数理解析研究所講究録
第727巻 1990年 156-162

Sp_n 上の Fourier-Jacobi 型 Whittaker 函数

京都産業大学理　村瀬 篤 (Atsushi Murase)
三重大学理　菅野 孝史 (Takashi Sugano)

Whittaker 函数は，Jacquet-Langlands の仕事に見られるように，保型 L-函数の理論において最も基本的な道具の一つである。最近 Bump は，GSp_2 上の generic な cusp form の spinor L-函数を，Whittaker 函数によって積分表示し，それをさらに Rankin-Selberg 型の積分表示に変形することにより，解析接続，函数等式を導いた。([Bump] 参照。) しかしながら，次数2以上の holomorphic な Siegel cusp form は generic でない（すなわち，付随する Whittaker 函数 $\equiv 0$ ）ため，Bump の方法は non-holomorphic form に対してのみ有効である。従って，Whittaker 函数の様々な modification を考え，それらが保型 L-函数の理論に役立つかどうかは，興味深い問題と思われる。

本稿では，Shintani ([Shintani]) によって導入された Fourier-Jacobi 型の Whittaker 函数を考察し，

Euler 積分解 (Th.1), standard zeta 函数との関係 (Th.4) を述べる。これらは，Shintani によって予想されていた結果である。

Shintani の Whittaker 函数 (以後 Whittaker-Shintani (WS) 函数と呼ぶ) は，本来の Whittaker 函数に比べ複雑な性質をもつが，holomorphic cusp form に対して恒等的に 0 にならない (ある弱い条件の下で) という長所をもつ。詳細については [M-S] を見られたい。

§1. WS-函数の定義

~~$G^* = Sp_n$~~

$G^* = Sp_{n+1}$, $G = Sp_n$ とする。G を $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & a & & b \\ & & 1 & \\ & c & & d \end{bmatrix}$ なるうめこみにより，G^* の部分群とみなす。

次数 n の Heisenberg 群 H を，

$$H_{\mathbb{Q}} = \left\{ (\lambda, \mu, \kappa) := \begin{bmatrix} 1 & & \kappa & \mu \\ & 1_n & {}^t\mu & 0 \\ & & 1 & \\ & & & 1_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & & \\ & 1_n & & 0 \\ & & 1 & \\ 0 & & -{}^t\lambda & 1_n \end{bmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{Q}^n,\ \kappa \in \mathbb{Q} \right\}$$

により定め，Jacobi 群 $\mathbb{G}$ を，H と G の (G^* 内での)

半直積により定義する。$\mathfrak{G}$は，中心 $Z(\mathfrak{G})=\{(0\,0\,k)\}$ をもつ $\mathbb{Q}$上の non reductive algebraic group である。

$\psi_{\mathbb{A}}$ を $\mathbb{Q}$ の adele 環 $\mathbb{A}$ の additive character で $\psi_{\mathbb{A}}(x_\infty)=\mathbf{e}[x_\infty]=\exp(2\pi i x_\infty)$ $(x_\infty\in\mathbb{R})$ をみたすものとする。

$F: G^*(\mathbb{Q})\backslash G^*(\mathbb{A})\longrightarrow\mathbb{C}$ を G^*上の cusp form, $f:\mathfrak{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{G}(\mathbb{A})\longrightarrow\mathbb{C}$ を level 1 (すなわち $f((0\,0\,k)g)=\psi_{\mathbb{A}}(k)f(g)$ $(k\in\mathbb{A},\ g\in\mathfrak{G}(\mathbb{A}))$ をみたす) の Jacobi cusp form とする。 cusp fi

cusp form の組 (F, f) に対し，global WS-函数 $W_{F,f}$ を次のように定義する ([Shintani]):

(1.1)
$$W_{F,f}(g^*)=\int_{\mathfrak{G}(\mathbb{Q})\backslash\mathfrak{G}(\mathbb{A})} F(xg^*)\overline{f(x)}\,dx \quad (g^*\in G^*(\mathbb{A}))$$

§2 WS-函数の Euler 積分解

以後，F, f を Hecke 作用素の同時固有函数 (Hecke eigenform と呼ぶ) とする。 このとき，$\mathbb{Q}$の有限素点 p に対し，F, f に対応する Satake parameter $\chi^{(p)}=(\chi_p^{(1)},\dots,\chi_p^{(n+1)})\in\mathbb{C}^{n+1}$, $\xi^{(p)}=(\xi_1^{(p)},\dots,\xi_n^{(p)})\in\mathbb{C}^n$

