数理解析研究所講究録
第727巻 1990年 107-139



# 志村多様体の Arithmetic Geometry と modular form への応用

東大理 藤原一宏

## §0. Introduction

この報告では、志村多様体の Arithmetic Geometry を $\mathbb{Z}$ 上の arithmetic model の理論, compact 化理論に重点を置き解説を試みる.

複素数体上の理論の類似としての $\mathbb{Z}$ 上の toroidal compact 化 (arithmetic toroidal compactification) の必要性は常々指摘され続けてきたことであるが、その満足すべき理論が与えられたのは Siegel modular variety に限っても比較的最近のことであり ([Chai], [Fa], [Chai-Fa]) 残っている問題も数多い. (例えば 例外型の群に対応する case で arithmetic compact化が作れる case は現在知られていないように思う.)

現在では筆者が修士論文において発展させた結果により志村先生より最初に扱われた case の大部分が扱えるようになった ([Fu1], [Fu2]). そこで前半部では扱う多様体の基本性質及びその toroidal compact 化の基本性質を述べる. 後半部ではその応用として得られる基本的な定理について述べる.

特に、整係数 Fourier 係数をもつ modular form に対する有限性は toroidal compact 化の存在を仮定すれば自明となることは特筆すべきであろう
Z上での理論構成は reduction の研究、Fourier 係数の合同性の研究のための基本的手法となっていくと思われる

この報告中最も基本的である arithmetic toroidal compact 化の存在証明は [Fu2] に与えられているが、証明は複雑でありここでは述べきれない。ご容赦願いたい

記号： $\mathbb{Z}^{\wedge} = \varprojlim_{n} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 　p: 素数のとき $\mathbb{Z}^{p} = \varprojlim_{\substack{n \\ (p,n)=1}} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \prod_{\ell \neq p} \mathbb{Z}_{\ell}$

$\mathbb{A}^{f}$ = $\mathbb{Q}$ の有限アデール環 = $\hat{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$

$\mathbb{A}^{f,p}$ : $\mathbb{A}^{f}$ の p 以外成分　$\mathbb{A}^{f}_{p} = \mathbb{Q}_{p}$　$\mathbb{A}^{f} = \mathbb{A}^{f,p}\mathbb{A}^{f}_{p}$

$G/\mathbb{Q}$ : 連結代数群のとき $G^{der} = [G, G]$ 導来群　$G^{red}$ 簡約群

K : $G(\mathbb{A}^{f})$ の compact 開部分群のとき $K^{p} = G(\mathbb{A}^{f,p}) \cap K$, $K_{p} = G(\mathbb{Q}_{p}) \cap K$

$K = K^{p}K_{p}$　　A/S : abelian scheme のとき

$A[n] = \mathrm{Ker}(A \xrightarrow{n倍} A)$　Tate module を

$T^{p}(A/S) = \varprojlim_{\substack{n \\ (n,p)=1}} A[n]$　$T_{p}(A/S) = \varprojlim_{n} A[p^{n}]$, $T(A/S) = T^{p} \cdot T_{p}$

目次

## §1. Arithmetic model of Shimura varieties

### §1.1 数体上の理論 = canonical model の理論

以下我々がとり扱う志村多様体を定義する.（cf. [Sh], [De1]）

$L$ を $\mathbb{Q}$ 上の semi-simple algebra で, 正の対合 $*$ をもつもの.

$V$ を $L$ の faithful, $\mathbb{Q}$ 上有限次の表現空間で, 条件

$$\phi(lx, y) = \phi(x, l^* y) \qquad \forall x, y \in V,\ \forall l \in L$$

を満たす非退化交代型式 $\phi: V \times V \to \mathbb{Q}$ をもつものとし,

以下これを固定する.

簡約可能群 $G/\mathbb{Q}$ を

$$G = \text{the group of } L\text{-linear symplectic similitudes of } (V, \phi)$$

$$= \{ g \in GL_L(V) : \ \phi(gx, gy) = \mu(g)\phi(x, y) \ \ \exists \mu(g) \in \mathbb{Q}^\times \}$$

と定義する. $\mathbb{R}$-torus $S_{\mathbb{R}}$ を $S_{\mathbb{R}} = \mathrm{Res}_{\mathbb{C}/\mathbb{R}} \mathbb{G}_{m,\mathbb{C}}$ (Weil restriction) とし, $X$ を

$X = \{ \mathbb{R}$-群準同型 $S_{\mathbb{R}} \xrightarrow{h} G_{\mathbb{R}}$ で $h$ が $V_{\mathbb{R}}$ に引きおこす $S_{\mathbb{R}}$ の表現 $\rho_h$ は $V_{\mathbb{R}}$ 上 type $\{(-1,0), (0,-1)\}$ の Hodge 構造を定義し, さらに $\phi$ は Hodge 構造としての偏極を与える $\}$

と定義すると $X$ には自然に複素構造が入り, 連結成分は有界対称領域になる.

( $h_0 \in X$ を固定し. $K_\infty = h_0$ の $G(\mathbb{R})$ 内での centralizer とすると $K_\infty \cap G^{der}(\mathbb{R})$ は $G^{der}(\mathbb{R})$ の極大 compact 部分群

$$G(\mathbb{R})/K_\infty \simeq X \quad . \quad )$$
$$g \bmod K_\infty \mapsto g^{-1} h_0 g$$

この $(G, X)$ の組は 以下のように (non-connected) 志村多様体を定義する:

$K \subset G(\mathbb{A}^f)$ を compact open subgroup とするとき

$$\begin{aligned} &Sh_K(G,X)/\mathbb{C} \\ &= K \backslash G(\mathbb{A}^f) \times X / G(\mathbb{Q}) = K \times K_\infty \backslash G(\mathbb{A}) / G(\mathbb{Q}). \\ &= X \times (K \backslash G(\mathbb{A}^f)) / G(\mathbb{Q}). \end{aligned}$$

$$Sh(G,X)/\mathbb{C} = \varprojlim_K Sh_K(G,X)/\mathbb{C} .$$

各 $Sh_K(G,X)$ は $X/\Gamma_g$ $\Gamma_g = g^{-1}Kg \cap G(\mathbb{Q})$ $g \in K \backslash G(\mathbb{A}^f)$ の形の有界対称領域の算術的商の有限和であり 従って標準的に複素代数多様体の構造をもつ (K が neat なら非特異である)

射影極限 $Sh(G,X)/\mathbb{C}$ は有限型でないので必ずしも扱いよくないが. finite adele 化 $G(\mathbb{A}^f)$ の作用をもつという利点がある.

