

古典群の佐武同型について

名大理 銀鳥 康隆 (Yasuhiko, Kajima)

本稿は、 p -進体上の古典群 (O) , (Sp) , (U) , (U^+) , (U^-) に関する local Hecke 環の、いわゆる佐武同型を、Macdonald が Chevalley 群に対して行った idea を用いて、具体的に記述することを目的とする。(ただし、簡単のために、 (O) の $n=2V$ の場合は除く。この場合は、最もやさしいが、Weyl 群が他の場合と異なるので。)

G を p -進体上の連結代数群として、 K をその Maximal compact subgroup とする。また $\mathcal{L}(G)$ を G 上の \mathbb{C} -valued function で、compact 台を持つものとする。このとき、ハッケ環 $\mathcal{L}(G, K)$ を $\mathcal{L}(G, K) = \{f \in \mathcal{L}(G) \mid f(kxk') = f(x) \text{ for all } k, k' \in K\}$ とする。ただし、その乗法は、 $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(G, K)$

(1)

に対し、 $(f_1 * f_2)(g) = \int_G f_1(gg_1^{-1}) f_2(g_1) dg_1$
 で定義する。明らかに $f_1 * f_2 \in \mathcal{L}(G, K)$ で
 ある。今ここで、Satake [3] は、代数群 G
 に関するある条件が満足されているとき、
 $\mathcal{L}(G, K)$ は、 K に関する zonal spherical function
 $W_S(x)$ によって、Fourier 変換 (Satake 変換)

$$\varphi \in \mathcal{L}(G, K) \longrightarrow \hat{\varphi} = \int_G W_S(g) \varphi(g) dg$$

 を行うことにより、ある多項式環に同型に移さ
 れることを示した。(この時、特に $\mathcal{L}(G, K)$ は
 可換である。) そして [3] では、与えられたベ
 クトル空間 V 上の ε -Hermitian form に対
 する similitude として定まる代数群の連結成分
 を G とし (古典群)、 V の Maximal lattice に対する
 stabilizer としての Maximal compact subgroup
 K に対して、前述の仮定が満たれることが示
 されている。よって、ここでは、これらの古典群
 に対する同型を具体的に書くことにする。また
 ここで、 $\mathcal{L}(G, K)$ は compact support を持て
 いるので、それは、 $K \times K$ の characteristic
 function $\chi_{K \times K}$ の \mathbb{C} 上の有限和で書ける。

そしてまた $W_s(x)$ は、 k -両側不変なので、

$$\int_G W_s(g) \chi_{kx_1k}(g) dg = W_s(x_1^{-1}) \times (kx_1k \text{ の体積})$$
 となるので、zonal spherical function の具体的な型と、 kxk の体積 $= [kxk; k]$ が求められれば良いことが分る。よって §2 では $W_s(x^{-1})$ の具体的な型を求め、§3 では $[kxk; k]$ を求めることとする。

§1 準備

k を p -進体とする。ただし \mathbb{Z} は整数環で unit とする。また k' は k 自身又は、 k の 2 次拡大または、 k 上の中心的四元数体とする。そして e を k'/k の分岐指数、 $k'(k)$ 上の素イデアルを $\mathfrak{P} = (\pi)$ ($\mathfrak{P} = (\pi)$) とおく。また $x \rightarrow \bar{x}$ を k'/k の canonical involution とする。そして、 V を k' 上の n 次元ベクトル空間、そして \langle, \rangle を V の non-degenerate ε -Hermitian form とする。すなわち $\langle x, y \rangle = \varepsilon \overline{\langle y, x \rangle}$, $\langle xa, yb \rangle = a \langle x, y \rangle \bar{b}$ for all $x, y \in V$, $a, b \in k'$.

これらは、次の 5 つに分類される。

- (O) $k' = k$, $\varepsilon = 1$, (Sp) $k' = k$, $\varepsilon = -1$,
 (3)

(V) k' は k の 2 次拡大, $\epsilon = 1$.

(V⁺) k' は k の quaternion, $\epsilon = 1$.

(V⁻) " " $\epsilon = -1$,

いま, V の \langle, \rangle の Witt index を ν とする.

