sp(r, s)$ の co-compact な離散部分群 Γ で $H^{2s}(\Gamma, F_j^*) \neq \{0\}$ となるものが存在する。

この定理は、上記の消滅定理が最良のものであることを示している。

<u>References</u>

[1] A. Borel, N. Wallach : Continuous cohomology, discrete subgroups and representations of reductive groups, Ann. Math. Studies, No 94, Princeton Univ. Press, 1980

[2] M. Kashiwara, M. Vergne : On the Segal-Shale-Weil representations and harmonic polynomials, Inv. Math. 44 (1978), 1-47.

[3] Y. Konno : Cohomology of discrete subgroups of Sp(p, q), Osaka J. Math. 25 (1988) 299-318.

[4] D. Vogan, Jr, G. Zuckerman : Unitary representations with non-zero cohomology, Compositio Math. 53 (1984), 51-90.