example 1.1.1 (Siegel modular case, degree $g$)

$L = \mathbb{Q}$. $V_\mathbb{Z}$ : rank $2g$ の自由 $\mathbb{Z}$ 加群 $\phi_\mathbb{Z}$ : perfect skew-symmetric form : $\phi_\mathbb{Z} : V_\mathbb{Z} \times V_\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

$(V,\psi)=(V_{\mathbb{Z}},\psi_{\mathbb{Z}})\otimes\mathbb{Q}$

このとき　$G=GSp(2g)_{\mathbb{Q}}$

$X=$ double Siegel upper half plane

$\simeq\{Z=X+Y\sqrt{-1}.\ {}^tZ=Z.\ Z\in M_{2g}(\mathbb{C})=\{2g\times 2g$ 行列$\}$

$Y=\mathrm{Im}Z$ は定符号 $\}$

$=\mathfrak{h}_g^+\amalg\mathfrak{h}_g^-$

特に $g=1$. $G=GL_{2\mathbb{Q}}$ . $X=\mathcal{H}^+\amalg\mathcal{H}^-=$ double Poincaré upper half plane. のときは古典的な elliptic modular case.

代数多様体 $Sh(G.X)/\mathbb{C}$ は a priori には $\mathbb{C}$ 上の多様体であるが. 実は reflex field と呼ばれる標準的に定まる代数体 $E=E(G.X)$ があり. $E$ 上の canonical model と呼ばれる $G(\mathbb{A}^f)$ 作用を持つ model $Sh(G.X)/E$ が存在する. ([DMOS]. [Mi])

この事実は志村先生により発見及び追求され その後 Deligne の研究を経て Milne により最も一般な組 $(G.X)$ について確立された.

$E$ 上の model が canonical であるときには $G(\mathbb{A}^f)$ 作用を持つことの他に special points と呼ばれる $Sh(G.X)/\mathbb{C}$ の点は $E$ 上代数的となり $Gal(\bar{E}/E)$ の作用は完全に記述される.([Sh]. [De 1,2], [Mi])

この意味で canonical model の理論は Hilbert の第12問題に対する部分的解答を与えるものである.

我々が扱う $(G.X)$ に対しては canonical model は abel 多様体に

対する適切なmoduli problemの解として構成され, special pointはCM abel多様体に相当する点となり Galois群の作用は志村–谷山のCM abel多様体の理論により決定される. (1.2参照)
この場合のreflex field Eは $\mathfrak{F}_{\overline{\mathbb{Q}}}$ を $V\otimes_{\mathbb{Q}}\overline{\mathbb{Q}}$ の中のL-stable, totally maximal isotropicな$\overline{\mathbb{Q}}$-subspaceとするとき $E=\mathbb{Q}(\mathrm{tr}_{\mathfrak{F}_{\overline{\mathbb{Q}}}}\, l;\ l\in L)$ で定められる.

## §1.2 $\mathbb{Z}$上のmodelの理論

ここでは1.1に定義された$(G,X)$に対して$\mathbb{Z}$上のmodelを定義する Zink, Langlands–Rapoport ([Z], [La-Ra]) を参照されたい.
ただし, 我々の場合に限っても全ての素数上でよいmodelがとれるかどうかわからず (level structureの問題), 一般の$(G,X)$についての理論は知られていない.
しかし志村多様体が$\mathbb{Z}$上のcanonical modelを持つことを期待するのは非常に自然であり Grothendieckによるmotifの哲学ともmatchする.

1.2.1. 以下では$(G,X)$に対し以下の仮定をおく
☆) $G^{\mathrm{der}}_{\mathbb{R}}$ の$\mathbb{R}$-simple factorは全てA型及びC型
さらに素数 $p$ は Zink [Z] の意味でKに対しgoodであるときgoodといわれる. ($K<G(\mathbb{A}^f)$ : a compact open).

雑にいうと $K=$（$p$以外の成分）・（$p$成分）$=K^p\cdot K_p$ としたときに

$K_p$ が $G(\mathbb{Q}_p)$ の maximal hyperspecial subgroup になる感じである

このとき $\mathfrak{p}$ を $p$ 上の $E$ の素ideal として（$\mathcal{O}_E$：$E$の整数環 $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$：$\mathfrak{p}$での付値環）$\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上の moduli problem を

$\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$－スキーム $S$ に対し

$\mathcal{X}(S)=\{$ $S$上の abelian scheme $A/S$ up to prime to $p$ isogeny で，$L_{\mathbb{Z}}$－multiplication をもち

a)（Hodge filtration の rigidification）

$\mathrm{Tr}(\ell, \mathrm{Lie}\,A/S)=t(\ell)$ $\forall \ell\in L_{\mathbb{Z}}$

$t(\ell)=\mathrm{tr}(\ell : V_{\bar{\mathbb{Q}}}/\mathcal{F}_{\bar{\mathbb{Q}}})$

b)（$*$－polarization に対する条件）

$A/S$ の同次偏極 $\bar{p}$ で，Rosati involution が $L$ 上 $*$ を引きおこし，$p$と素な degree の非同次偏極を含むもの

c)（Tate module の rigidification）

$\bar{s}$ を $S$ の geometric point とするとき $\pi_1(S,\bar{s})$－加群 $T^p(A)_{\bar{s}}$ と $V\otimes\mathbb{A}^{f,p}$ との同型

$k : T^p(A)_{\bar{s}} \xrightarrow{\sim} V_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{A}^{f,p}$

の mod $K^p$ の類 $\bar{k}$ mod $K^p$（$\pi_1(S,\bar{s})$ の $GL(T^p(A)_{\bar{s}})\cong GL(V_{\mathbb{Z}}\otimes\mathbb{A}^{f,p})$ 内の image $\subset K^p$ を要求）．

という a)〜c) の data との組 $(A,\bar{p},\bar{k})$ のなす圏 $\}$

として設定する。すると

定理 1.2.1 ([Zink], [La-Ra]).

この moduli problem $\mathcal{X}/\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ は $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上の smooth，有限型の algebraic stack ($K$：十分小ならスキーム) により表現可能である。

(この手の問題を扱うためには algebraic stack の概念を利用することはしばしば本質的である。

つまり，我々の "$\mathfrak{p}$ が $K$ に対し good" という仮定からは bad reduction の case は現れない。

上の定理では model は $\mathfrak{p}$ での局所環 $\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上でしか定義されていないが，大域化は容易で

Proposition 1.2.2 $K \subset G(\mathbb{A}^f)$：compact open

$n_K = \prod$ (bad primes for $K$) とすると $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$ 上の smooth model $\mathcal{X}/\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$ があり，各局所環上で上述の moduli interpretation をもつ

以下 $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ で universal な abelian scheme を表わすこととする。

特に，この $\mathcal{X}$ を $E$ 上で考えれば $\mathcal{X}_E = Sh_K(G,X)/E$ は 1.1 で述べた canonical model となる moduli 的解釈が可能ならば canonical model の構成は極めて見通しがよいのである。

example 1.2.3 (Siegel modular case)

$G=GSp(2g)_{\mathbb{Q}}$, $X$ = double Siegel upper half plane.