このとき, $n = n_0 + 2\nu$ とし, n_0 を定め, V の

Basis $\{e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_1, \dots, e'_\nu\}$ を次のように

取れる. $\langle e_i, e_j \rangle = \langle e'_i, e'_j \rangle = 0$, $\langle e_i, e'_j \rangle = \delta_{ij}$

$f_m \in (\sum e_i k' + e'_j k')^\perp$, $m = 1, \dots, n_0$, $\langle f_i, f_j \rangle = 0$ if $i \neq j$

として $\langle f_i, f_i \rangle \in \mathcal{O} \setminus \mathcal{P}^2$ としておく. ここで

$\langle f_1, f_1 \rangle \in \mathcal{O}^* \dots \langle f_\alpha, f_\alpha \rangle \in \mathcal{O}^*$, $\langle f_{\alpha+1}, f_{\alpha+1} \rangle \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^2$,

$\dots \langle f_{\alpha+\nu}, f_{\alpha+\nu} \rangle \in \mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^2$ としておく. すると

$L = \mathcal{O}[e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_1, \dots, e'_\nu]$ は norm 0 の Maximal

lattice である. (norm 0 という仮定は必要ではないが簡単のため norm 0 とする.) として, V の

k' 線型変換を行列 (g_{ij}) で

$(e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_1, \dots, e'_\nu) \rightarrow (e_1, \dots, e_\nu, f_1, \dots, f_{n_0}, e'_1, \dots, e'_\nu)(g_{ij})$

として同一視する. として, G を

$\tilde{G} = \{g \in GL(V) \mid \langle gx, gy \rangle = \mu(g) \langle x, y \rangle, x, y \in V, \mu(g) \in k'^*\}$

の連結成分, また $K = \{k \in G \mid kL = L\}$. また

$H = \{h = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_\nu, h_0, \beta_0 \bar{\beta}_0^{-1}, \dots, \beta_\nu \bar{\beta}_\nu^{-1}) \in G \mid \beta_i \in k'^*\}$

(4)

$s_0 \in \mathbb{R}^*$, $h_0 \in G_0$, $M_0(h_0) = \{s_0\}$. ここで, G_0 は $V_0 = \sum f_i k'$ の similitude, M_0 は G_0 の multiplier である。そして N を

$$N = \left\{ n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & I_{n_0} & c \\ x & x & x \end{pmatrix} \in G \right\} \text{ とする。}$$

そしてまた記号 (2) と e_0 を次で定める。

$$(2) = \begin{cases} 1 & \text{if } n_0 = 0 \\ 2 & \text{if } n_0 > 0 \end{cases}, \quad \text{ord}_p M_0(G_0) = \frac{(2)}{e_0} \mathbb{Z}.$$

また, $M = \frac{1}{e} \mathbb{Z}^0 \times \frac{1}{e_0} \mathbb{Z}$ とし

$$(m) = \left(\frac{m_1}{e}, \dots, \frac{m_p}{e}, \frac{m_0}{e_0} \right) \in M \text{ に対して}$$

$$\pi^{(m)} = \begin{cases} \text{diag}(\pi^{m_1}, \dots, \pi^{m_p}, \pi^{m_0} \bar{\pi}^{-m_1}, \dots, \pi^{n_0} \bar{\pi}^{-m_0}) & \text{if } n_0 = 0 \\ \text{diag}(\pi^{m_1}, \dots, \pi^{m_p}, \omega^{m_0}, M_0(\omega)^{m_0} \bar{\pi}^{-m_1}, \dots, M_0(\omega)^{m_0} \bar{\pi}^{-m_0}) & \text{if } n_0 > 0 \end{cases}$$

とする。ここで ω は $\text{ord}_p M_0(\omega) = \frac{2}{e_0}$ とする G_0

の元とする。また, 群 D を $\pi^{(m)}, (m) \in M$ で生成

される群とする。そして $S \in D$ の character として

$h \in H \cap GL(n, \theta)$ に対し $S(h) = 1$ とおくことにより

$S \in H$ の character と見る。この時次が成り立つ。

$$G = KHK = KDK \quad (\text{Cartan 分解})$$

$$= KHN = KDN \quad (\text{Iwasawa 分解}). \quad \text{このとき}$$

G の k に関する gonal spherical function を次で定める。

$$\tilde{\omega}_S(x^{-1}) := \int_K \phi_S(xk) dk$$

ただし, $\phi_S(x) = S(h) \delta^{\frac{1}{2}}(h)$, $x = khn$ (Iwasawa 分解)

また, N の Haar measure $d(n)$ に対して

$\delta(w) = d(w)/d(hnh^{-1})$ とする。また $\int_k dk = 1$ としておく。次にルート系 Σ を次のように定める。

$$\Sigma = \{ \pm \epsilon_i, \pm \epsilon_i \pm \epsilon_j \mid 1 \leq i, j \leq \nu, i \neq j \}$$

