数理解析研究所講究録
第727巻 1990年 163-173

ジーゲル保型形式の標準L関数

東工大・理　水本信一郎 (Shin-ichiro Mizumoto)

1. Poles

$k, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し

$$M_k^n := \{ \text{holomorphic modular forms of weight } k \text{ w.r.t. } Sp(n, \mathbb{Z}) \text{ (size } 2n) \},$$

$$S_k^n := \{ \text{cusp forms} \in M_k^n \}$$

とする。

$f \in M_k^n$ を eigenform (すなわち Hecke algebra の non-zero common eigenfunction) とすれば、各素数 p に対し f の Satake p-parameters

$$(\alpha_1(p), \cdots, \alpha_n(p)) \in (\mathbb{C}^\times)^n$$

が Weyl 群の作用を除いてきまる。

ここで考えるL関数は次のものである:

$$L(s, f, \underline{St}) := \prod_{p:\text{素数}} \left\{ (1-p^{-s})^{-1} \prod_{j=1}^{n} (1-\alpha_j(p)p^{-s})^{-1} (1-\alpha_j(p)^{-1}p^{-s})^{-1} \right\}.$$

この右辺は $\mathrm{Re}(s) > n+k+1$ で（$f \in S_k^n$ ならば $\mathrm{Re}(s)>n+1$ で）広義一様に絶対収束する。この $L(s, f, \underline{St})$ は ${}^L Sp_n^\circ = SO(2n+1, \mathbb{C})$ の standard representation に対応する Langlands の意味の L 関数なので，f に付随した標準 L 関数とよぶ。

$$\Gamma_{\mathbb{R}}(s) := \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad \Gamma_{\mathbb{C}}(s) := 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$$

とし，

$$\Lambda(s, f, \underline{St}) := \Gamma_{\mathbb{R}}(s+\varepsilon) \prod_{j=1}^{n} \Gamma_{\mathbb{C}}(s+k-j) \cdot L(s, f, \underline{St})$$

とおく。ここで

$$\varepsilon := \begin{cases} 0 & (n \text{ even}), \\ 1 & (n \text{ odd}). \end{cases}$$

この関数について次のことが知られている（Andrianov / Kalinin [1] (special cases), Piatetski-Shapiro / Rallis [11], Böcherer [3]）：

$\Lambda(s, f, \underline{St})$ は全 s 平面に meromorphic に解析接続され，関数等式

$$\Lambda(s, f, \underline{St}) = \Lambda(1-s, f, \underline{St})$$

を満たす。

以下 $\Lambda(s, f, \underline{St})$ の poles についての結果を述べるため記号の準備をする。

$m, n \in \mathbb{Z}_{>0}$ と，1 をもつ ring R に対し

$$R^{(m,n)} := \{ m \times n\text{-matrix} \,;\, \forall \text{ entries} \in R \}$$ とする。

$\nu \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し

$$H_\nu(m,n) := \left\{ P : \mathbb{C}^{(m,n)} \longrightarrow \mathbb{C} : \text{polynomial fcn} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i)}\ P(XA) = \det(A)^\nu P(X) \\ \qquad (A \in GL(n,\mathbb{C}),\ X \in \mathbb{C}^{(m,n)}) \\ \text{(ii)}\ \displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_{ij}^2} P(X) = 0 \quad (X = (x_{ij})) \end{array} \right\}$$

は $\mathbb{C}$ 上の有限次元ベクトル空間である。

$$\mathcal{S}_m := \left\{ S \in GL(m,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{array}{l} {}^tS = S > 0, \\ \forall \text{ diag. entries} \in 2\mathbb{Z} \end{array} \right\}$$

とすると、よく知られているように

$$\mathcal{S}_m \neq \phi \iff m \equiv 0 \pmod 8$$

である。いま $m \equiv 0 \pmod 8$ と仮定して

$S \in \mathcal{S}_m$, $P \in H_\nu(m,n)$,

$Z \in \mathfrak{H}_n :=$ Siegel upper half space of degree n

に対して

$$\vartheta_{S,P}(Z) := \sum_{G \in \mathbb{Z}^{(m,n)}} P(S^{1/2}G) \exp\bigl(\pi i \operatorname{trace}(S[G]Z)\bigr)$$

$$(\text{但し } S[G] := {}^tGSG)$$

とすると、$\vartheta_{S,P} \in M^n_{\frac{m}{2}+\nu}$ となる。

$k \in \mathbb{Z}$, $k \geq m/2$ に対し

$$B_k^n(m) := \left\{ \vartheta_{S,P} \;\middle|\; S \in \mathcal{S}_m \,,\; P \in H_{k-\frac{m}{2}}(m,n) \right\}$$