$V_{\mathbb{Z}}=\mathbb{Z}^{2g}$, $\psi_{\mathbb{Z}}$ : standard pairing. reflex field $=\mathbb{Q}$

このとき $n\geq 1$ に対して $K_n\subset G(\mathbb{A}^f)$ を

$$K_n=\{(g-1)V_{\hat{\mathbb{Z}}}\subset n\cdot V_{\hat{\mathbb{Z}}},\ g\in G(\mathbb{A}^f)\}$$

と定義する。このとき $Sh_{K_n}(G,X)/\mathbb{Q}$ の arithmetic model $/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ は次のように定義される:

moduli problem $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ を $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$-scheme $S$ に対し

$\mathcal{A}_{g,n}(S)=\{$ 相対次元 $g$ の主偏極 abelian scheme $A/S$ with a level $n$-structure $\}$

ただし、level $n$-structure とは $A[n]=\mathrm{Ker}(A\xrightarrow{n}A)$ とするとき

同型 $\lambda:(A[n],\text{Weil pairing})\cong((\mathbb{Z}/n)^{2g},\text{standard pairing})$

のこととする。(この定義はとても naive なので、$n$ が $S$ 上可逆でないとうまくいかない)

$\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ は smooth, 相対次元 $\frac{g(g+1)}{2}$ の algebraic stack ($n\geq 3$ なら scheme) で、$\mathbb{C}$ 上の連結成分は全て $\mathfrak{h}_g/\Gamma(n)$ の形。但し、$\Gamma(n)=\{g\in Sp(2g,\mathbb{Z}),\ g\equiv 1 \mod n\}$。連結成分: $\varphi(n)$ 個。

$\mathcal{A}_{g,n}\to\mathcal{A}_{g,1}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ (level structure を忘れる写像) は群 $Sp(2g,\mathbb{Z}/n)$ による Galois covering であり、$\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 内 $\mathcal{A}_{g,1}/\mathbb{Z}$ の normalization をとれば $\mathcal{A}_{g,n}$ の $\mathbb{Z}$ 上の model $\mathcal{A}_{g,n}/\mathbb{Z}$ を得る。これは良い性質をもつべきだと思われるが、定義に normalization という

わかりづらい操作を含んでおり. moduli-interpretationもないため. あまりよくわからない. ただし $g=1$, elliptic modular caseではかなりのことが知られている ([Ka-Ma]).

$\mathcal{A}_{1,1}$ は elliptic curve に対しその $j$-invariant を対応させることで

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_{1,1} \text{ に付随する coarse space} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} \\ E & \longmapsto & j(E) \end{array}$$

をひきおこす. また. Drinfeldによる良いlevel structureが知られており $\mathcal{A}_{1,n}$ は regular scheme になることもわかっている.

この他にも. Hilbert-Blumenthal variety, $\mathbb{Q}$上のShimura curve, Weilによる虚二次体の整数環で虚数乗法をもつabel多様体のfamilyなどが例となる.

## §2 : boundaryの構成 … mixed Shimura variety

Toroidal compact化のboundary近くを分析するために reductiveと限らないparabolic subgroupに対しても志村多様体の類似を考える. arithmeticな立場からは Brylinski [Bry1] により generalized Shimura varietyの名で導入された. ここでは mixed Shimura variety と呼ぶことにする.

$W \subset V$ を $\mathbb{Q}$上定義された $L$-stable, totally isotropic subspace とす

る．(以下 rational boundary component と呼ぶ．)

$P_W = \{ g \in G,\ gW \subset W \}$ とすると $P_W$ は $\mathbb{Q}$-rational，真に極大な放物部分群となる

$U_W$ を $P_W$ の unipotent radical，$Z_W$ を $U_W$ の center，

$L$ をある Levi factor とし，$G_W = \mathrm{Ker}\,(L \to \mathrm{Aut}\, Z_W)$
$$g \mapsto \mathrm{ad}\, g|Z_W$$

とすると　$Z_W$ は vector 群で

$$Z_W \cong N_W \otimes_{\mathbb{Q}} G_a$$

$$N_W = \{ \text{対称形式 } \mu : W \times W \to \mathbb{Q} \quad \mu(lx, y) = \mu(x, l^* y) \quad \forall l \in L,\ \forall x, y \in V \}$$

$\mathrm{Im}\,(L \to \mathrm{Aut}\, Z_W) \cong GL_L(W)$　($N_W$ への自然な作用から induced)

となり　$L \cong G_W \times GL_L(W)$，

$G_W$ は　$(W^\perp/W,\ \mu|_{W^\perp/W})$ から §1.1 の方式で定義される reductive 群

を満たす．

そこで　$$\widetilde{X}_W = P_W(\mathbb{R}) \cdot Z_W(\mathbb{C}) / K_\infty \cap P_W(\mathbb{C})$$

とおくと（$Z_W$ のところだけ複素化することに注意）

$$\widetilde{X}_W = X_W \times \mathrm{Lie}\,(U_W/Z_W)_{\mathbb{R}} \times (\mathrm{Lie}\, Z_W)_{\mathbb{C}}$$

(hermitian sym. dom. of lower dim) × ($\mathbb{R}$-vect.sp) × ($\mathbb{C}$-vect.sp)

但し $X_W$：$G_W$ に対応する対称領域

（$X$は自然に$\widetilde{X}_W$に開埋入され．Piatetski-Shapiroによる第3種Siegel領域としての実現になる）

そこで $(P_W, \widetilde{X}_W)$ に対する mixed Shimura variety を $(\widetilde{K}_W \subset P_W(\mathbb{A}^f))$

$$\widetilde{Sh}_{\widetilde{K}_W}(P_W, \widetilde{X}_W) = (\widetilde{X}_W \times (\widetilde{K}_W \backslash P_W(\mathbb{A}^f)))/P_W(\mathbb{Q})$$

$$\widetilde{Sh}(P_W, \widetilde{X}_W) = \varprojlim_{\widetilde{K}_W} \widetilde{Sh}_{\widetilde{K}_W}(P_W, \widetilde{X}_W)/\mathbb{C}$$