ここで ϵ_i は、 \mathbb{R} 上の ν -次元ベクトル空間の基底とする。また、 $\epsilon_0, \epsilon_i - \epsilon_{i+1}, 1 \leq i \leq \nu-1$ を simple root と呼ぶ。また、 M に作用する群 \mathbb{W} (作用を $w(m)$ と書く) であるワイル群は、

A. (m_1, \dots, m_ν) のすべての permutation

$$B. \left[w^{(i)} = \begin{cases} m_i \rightarrow -m_i + (2) \frac{\rho}{\epsilon_0} m_0 \\ m_j \rightarrow m_j \quad (j \neq i) \end{cases} \right] \quad \text{によって生成}$$

である群であるとする。A は、明らかに Σ に作用していると思われる。B は $w^{(i)}$ が $\epsilon_i \rightarrow -\epsilon_i$

$\epsilon_j \rightarrow \epsilon_j$ ($i \neq j$) として Σ に作用していると思われる。よって \mathbb{W} は Σ に作用していると思われる。また、

K の中で、 \mathbb{W} と同型で、しかも同型 σ と書く) $\sigma(w) \pi^{(m)} \sigma(w) = \pi^{w(m)}$ となるものがある。これを

\mathbb{W} と同一視する。また、任意の simple root a

に対し、 $w_a(a) = -a, w_a(\Sigma^+ - \{a\}) = \Sigma^+ - \{a\}$

(Σ^+ は positive root) となる $w_a \in \mathbb{W}$ が存在する。

これを a に対する simple reflection と呼ぶ。

また、任意の $w \in \mathbb{W}$ は simple reflection の

積で書けるが、 $w = w_1 \dots w_r$ と simple reflection

の積で書いた時の最小の $\gamma \in \ell(w)$ と書く。

§2. $W_0(x^{-1})$ の計算. Macdonald になら

ず, K の Bruhat 分解を考える。ただし,

anisotropic part のため, 都合のいい Iwahori 部分群が取れない。それで次のようにする。

$$K = \left(\begin{array}{c|c|c} A & & B \\ \hline & & \\ \hline C & & D \end{array} \right) \text{ とおいた時, } K' = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in GL(2v+d, \theta)$$

は, 有限体 \mathbb{F}_p 上 $\{e_1, \dots, e_v, f_1, \dots, f_d, e'_1, \dots, e'_l\}$ に

関する ε -Hermitian matrix と見れる。(A, B, C, D

は, それぞれ $(v+d) \times (v+d)$, $(v+d) \times v$, $v \times (v+d)$, $v \times v$ 行列)

また, 任意の \mathbb{F}_p 上の $\{e_1, \dots, e_v, f_1, \dots, f_d, e'_1, \dots, e'_l\}$

に関する ε -Hermitian matrix K' は ($K' \in GL(2v+d, \mathbb{F}_p)$)

$K'' \in GL(2v+d, \theta)$ で $K'' \equiv K' \pmod{p}$ で, K'' が

$\{e_1, \dots, e_v, f_1, \dots, f_d, e'_1, \dots, e'_l\}$ に関して体 \mathbb{F} 上の ε -

Hermitian matrix となるものが存在することか

分る。これらのはことより, Maximal compact subgroup

$$K \text{ は } K = \{k_1, k_2 \mid k_1 \in K_1, k_2 \in K_2\}$$

となる。ただしここで K_1, K_2 は

$$K_1 = \left\{ k_1 \in G \mid k_1 = \begin{pmatrix} * & | & 0 & * \\ \hline 0 & * & 0 \\ \hline * & | & 0 & * \end{pmatrix} \begin{matrix} \}^{v+d} \\ \}^v \end{matrix} \right\}, \quad K_2 = \left\{ k_2 \in G \mid k_2 \equiv \begin{pmatrix} I_{v+d} & | & * & 0 \\ \hline * & | & * & * \\ \hline 0 & * & | & I_v \end{pmatrix} \right\}$$