は M_k^n の，Hecke algebra の作用で stable な subspace となる（Freitag [7]）。

$8 \nmid m$ のとき $B_k^n(m) := \{0\}$ とする。

Theorem 1. $f \in S_k^n$ を eigenform，$k \geq n$ とする。このとき $\Lambda(s, f, \underline{St})$ は $s=0$ と $s=1$ で possible simple poles をもつ他は holomorphic．さらに $\Lambda(s, f, \underline{St})$ が $s=0$ で（$\Leftrightarrow$ $s=1$ で）pole をもつための必要十分条件は $f \in B_k^n(2n) \cap S_k^n$ となることである。

Cor. $k \geq n$，$4 \nmid n$ ならば $\Lambda(s, f, \underline{St})$ は entire.

Remarks. (i) Theorem 1 の後半（$B_k^n(2n)$ に属する eigenform を $L(s, f, \underline{St})$ の $s=1$ でのふるまいで特徴づけること）は Weissauer [13]，Böcherer [4] の結果である。

(ii) $k > n$ ならば $B_k^n(2n) \subset S_k^n$.

(iii) $nk \equiv 0 \pmod 2$ をみたしながら $k \to \infty$ となるとき，ある $c_1, c_2 > 0$ があって

$$\dim B_k^n(2n) \leq c_1 k^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\dim S_k^n \sim c_2 k^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

となる。すなわち

$\Lambda(s, f, \underline{St})$ は "generic" な f に対して entire である。

(iv) $n=2$ のときの，次の結果と比較されたい。

$f \in S_k^2$: eigenform に対し

$L(s, f, \mathrm{spin})$: entire $\Leftrightarrow$ $f \notin$ Maass space

(Evdokimov [5], Oda [10]).

2. Residues

M_k^n は $\forall$ Fourier coefficients $\in \mathbb{Q}$ となる basis をもつから

$\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ が次のように作用する:

$$f(Z) = \sum_{T^{(n)} \geq 0} a(T) \exp(2\pi i \,\mathrm{trace}(TZ)) \in M_k^n$$

と $\sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ に対し

$$f^{\sigma}(Z) := \sum_{T \geq 0} a(T)^{\sigma} \exp(2\pi i \,\mathrm{trace}(TZ)) \in M_k^n.$$

$f \in M_k^n$ を eigenform として，$\mathbb{Q}(f)$ を，$\mathbb{Q}$ 上の Hecke algebra の f での eigenvalues 全部によって $\mathbb{Q}$ 上生成される totally real number field (finite degree) とする。

<u>Theorem 2.</u> $k \geq n$ とし，さらに

$n \equiv 0 \pmod 4$, $f \in B_k^n(2n) \cap S_k^n$: eigenform

(すなわち，Thm 1 によれば，$\Lambda(s, f, \underline{St})$ が $s=0$ と $s=1$ で poles を持つ場合) とする。さらに，f の Fourier coefficients はすべて $\mathbb{Q}(f)$ に属すると仮定する。このとき

$$A(f) := \frac{\mathrm{res}_{s=1} \Lambda(s, f, \underline{St})}{(f, f)}$$

(但し (,) は Petersson 内積) に対して

$$A(f)^\sigma = A(f^\sigma) \qquad \forall\, \sigma \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C})$$

が成り立つ。特に $A(f) \in \mathbb{Q}(f)$ である。

<u>Remark</u>. $B_k^n(2n) \cap S_k^n$ は次のような orthogonal basis $\{f_j\}$ をもつ: 各 f_j は eigenform で $\forall$ Fourier coefficients of $f_j \in \mathbb{Q}(f_j)$.