と定義すると．これは次のような構造をもつ：

a) $\widetilde{Sh}_{\widetilde{K}_W}(P_W, \widetilde{X}_W)/\mathbb{C}$ は ある多様体 $Y_W$ 上の torus $J_W$ を fiber とする torus bundle である．ただし．torus $J_W$ は

$$J_W = \mathbb{G}_m \otimes_{\mathbb{Z}} (Z_W(\mathbb{Q}) \cap \widetilde{K}_W)$$

で定義される．

b) $Y_W$ は $(G_W, X_W)$ から作った志村多様体 $Sh_{K_W}(G_W, X_W)$ 上の abelian scheme の構造をもつ．但し $K_W = \widetilde{K}_W \cap G_W(\mathbb{A}^f)$ とし，fiber の abel多様体の1次元homology群は $(U_W/Z_W)(\mathbb{Q}) \cap \widetilde{K}_W$ と同型である

$$\begin{array}{c} \widetilde{Sh}_{\widetilde{K}_W}(P_W, \widetilde{X}_W) \\ \downarrow J_W\text{-torsor} \\ Y_W \xrightarrow[\text{abelian scheme}]{} Sh_{K_W}(G_W, X_W)/\mathbb{C} \end{array}$$

a)．b) より mixed Shimura variety も標準的に複素代数多様体の

構造を持つ.

我々の場合, この複素多様体は §1.2 におけるのと同様, moduli的な解釈をもち, 従って arithmetic な model を得ることができる. ただし, abelian scheme だけでは不可能であり, より広い幾何的対象として 1-motive の概念の導入が必要である. ([De 3], [Bryl])
ここでは詳細は省略し ([Fu 2] を参照されたい) 特別な例を述べるだけにする. ただ, この場合も motif の視点が本質的であることは強調しておきたい. (Piatetski-Shapiro realization もこの視点からは自明となる.)

example degree $g$ の Siegel modular で, $W$ が maximal totally isotropic のとき. $K = K_n$ ; 前 example の通り. $K_W = P_W(\mathbb{A}^f) \cap K$

このとき $W \simeq \mathbb{Q}^g$ で. $U_W = Z_W = \mathbb{G}_a^{\frac{g(g+1)}{2}}$.

$$\widehat{X_W} \hookrightarrow \mathbb{C}^{\frac{g(g+1)}{2}} \supset \mathfrak{h}_g^{\pm} \qquad X_W = 1\text{点}.$$

$\widehat{Sh}_{\widehat{K_W}}(P_W, \widehat{X_W})$ の連結成分は

$$\mathbb{C}^{\frac{g(g+1)}{2}} / \underbrace{Z_W(\mathbb{Q}) \cap g K_W g^{-1}}_{\simeq\, \mathbb{Z}^{\frac{g(g+1)}{2}}} \qquad g \in P_W(\mathbb{A}^f)$$

$$\simeq (\mathbb{C}/\mathbb{Z})^{\frac{g(g+1)}{2}} \simeq \mathbb{G}_m^{\frac{g(g+1)}{2}} \quad ; \ \frac{g(g+1)}{2}\text{-dim torus (split)}.$$

となる. この時の moduli的解釈は

$\widehat{Sh}_{\widehat{K_W}}(P_W, \widehat{X_W}) = \{ M = [\mathbb{Z}^g \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^g]$ の形の complex で level $n$-structure をもつものの moduli space,

ただし $M$ は $u(e_i) = \begin{pmatrix} q_{i1} \\ \vdots \\ q_{ig} \end{pmatrix} \in \mathbb{G}_m{}^g$, $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ と書いたとき $q_{ij} = q_{ji}$ をみたすとする（主偏極に相当）. level $n$ 構造はここでは述べない、 $\} \hookrightarrow \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[\zeta_n, \frac{1}{n}][q_{ij}^{\frac{1}{n}}, 1 \leq i \leq j \leq g]$

この $M$ が 1-motive と呼ばれるものの極めて特別な例である.
今の場合. mixed Shimura variety は自然に $\mathbb{Z}[\frac{1}{n}]$ 上定義されていることに注意されたい.
$g=1$, $n=1$ のときは単に

$$\text{moduli space} = \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[q, q^{-1}]$$

この上にある universal object : $[\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$ となる.
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad 1 \longmapsto q$

§3. Arithmetic toroidal compactification

3.1.

$(G, X)$ を §1.2 の通りとし. $K \subset G(\mathbb{A}^f)$, 素数 $p$ は $K$ に関し good とする. 簡単のため $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_E$ の $\mathfrak{p}$ での局所環上で考えることにする.
仮定より $Sh_K(G, X)$ の arithmetic model $\mathcal{X}$ が $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上とれるが, §2 の注意より rational boundary component $W$ に対する mixed Shimura variety $\widetilde{Sh}_{K_W}(G, X)$ の arithmetic model $\mathcal{X}_W$ も $\mathrm{Spec}\,\mathcal{O}_{E,\mathfrak{p}}$ 上

とれる。$\mathfrak{X}_W$ は別の base $\mathcal{Y}_W$ 上の $\mathcal{T}_W$-principally homogeneous space の構造をもつのであった（この構造も arithmetic に定義できる）

$(N_W)_{\mathbb{R}} = (\mathcal{T}_W$ の 1-parameter subgroups$) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ とし、

$(N_W)_{\mathbb{R}}$ 内の self-adjoint cone $C(W)$ を

$C(W) = \{ \varphi$ ; 対称形式 $\varphi : W \times W \to \mathbb{R}$ で
$\varphi(\ell x, y) = \varphi(x, \ell^* y)$ をみたし、半正定値なもの $\}$

と定義し、$\Sigma_W$ を $C(W)$ 内の或る有理多面体錐の集合とする。

$\widetilde{\mathcal{T}}_W = \mathcal{T}_W(\Sigma_W)$ を $\Sigma$ に対応する $\mathcal{T}_W$ の affine torus embedding とする。$\widetilde{\mathcal{T}}_W$ は $\mathcal{T}_W$-作用をもち $\mathcal{T}_W$ を $\mathcal{T}_W$ 同変に含む ([KKMS])。

そこで $\mathfrak{X}_W$ の $\mathcal{T}_W$-bundle 構造を $\widetilde{\mathcal{T}}_W$ で"ねじって"

$$\widetilde{\mathfrak{X}}_W = \mathfrak{X}_W(\Sigma_W) = \mathfrak{X}_W \times_{\mathcal{T}_W} \widetilde{\mathcal{T}}_W \quad : \widetilde{\mathcal{T}}_W\text{-fibration}/\mathcal{Y}_W$$