である。ここで, K_1, K_2 は群にならない。

ここで、 K_1 は、 $(\langle f_i, f_i \rangle \in \mathfrak{p})$ となる f_i に関する部分が無視できることから、) 次のように分解出来る。(Bruhat 分解)

$$K_1 = \bigcup_{w \in W} BwB \text{ (disjoint union)} \quad \text{ただし}$$

$$B = \left\{ g \in G \mid g = \begin{pmatrix} x & & & & \\ & x & & & \\ & & x & & \\ & & & x & \\ & & & & x \end{pmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} \nu + \alpha \\ \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} \beta \pmod{\mathfrak{p}} \\ \left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} \nu \end{matrix} \right\} \quad \text{である。}$$

これらのことから、Macdonald と同様に、 K

を分解出来る。また、ルートに対する unipotent

subgroup として、例えば、(0) で $S = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \pi & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{pmatrix}$ とするとき、ルート β_0 に対する

unipotent subgroup として、 $U = \begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$

ただし $A = \begin{pmatrix} 1 & -y & -yz & z \\ & 1 & y & x \\ & & 1 & x \\ & & & 1 \end{pmatrix} \quad z = -\frac{1}{2}(\pi x^2 + y^2)$

となる。ここで、 $z \in \mathfrak{O}$ であるとする。 ($z \in \mathfrak{O}^*$)

明らかに、 $x \in \mathfrak{O}$ かつ $y \in \mathfrak{O}$ となるが、このこと

によ、 z 群は z の部分によ、 z 制御される

ことになる。一般の場合には、次の lemma

より分る。

Lemma V_0 を anisotropic space として、その

orthogonal basis を $\{f_1, \dots, f_{n_0}\}$ とすると

$$\text{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_1 x_1 + \dots + f_{n_0} x_{n_0}, f_1 x_1 + \dots + f_{n_0} x_{n_0} \rangle = \text{Min} \{ \text{ord}_{\mathfrak{p}} \langle f_i x_i, f_i x_i \rangle, \}$$

$\{1 \leq i \leq n_0\}$ となる。 ($z \in \mathfrak{O}^*$ とする仮定を用いて)

(8)

これらのことを用いて、Macdonald の idea を少し変形して、計算して行くことが出来る。
次に、その結果を書く。

最初に、simple root a と、 D の character s に対して $C_0(a, s)$ を次のように定義する。

$$1) \quad C_0(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}, s) = \frac{q - \tilde{s}}{q - q\tilde{s}} \quad \text{ここで } q = |O/\mathfrak{p}|.$$

$$\tilde{s} = s(\pi_i), \quad \pi_i = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \pi, \pi^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}, \bar{\pi}, \bar{\pi}^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{i-1}) \in D$$

$$2) \quad C_0(\epsilon_\nu, s) = 1 + \frac{T}{1 - \tilde{s}^2} \quad \text{ここで } \tilde{s} = s(\pi_\nu)$$

$$\pi_\nu = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{\nu-1}, \pi, \underbrace{1, \dots, 1}_{\nu-1}, \bar{\pi}^{-1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\nu-1}) \in D, \quad \nu \leq r$$

$$T = \frac{q^B - 1}{q^{(\alpha+B)/2}} \tilde{s} + \frac{q^B (q^\alpha - 1)}{q^{(\alpha+B)}} \tilde{s}^2 \quad \text{for } (O).$$

$$= (1 + \tilde{s}) \tilde{s} \left(1 - \frac{1}{q}\right) \quad \text{for } (Sp)$$

$$= \frac{q^{B+\frac{1}{2}} - 1}{q^{(\alpha+B+1)/2}} \tilde{s} + \frac{q^{B+\frac{1}{2}} (q^{\frac{1}{2}+\alpha} - 1)}{q^{(\alpha+B+1)}} \tilde{s}^2 \quad \text{for } (U), e=1.$$

$$= \frac{q - 1}{q^{(\alpha+1)/2}} \tilde{s} + \frac{q(q^\alpha - 1)}{q^{\alpha+1}} \tilde{s}^2 \quad \text{for } (U) e=2$$

$$= \frac{q - 1}{q^{(\alpha+2)/2}} \tilde{s} + \frac{q(q^{\alpha+\frac{1}{2}} - 1)}{q^{\alpha+2}} \tilde{s}^2 \quad \text{for } (U^+)$$

$$= \frac{q^B - 1}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+B)/2}} \tilde{s} + \frac{q^B (q^{(\frac{1}{2}+\alpha)} - 1)}{q^{(\frac{1}{2}+\alpha+B)}} \tilde{s}^2 \quad \text{for } (U^-)$$

(9)

そして、他の root に対しては、 $c_0(a, s) = c_0(wa, ws)$ によって定義する。ここで $ws(a) = s(w^{-1}aw)$ 。