が各々定まる。

<u>Theorem 1</u>　$W_{F,f} \neq 0$ とすると、

$$(1.2)\qquad W_{F,f}\left(\prod_v g_v^*\right) = \prod_v W^{(v)}(g_v^*)$$

ここで、$W^{(v)}$ は、$G^*(\mathbb{Q}_v)$ 上の

$$W^{(v)}(e) = \begin{cases} 1 & v = p \\ W_{F,f}(e) & v \neq \infty \end{cases}$$

をみたす函数で、$v=p$ のときは Satake pameters $\chi^{(p)}, \xi^{(p)}$ のみで定まる。

$S_\ell^{(n+1)}$ を、$G^*(\mathbb{Z}) = Sp_{n+1}(\mathbb{Z})$ に関する weight ℓ の holomorphic Siegel cusp forms の空間、$\mathfrak{S}_{\ell,m}^{(n)}$ を、$\mathbb{G}(\mathbb{Z})$ に関する weight ℓ, index m の Jacobi cusp forms の空間とし、$\mathfrak{S}_{\ell,m}^{(n)}$ の Petersson 内積を $\langle\langle\, ,\, \rangle\rangle_{\ell,m}$ で表わす（詳細は [M] をみよ）。$F \in S_\ell^{(n+1)}$ を

$$F\begin{pmatrix} \tau & w \\ {}^t w & z \end{pmatrix} = \sum_{m=1}^{\infty} F_m(z,w)\, \mathbf{e}[m\tau]$$

$\left(\begin{array}{c|cc} & 1 & n \\ 1 & \tau & w \\ n & {}^t w & z \end{array} \in H_{n+1} = \text{次数 } n+1 \text{ の Siegel 上半空間}\right)$ と Fourier-Jacobi 展開すると、よく知られているように、$F_m \in \mathfrak{S}_{\ell,m}^{(n)}$ である。

<u>Proposition 2</u> $F \in S_\ell^{(n+1)}$, $f \in S_{\ell,1}^{(n)}$ とすれ,

$$W_{F,f} \neq 0 \iff W_{F,f}(e) = \langle\langle F_1, f \rangle\rangle_{\ell,1} \neq 0$$

ここに，$W_{F,f}$ は，F, f の adele 群上への lifts に付随する WS 函数とする。

<u>Corollary 3</u> $F \in S_\ell^{(n+1)}$ を Hecke eigenform とする。このとき，$F_1 \neq 0$ ならば，Hecke eigenform $f \in S_{\ell,1}^{(n)}$ で $W_{F,f} \neq 0$ なるものが存在する。

<u>§ 3 WS 函数と standard zeta 函数</u>

$F \in S_\ell^{(n+1)}$, $f \in S_{\ell,1}^{(n)}$ を Hecke eigenform とするとき，それらの standard zeta 函数を

$$D(s, F) = \prod_{p<\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n+1} (1 - \alpha_i^{(p)} p^{-s})(1 - \alpha_i^{(p)-1} p^{-s}) \right\}^{-1} \times (1 - p^{-s})^{-1}$$

$$D(s, f) = \prod_{p<\infty} \left\{ \prod_{i=1}^{n} (1 - \xi_i^{(p)} p^{-s})(1 - \xi_i^{(p)-1} p^{-s}) \right\}^{-1}$$

により定義する。

Theorem 4 $F \in S_\ell^{(n+1)}$, $f \in S_{\ell,1}^{(n)}$ を Hecke eigenform とする。このとき

$$(3.1) \quad \int_{\mathbb{A}^\times} W_{F,f}\left(\begin{bmatrix} t & & & \\ & 1_n & & \\ & & t^{-1} & \\ & & & 1_n \end{bmatrix}\right) |t|_{\mathbb{A}}^{s-n-1} d^\times t$$

$$= (2\pi)^{-(s+\ell-n-1)/2}\, \Gamma\left(\frac{s+\ell-n-1}{2}\right) \langle\!\langle F_1, f \rangle\!\rangle_{\ell,1}$$

$$\times \frac{D(s, F)}{D(s, f)}$$

Remark F, f が holomorphic form でないときも、(3.1) は "∞-成分" を除いて成立する（両辺の p-factor ごとに成立する）。

References

[Bump] D. Bump :

[M] A. Murase : L-functions attached to Jacobi forms of degree n, Part I. The basic identity,

J. für die reine und angw. Math.

[M-S] A. Murase and T. Sugano : Whittaker functions on the symplectic groups of Fourier-Jacobi Type, preprint 1990.

[Shintani] T. Shintani , unpublished notes