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{X}_W \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "\mathcal{T}_W"'] & & \widetilde{\mathfrak{X}}_W \arrow[dl, "\widetilde{\mathcal{T}}_W"] \\
& \mathcal{Y}_W &
\end{tikzcd}$$

という $\widetilde{\mathcal{T}}_W$-fibration を作り、$\mathfrak{X}_W$ の ($\Sigma_W$ による) partial compact 化と呼ぶ。さらに $\mathfrak{X}_W^{\wedge}$ を $\widetilde{\mathfrak{X}}_W$ の closed $\mathcal{T}_W$-orbit に関する完備化とする。

example 3.1.1

$\mathfrak{X}_W = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[q, q^{-1}] = \mathcal{T}_W = \mathbb{G}_m$ であり、$M = [\mathbb{Z} \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m]$, $1 \mapsto q$ が universal object であった。このとき

$\widetilde{\mathfrak{X}}_W = \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[q] = \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ : $\mathbb{Z}$ 上のアファイン直線

となり closed orbit は $\infty = \widehat{\mathfrak{X}_W} \setminus \mathfrak{X}_W = \{q=0 \text{ in } \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}\} \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$ となる. 従って $\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}[[q]] = \mathbb{Z}$ 上の一変数べキ級数環.
この場合. $\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge}$ は $q$ 進位相に関し完備であるから. 解析的に
$A_W =$ "$\mathbb{G}_m/u(\mathbb{Z})$" $=$ "$\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$" という $\mathbb{G}_m$ の discrete群 $q^{\mathbb{Z}}$ による商を考えることができる. これは $\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge}[\frac{1}{q}]$ 上では elliptic curve になり. $q=0$ の上では $\mathbb{G}_m$ になる幾何的対象を与える. これらは semi-abelian scheme と呼ばれるものの一例である.
この elliptic curve の場合の構成は Tate によるもので. $A_W$ は Tate curve と呼ばれるが. より一般の構成は Mumford により 1970 年代前半に行なわれた. (Mumford 構成と呼ばれる. [Mum], [Chai] [Fa] [Fu1])
それを我々の場合に適用すると

Proposition 3.1.2

$\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge}$ 上の universal な 1-motive $M_W$ から Mumford 構成により作られる semiabelian scheme $A_W/\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge}$ は $\widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge}$ の開集合 $U=\pi^{-1}(\mathfrak{X}_W)$ 上 abelian scheme となり $*$-polarization. $L_{\mathbb{Z}}$-multiplication. level-structure を持ち. 従って $\mathfrak{X}$ への射を与える.
但し. $\pi : \widehat{\mathfrak{X}_W}^{\wedge} \to \mathfrak{X}_W$ は標準射.

を得る. そこで. 我々の主定理は

Main theorem.

$\Sigma = \{\Sigma_W \quad W$: rational boundary component$\}$ という admissible cone decomposition を一つ固定する.

するとこの $\Sigma$ に対する $\mathcal{X} = Sh_K(G, X)/\mathcal{O}_{E,\wp}$ の arithmetic toroidal compact化 $\hat{\mathcal{X}} = \mathcal{X}(\Sigma)/\mathcal{O}_{E,\wp}$ が存在する:

a) $\hat{\mathcal{X}}$は$\mathcal{X}$ を開集合として含む $\mathcal{O}_{E,\wp}$ 上固有, smooth な algebraic stackであり. ($K$: neat なら algebraic space)

b) universal な abelian scheme $A/\mathcal{X}$ は $\hat{\mathcal{X}}$ 上の semiabelian scheme $\hat{A}$ に一意的に拡張され

c) 前 proposition による射

$$\rho_W : \pi^{-1}(\mathcal{X}_W) \longrightarrow \mathcal{X} \quad , \Sigma_W \in \Sigma$$

は
$$\hat{\rho}_W : \mathcal{X}_W^\wedge \longrightarrow \hat{\mathcal{X}}$$

に一意的に拡張され, $\hat{\rho}_W$ は formally etale.

の a)〜c) が成り立ち $\hat{\mathcal{X}}$ はこの条件で一意的に決定される.

もちろん, 複素数体上考えたときには従来の toroidal compact化 [AMRT] と一致する. $\hat{\mathcal{X}}$ はスキームになるとは限らないが. $\Sigma$ が適当な条件をみたすときには射影スキームとなる. (Tai の定理の類似)

3.2. この定理は elliptic modular case では Deligne–Rapoport が確立し. Hilbert–Blumenthal のとき Rapoport が70年代半ばに.

そして Chai 及び Faltings が 1983年に Siegel modular のとき証明したものである。

この三者の仕事は質的に異なっているが、とくに後2つの case では toroidal compact 化が moduli 的意味を持たないため、曲線の moduli の compact 化のときのような自然な構成が不可能である。

筆者の方法は Rapoport 及び Faltings の仕事を組み合わせて発展させたものだが、abel 多様体の退化の詳細な研究に依存している。

motif の哲学からいえば、

「高次元底空間上の motif の semi-stable な退化理論の存在が、arithmetic な toroidal compact 化の存在に導びく」

のであり、特にはり合わせがうまくいくことは weight filtration の compatibility で保証されるのである。

3.3 最も簡単な elliptic modular curve を例にとり説明を試みる。elliptic curve の moduli 空間 $\mathcal{M} = A_{1,1}$ に $\infty$ を付け加えるのだが、($\mathcal{E}/\mathcal{M}$ : universal curve) $\infty$ での完備化が ($\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$, Spec $\mathbb{Z}[[q]]$) になるような $\mathbb{Z}$ 上有限型のスキーム $(A, S)$ をとる必要がある。これは Artin の近似定理を注意深く使うことで構成される。そこで $U \subset S$ を $A$ が elliptic curve になる開集合とすると $D = S - U$ 上では $A$ は $\mathbb{G}_m$ になっており、$A$ の $U$ への制限 $A_U/U$ から定まる射 $\varphi : U \to \mathcal{M}$ が（適当に $S$ を縮めると）もし étale となれば