次に $c(s) = \prod_{a \in \Sigma^+} c_0(a, s)$ で定義する。この時、

Theorem 1 D の character s は $c_0(a, s)$

の分母を 0 にしないとする。このとき、

$$W_s(x^{-1}) = V \delta^{\frac{1}{2}}(x) \sum_{w \in W} (ws^{-1}) \cdot (ws)(x)$$

ここで V は constant で、 $x = \pi^{(m)}$ 、

$$m_1 \geq \dots \geq m_r \geq \frac{[2]e}{2e_0} m_0 \quad \text{また } V \text{ は } s = \delta^{-\frac{1}{2}}$$

とあって、すぐ求まる。

§3. $[K \times K; K]$ の計算

明らかに $\text{ord}_p M(x) = 0$ 又は 1 と仮定して良い。

($y = \pi I_n$ に対し $[K \times K; K] = [K \times y^m K; K]$ for all $m \in \mathbb{Z}$ であり、 $\text{ord}_p M(y) = 2$ なるので。)

3.1 $\text{ord}_p M(x) = 0$ の場合。この場合、 $x = \pi^{(m)}$

$m_1 \geq \dots \geq m_r, m_0 = 0$ とおく。この時、 K の部分群 K_0

で、簡単な Bruhat 分解を持ち、かつ $[K \times K; K]$

$= [K_0 \times K_0; K_0]$ となる K_0 が存在する。それら

のことで、大体 Macdonald の方法が使える。

次に結果を書く為に記号を定義する。

\overline{W}_x は \overline{W} の部分群で、 $w^+ x w = x$ となるものによ、
(10)

て生成されるものとする。また、 $l(w)$ を w の長さ、 $l'(w)$ を w の shortest expression に現れる w_0 の個数とする。また、数 γ を $\gamma = 1$ for (Sp), $= \alpha$ for (O) and (U) $e=2$, とする。他の場合は $\gamma = \alpha + \frac{1}{2}$ と定める。そして $L(w) = l(w) + (\gamma-1)l'(w)$ とする。また、 w_0 を W の中で長さ最大の元、 \tilde{w} を \tilde{W} の中で長さ最大のものとする。この時

Theorem 2.

$$[K \times K : K] = \delta(\alpha) q^{-L(w_0)} \sum_{w \in W} q^{L(w)} \cdot \left(\sum_{w \in \tilde{W}} q^{L(w)} \right)^{-1}$$

3.2. $\text{ord}_p M(x) = 1$ の場合.

この時、 (U^+) , (U) with $e=2$, (U^-) , の3つの場合は $\text{ord}_p M(x) = 0$ の場合は還元される。それは、

(U^+) , (U) with $e=2$ の場合には、 $y = \pi I_n$ とお

くと $y \in G$ であり $\text{ord}_p M(y) = 1$ であることと

$(\pi \in k')$, (U^-) の場合も大体同様の形の y が

取れることから分る。よって (U) with $e=1$,

(O), (Sp) について考える。この時、 $x = x'y$

となる x' , y $\text{ord}_p M(x') = 0$, $\text{ord}_p M(y) = 1$

$x' = \pi^{(m)}$, $y = \pi^{(m')}$ で $m_1 \geq \dots \geq m_r$, $m_0 = 0$.

$m'_1 = \dots = m'_r = m_0 = 1$ となるものが取れる。

(11)

ここで、 W' を W の部分群で、 (m_1, \dots, m_ν) のすべての permutation で生成される群として、 $W'_x = \{w \in W' \mid w^{-1}xw = x\}$ とおくとよく、また、 W_0'' を $W_0'' \tilde{W}' = W_0'$ で定義する。ただし、 \tilde{W}' は、 W'_x の長さ最大の元、 W_0' は W' の中で長さ最大の元とする。このとき、

Theorem 3

$$[K \times K : K] = \delta(x') q^{-L(W_0'')} \left(\sum_{w \in W} q^{L(w)} \right) \left(\sum_{w \in W'_x} q^{L(w)} \right)^{-1}$$

References.

- [1] A.N. Andrianov, Spherical functions for GL_n over local fields and summation of Hecke series, Math USSR Sbornik., 12 (1970), 429-451
- [2] I.G. Macdonald, Spherical functions on a group of p -adic type, Advanced Study of Math, Madras., (1970).
- [3] I. Satake, Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p -adic fields, I.H.E.S., 18 (1963)