$(A, S)$ は $\infty$ 近くでの望むべき etale 近傍であることがいえる.
後のはり合わせはむしろ易しいので. 問題は $\varphi$ の etaleness の check であり. 完備化して考えて $\varphi^\wedge : \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[[q]][\frac{1}{q}] \to \mathcal{M}$ が formally smooth であることを示さなくてはならない. (openness of versality)
Faltings の方法では. Tate curve からきまる family の小平－Spencer class を計算することで $\varphi^\wedge$ が各点の接空間に同型を引き起こすことをいうのだが. 空間が特異性をもつときの考慮は難しい.
筆者の方法では $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[[q]][\frac{1}{q}]$ の閉点 $x = \mathrm{Spec}\,k$. ($k$: 完備離散付値体) で $x$ での $\mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}}$ の fiber $A_x = \mathbb{G}_m/q_x^{\mathbb{Z}}$ ($q_x \in k$). を $k$ を剰余体とする Artin 環 $R$ まで変形する. (elliptic curve として).
すると Raynaud－Tate の理論から $A_x$ の変形を考えることは
$$M_x = [\mathbb{Z} \to \mathbb{G}_m]/k, \quad 1 \mapsto q_x$$
の変形を考えることと同値となり. もともと $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[[q]][\frac{1}{q}]$ が $M_x$ の変形に関して universal であったことから (moduli的意味参照) $A_x$ の変形についても universal. 従って $\varphi^\wedge$ は $x$ で formally smooth となり. $x$ を動かして $\varphi^\wedge$ が formally smooth なことを得るのである.

この方法は単純であるだけに特異性にも強く, 一般性にも富むが. $G^{der}$ の $\mathbb{Q}$ rank が高いときには Abelian scheme の退化は複雑であり. 本質的に難しくなる. 詳細については [Fu1]. [Fu2] を参照されたい.

Applications

§4 この§では toroidal compact化の存在から導びかれる標準的定理について述べる ([De−Ra], [Ra], [Chai−Fa] 参照) [Bry1].

4.1. $(G, X)$ を§1の通りとし, $K \subset G(\mathbb{A}^f)$, $n_K = \prod(\text{bad primes})$ とすると arithmetic model $\mathcal{X}$, universal abelian scheme $\mathcal{A}/\mathcal{X}$ は全て $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$ 上定義された. cone 分割 $\Sigma$ を固定するとき, 対応する arithmetic toroidal compact化 $\overline{\mathcal{X}}$, semi abelian scheme $\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}}$ についても同様である.

そこで

$$(\mathrm{Lie}\,\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}})^\vee = \overline{\mathcal{A}}\text{上の不変微分形式のなす}\ \overline{\mathcal{X}}\text{上の層}$$
$$= e^*\Omega^1_{\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}}} \qquad (e : \overline{\mathcal{X}} \to \overline{\mathcal{A}}\ \text{0-section})$$

とおくとこれは $\overline{\mathcal{X}}$ 上の vector束であるので, その最高次外積

$$\omega = \det(\mathrm{Lie}\,\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}})^\vee = \bigwedge^g (\mathrm{Lie}\,\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}})^\vee$$
$$g = \mathrm{rk}(\mathrm{Lie}\,\overline{\mathcal{A}}/\overline{\mathcal{X}})^\vee.$$

を考えると, $\omega$ は $\overline{\mathcal{X}}$ 上の直線束である.

Definition. $R$ を $\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]$−代数とするとき. $R$係数, weight $k$ の modular form とは $\omega^{\otimes k}$ の $\overline{\mathcal{X}}_R$ 上の global section のこと.
但し $\overline{\mathcal{X}}_R = \overline{\mathcal{X}} \times_{\mathcal{O}_E[\frac{1}{n_K}]} R$, $f : \overline{\mathcal{X}}_R \to \mathrm{Spec}\,R$.

つまりその全体の空間は $\Gamma(\bar{\mathfrak{X}}_R, \omega^{\otimes k}) = f_* \omega^{\otimes k}$ (sheafとして) となる.

この定義ではvector値の場合を扱っていないが, その場合を扱うこともできる. また a priori には toroidal compact化 $\bar{\mathfrak{X}}$ のとり方に依存するように見えるが, 実際は選択に無関係に定まる.

スキーム論において基本的な定理の一つである「proper morphism による連接層の高次順像は連接である」(Grauert の定理の類似) を $f, \omega^{\otimes k}$ に適用すれば直ちに

定理 4.1.1 (finitude).

R係数, weight $k$ の modular form の空間は有限生成 R加群をなす

がいえる. これは compact化の存在なしに証明することは困難な定理だと思う. 実際にはさらに強く. ($R = O_E[\frac{1}{N}]$ とする) modular form のなす同次座標環 $\mathcal{R} = \bigoplus_k \Gamma(\bar{\mathfrak{X}}, \omega^{\otimes k})$ は R上有限生成の同次環になる. (finite generation for log-canonical ring).

これは Mumford 等による結果を強めた

定理 4.1.2 (Moret-Bailly)

S : 既約ネーター正規スキーム. $\mathcal{A}/S$ : semiabelian scheme で, 生成ファイバーは固有. $\omega = \det(\mathrm{Lie}\,\mathcal{A}/S)^\vee$ とするとき

$\omega$ は $S$ 上 semi-ample（つまり $\omega$ は何乗かすると base point free.）

からただちに導びかれる.（この定理は theta nullwerte を代数的に扱うことで得られる.）.

特に $\mathfrak{X}^* = \mathrm{Proj}\,\mathcal{R}/R$ （$\mathcal{R}$ に伴なう射影スキーム）とすると $\mathfrak{X}^*$ は正規, 自然な射影 $g : \bar{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{X}^*$ をもつ.

さらに $j$ を右図で定義すると

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X} \arrow[r, hook] \arrow[dr, "j"'] & \bar{\mathfrak{X}} \arrow[d, "g"] \\ & \mathfrak{X}^* \end{tikzcd}$$

定理 4.1.3（arithmetic な佐武 Baily–Borel compact化の存在）

$j$ は開埋入であり, $\mathbb{C}$ 上で $\mathfrak{X}^*$ は佐武 Baily–Borel compact化を与える.

このように, arithmetic な佐武 compact 化も得られるのである.（$\mathfrak{X}^*$ を或る種の極小性で特徴づけることもできる.）

4.2. 4.1 で modular form を定義し, その基本的な性質を導いたが, 4.1の定義と古典的な modular form の $q$ 展開を用いた定義とが一致することをいわなければ意味が半減するだろう. ここでは modular form の Fourier (-Jacobi) 展開の代数的理論（Siegel's $\Phi$-operator）を述べる.（[Bryl] 参照）.

記号は 3.1 と同じとし, $A_W$ を $S = \hat{\mathfrak{X}}_W$ 上の semiabelian scheme,

$U = \pi^{-1}(\mathcal{X}_W)$,  $p_W : U \to \mathcal{X}$ を $A_W$ の決める射とする

ここで $\tilde{\mathcal{X}}_W$ を作る際に使った cone 分割 $\Sigma_W$ が toroidal compact化 $\tilde{\mathcal{X}}$ をきめる cone 分割 $\Sigma = \{\Sigma_W\}$ に入っているとすると, $p_W$ は

$\tilde{p}_W : S \to \tilde{\mathcal{X}}$ にのびた. (Main theorem).

そこで $f$ が weight $k$ の modular form とすると (簡単のため係数環は $\mathcal{O}_E[\frac{1}{nk}]$ とする.) $f$ の引き戻し $\tilde{p}_W^{*} f$ は $S$ 上の $\omega^{\otimes k}$ の global section, つまり $\Gamma(S, \omega^{\otimes k})$  $\omega = \det(\mathrm{Lie}\, A_W/S)^{\vee}$ の元となる.

$\mathcal{X} = \mathcal{A}_g$ = degree $g$ の Siegel modular (full level), $W = \mathbb{Q}^g$ のときに計算してみる. (§2, example 参照)

universal な 1-motive は $M_W = [\mathbb{Z}^g \xrightarrow{u} \mathbb{G}_m^g]/U$.

$S = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[[q_{ij}]]$, $U = S[q_{ij}^{-1}] = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[[q_{ij}]][q_{ij}^{-1}]$ $(1 \leq i \leq j \leq g)$.

(直観的には $Z = (z_{ij}) \in \mathfrak{H}_g$ とするとき

$$q_{ij} = \exp 2\pi i \operatorname{Tr} S_{ij} Z. \qquad S_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 0 \end{bmatrix} \ (i,i) \text{だけ} 1$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} & & \frac{1}{2} \\ & & \\ \frac{1}{2} & & \end{bmatrix} \ (i,j) \text{だけ} \tfrac{1}{2}.\ i \neq j.)$$

このとき $A_W$ = "$\mathbb{G}_m^g / u(\mathbb{Z}^g)$".

$\omega = \det(\mathrm{Lie}\, A/S)^{\vee}$ は $\mathcal{O}_S$ と同型. つまり $p_W^{*} f \in \mathcal{O}_S$ と思え,

$$p_W^{*} f = \sum_{\substack{S \\ S:\ \text{half integral, positive symmetric}}} a_S \cdot \exp 2\pi i \operatorname{Tr} SZ \qquad a_S \in \mathbb{Z}$$

と書けることになる これはまさに古典的な Fourier 展開である.

一般の $W$ に対しては Fourier–Jacobi 展開を得ることになる.

係数環が一般の場合も同様である. 次の定理は一見あたり前にみえて深いものである.

定理 4.2.1 ( q-expansion principle )

$R, R'$ を $O_E[\frac{1}{nk}]$-代数とし, $R \subset R'$ とする.

$f$ を $R'$係数, weight $k$ の modular form とし, ある $w$ に関する Fourier-Jacobi展開が $R$ に 係数をもつとする.

このとき $f$ は $R$係数の modular form になる.

4.1で定義された $R$係数 という言葉が, この定理で正当化される.
( 今の場合は $\mathcal{X}$ は good reduction で, bad reduction の場合 はより深い定理となろう. )

この定理は, さらに $\mathcal{X}$ という moduli problem の解として定義された arithmetic model が $O_E[\frac{1}{nk}]$ に Fourier係数をもつ $\mathbb{C}$上の modular form による同次座標環 の Proj の開集合 であることを示し ( $R = O_E[\frac{1}{nk}]$, $R' = \mathbb{C}$ とせよ. ) canonical な存在であることを保証する. ( ただし, この同次座標環が有限生成なことを直接証明することは極めて困難である. )

他にも $\mathbb{C}$上成り立つ定理のほとんどは arithmetic にも成立する

定理 4.2.2 (Koecher principle)

Xの連結成分である有界対称領域に1次元の因子がないと仮定する. すると

$$\Gamma(\mathfrak{X}, \omega^{\otimes k}|_{\mathfrak{X}}) = \Gamma(\bar{\mathfrak{X}}, \omega^{\otimes k}).$$

つまり $\mathfrak{X}$ 上 regular な meromorphic modular form は自動的に regular.

他にも $\ell$進 cohomology の性質, reduction の基本性質, 合同関係式等の応用があるが ここでは省かせていただく. ([Chai-Fa] 参照 ).

4.3. 最後に Deligne-Ribet の仕事と関連する話題について述べる、( cf. [De-Ri] )

Fを総実代数体とするとき p進L関数を定義するためには L関数の負の整数での特殊値に対し或る種の合同性ということが必要となる. (例えば $F=\mathbb{Q}$, $\varepsilon$: mod $f$ で定義された Dirichlet 指標, $p$: 素数 $c$: $pf$ と素 とするとき

$$(1-c^k\varepsilon(c))L(1-k,\varepsilon)\in\mathbb{Z}_p \quad k\in\mathbb{Z},\ k>0 \ )$$

望むべき合同式は Barsky, Cassou-Noguès により新谷の公式を使う方法で得られるが. これより以前に Deligne は Hilbert modular form の算術的理論を使う手法を構想し. (1970年頃).

Rapoportによる Hilbert－Blumenthal modular variety の arithmetic な compact化，Ribetによる寄与を経て 完全に確立された.(1976).

その idea は L関数の特殊値を Eisenstein 級数の或る cusp での Fourier展開の定数項として解釈し 他の cusp での Fourier係数を調べ，次の Deligne principle にもちこむところにある.

(Deligne principle)　　R：flat $\mathbb{Z}_p$－module

F：p進 Hilbert modular form で 或る 1つの cusp での $q$ 展開係数が定数項を除き R に入るものとする

このとき 勝手な 2つの cusp での $q$ 展開の定数項の差は R に属する.

この原理は 4.2 に述べたものよりはるかに強い形の $q$－expansion principle より従うが（雑にいうと level N－structure があるときに N を割る素数で $q$－expansion principle をいう必要がある.）この強い形を出すためには 次に述べる big monodromy theorem が必要とされる：

定理 4.3.1

§1 と同じ記号で，V が $\mathbb{Q}$ 上定義された maximal totally isotropic，L－stable な部分空間 W をもつとする（$G^{\mathrm{der}}$ の $\mathbb{R}$－rank ＝

$\mathbb{Q}$-rank.) $p$ を $K$ に関し good とし，$\mathfrak{p}$ : $p$ 上の $E$ の素点.
$\mathcal{X}_{\mathfrak{p}} = \mathcal{X} \times_{\mathcal{O}_E} \overline{k(\mathfrak{p})}$， $k(\mathfrak{p})$ : $\mathfrak{p}$ での剰余体. $\overline{k(\mathfrak{p})}$ : 代数閉包.
$\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{0} \subset \mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ を universal abelian scheme $\mathcal{A}/\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ が ordinary となる点全体のなす subvariety とする. このとき

1) (Generic ordinarity)

$\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{0}$ は $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ 内で dense open.

2) (Big monodromy)

$\mathcal{F}$ を $\mathcal{A}$ の $p$ 巾等分点に伴う $p$ 進 etale 層とする.
これは $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{0}$ では $p$ 進の局所系をなすので

$\rho : \pi_1(\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}^{0}) \longrightarrow GL_{L_{\mathbb{Z}}}(W_{\mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$ 　　$W_{\mathbb{Z}}$ : $W$ の或る $\mathbb{Z}$-lattice

という基本群の $p$ 進表現と対応するが

$\rho$ は全射

が成り立つ.

1) は $\mathcal{X}_{\mathfrak{p}}$ の既約成分の数の決定と, toroidal compact 化の boundary 近くでは $\mathcal{A}$ は ordinary であることから導かれる.
2) は elliptic modular の時は井草の定理と呼ばれ古くから知られていたものだが, Hilbert Blumenthal のときは Ribet による.
Big monodromy theorem は Siegel modular variety のとき Katz-Lang が問題として述べたもので, Ribet の方法は通用しないため困難と思わ

れていたが、Chai－Faltings が toroidal compact 化の応用として導いた．（[Chai-Fa]）．
証明の原理は実に簡単で，compact 化の境界に沿っての局所 monodromy が $SL_{L_\mathbb{Z}}(W_\mathbb{Z} \otimes_\mathbb{Z} \mathbb{Z}_p)$ の部分を張ってしまうことがすぐいえて，残りの部分は井草の定理にうったえることによって処理される．
これは Ribet の定理に対する別証になっているが，井草の定理そのものに別証を与えるものではない．
結果として，この場合の Deligne principle の拡張が示されることになる．
このように，合同性を論じるのにも compact 化を使うことは本質的に merit があると思う（最近の Taylor の仕事もその一例といえるだろう）．
さらに，Eisenstein series の整数性を Harris の方法で論じるなどの話題もあるが，別の機会にゆずろうと思う．
（志村多様体以外の modular variety に対し compact 化理論を拡張することも価値のある問題であることを注意しておきたい．）

## Reference

[AMRT] A.Ash, D.Mumford, M.Rapoport, Y.Tai.- Smooth compactifications of locally symmetric varieties, Math.Sci.Press, 1975

[Art] M.Artin.- Algebraic approximation of structures over complete local rings, Publ.Math IHES no.36 (1969), pp.23-58

[Bryl] J.L.Brylinski.- 1-motifs et formes automorphes, in Jounées automorphes 15, Publications Mathématique de l'université Paris Ⅶ, (1983)

[Chai] C.L.Chai.- Compactification of Siegel moduli schemes, Lecture Note Series 107, London Mathematical Society, Cambridge university press, 1985

[Chai-Fa] C.L.Chai and G.Faltings .- Semiabelian degeneration and compactification, prepublication.

[De 1] P.Deligne.- Travaux de Shimura, Séminaire Bourbaki, 1970/1971, Exposé 389, Lecture Notes in Math 244, Springer Verlag, 1971

[De 2] __________.- Variété de Shimura : interpretation modulaire, et techniques de construction de modéles canoniques, Proc.Symp.Pure.Math, A.M.S. 33 (1979) part 2, pp.247-290

[De 3] __________.- Theorie de Hodge Ⅲ, Publ.Math IHES 44 (1974), pp.5-77

[DM] P.Deligne, D.Mumford.- The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ.Math. IHES no.36 (1969) pp.75-109

[De-Ra] P.Deligne, M.Rapoport.- Les schémas de modulus de courbes elliptiques, Lecture Notes in Math, 349(1973), pp.143-316, Springer Verlag

[De-Ri] P.Deligne, K.Ribet.- Values of abelian L-functions at negative integers over totally real fields, Inv. Math 59 (1980), pp.227-286

[DMOS] P.Deligne, J.S.Milne, A.Ogus, K.Shih.- Hodge Cycles, Motives, and Shimura varieties, Lecture Notes in Math 900, (1982), Springer Verlag

[Fa] G.Faltings.- Arithmetische kompactifizierung des moduleraums de abelschen varietäten, Lecture Notes in Math.1111. Springer Verlag 1985, pp.321-383

[Fu 1] K.Fujiwara.- Theory of semiabelian schemes and associated 1-motives over complete base, preprint.

[Fu 2] __________.- Arithmetic compactifications of Shimura varieties (I), preprint.

[I] J.-I. Igusa.- A desingularization problem in the theory of Siegel modular functions, Math.Ann. 168(1967), pp.228-260. MR36 # 1439

[Ka-Ma] N.Katz, B.Mazur.- Arithmetic moduli of elliptic curves, Annals of Math Studies, Princeton University Press 108 (1985)

[KKMS] G.Kemph, F.Knudsen, D.Mumford, B.Saint-Donat.- Toroidal embeddings I, Lecture Notes in Math. 339.Springer Verlag 1972.

[La-Ra] R.P.Langlands, M.Rapoport.- Shimuravarietäten und Gerben, J. reine angew. Math. 378 (1987), pp.113-220

[Mi] J.S.Milne.- The action of an automorphism of $\mathbb{C}$ on a Shimura variety and its special points, in Arithmetic and Geometry vol 1, ed.by M.Artin and J.Tate, Progress in Math (1983) Birkhäuser.

[M-B] L.Moret-Bailly.- Pinceaux de variété abélienne, Asterisque 129 1985

[Mum] D.Mumford.- An analytic construction of degenerating abelian varieties over complete rings, Compositio Mathematics 24,(1972), pp.239-272

[Na] Y.Namikawa.- A new compactification of the Siegel space and degeneration of abelian varieties I.II. Math. Ann. 221, (1976), pp.97-141, 201-241

[Ra] M.Rapoport.- Compactifications de l'espace de modulus de Hilbert-Blumenthal, Compositio. Math, 36, (1978), pp.255-335

[Sh] G.Shimura.- On arithmetic automorphic functions, Actes. Congrès intern. Math, Nice (1970) tome 2, pp.343-348

[Zink] T.Zink.- Isogenieklassen von Punkten von Shimuramannigfaltigkeiten mit Werten in einem endlichen Körper, Math. Nacher. 112 (1983), pp.103-124