3. Outline of Proofs

$m, \kappa, N \in \mathbb{Z}_{>0}$, κ even, $Z \in \mathfrak{H}_m$ に対して

$$E_\kappa^{(m)}(Z, s, N) := \det(\mathrm{I}_m(Z))^s \sum_{M=\left(\begin{smallmatrix} * & * \\ C & D \end{smallmatrix}\right) : \Delta_{m,0} \backslash \Gamma_0^{(m)}(N)} \det(CZ+D)^{-\kappa} |\det(CZ+D)|^{-2s}$$

とおく。ここで

$$\Gamma_0^{(m)}(N) := \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(m, \mathbb{Z}) \,\middle|\, C \equiv 0 \pmod N \right\},$$

$$\Delta_{m,0} := \left\{ \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix} \in Sp(m, \mathbb{Z}) \right\}.$$

右辺は $\mathrm{Re}(s) > (m+1-\kappa)/2$, $Z \in \mathfrak{H}_m$ に対し広義一様に絶対収束する。さらに $E_\kappa^{(m)}(Z, s, N)$ は全 s 平面に有理型に解析接続される。

$$E_\kappa^{(m)}(Z, s) := E_\kappa^{(m)}(Z, s, 1).$$

(Proof of Thm 1.) 簡単のため k even とする。

Garrett - Böcherer の積分表示 [8, 3]:

$$\Lambda(s,f,\underline{St})\cdot f(Z)$$
$$= (\Gamma\text{-functions の積})\cdot(\text{Riemann zeta の積})$$
$$\cdot\left(f,\ E_k^{(2n)}\left(\begin{pmatrix}-\bar{Z}^{(n)} & 0\\ 0 & *\end{pmatrix},\ \frac{s-k+n}{2}\right)\right). \qquad (1)$$

を用いる。ここで

$$E_k^{(m)}(Z,s) = \mathrm{Tr}_\eta^N\left(E_k^{(m)}(*,s,N)\big|_k \eta_m\right)(Z) \qquad (2)$$

となる。但し

$$\eta_m := \begin{pmatrix}0 & 1_m\\ -1_m & 0\end{pmatrix};$$

$g:\mathfrak{H}_m \longrightarrow \mathbb{C}$ と $M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in Sp(m,\mathbb{Z})$ に対し

$$(g|_k M)(Z) := g((AZ+B)(CZ+D)^{-1})\det(CZ+D)^{-k};$$

さらに g が $g|_k \eta_m^{-1}\Gamma_0^{(m)}(N)\eta_m = g$ をみたすとき

$$\mathrm{Tr}_\eta^N(g) := \sum_{\gamma:\ \eta_m^{-1}\Gamma_0^{(m)}(N)\eta_m\backslash Sp(m,\mathbb{Z})} g|_k \gamma$$

である。

一方，Feit [6] により，$E_k^{(m)}(*,s,N)\big|_k\eta_m$ (N even) の possible poles の様子がわかっている。

これに (2) と (1) を使えば

$\Lambda(s,f,\underline{St})$ は $\mathrm{Re}(s)>0$ では，$s=1$ で高々 simple pole をもつ他は holomorphic.

ということがわかる。(さらに n が odd なら $s=1$ でも holomorphic であることもわかる。)

これと Weissauer の結果 [13] を使い，関数等式とあわせれば Thm 1 が得られる。

(Proof of Thm 2.) 上の Garrett - Böcherer の積分表示（を少し modify したもの）から次が出る：

$$\mathrm{res}_{s=1}\ \Lambda(s, f, \underline{\mathrm{St}}) \cdot f(Z)$$

$$= (\text{rational number}) \cdot \left(f, \left(\mathbb{D} E_n^{(2n)}\right)\begin{pmatrix} -\bar{Z} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right).$$

ここで $\mathbb{D}$ は，ある differential operator で，holomorphy と Fourier coefficients の rationality を保つものである。また

$$E_n^{(2n)}(Z) := E_n^{(2n)}(Z, 0)$$

は，$4 \mid n$ なら holomorphic modular form であり，$\forall$ Fourier coefficients $\in \mathbb{Q}$ である（Weissauer [13]）。これから Thm 2 が出る。

4. Special values (supplementary to Harris [9], Sturm [12], Böcherer [2]).

<u>Theorem 3.</u> $f \in S_k^n$ を eigenform，$k > n$ とする。さらに f の Fourier coefficients はすべて $\mathbb{Q}(f)$ に属するものとする。

$$1 \leq m \leq k - n \quad , \quad m \equiv n \pmod 2$$

をみたす $m \in \mathbb{Z}$ をとる。但し

(☆) $m = 1$ ならば $n \equiv 3 \pmod 4$ または $n = 1$

と仮定する。

$$B(f) := \frac{L(m, f, \underline{St})}{\pi^{d(m)}(f, f)},$$

$$d(m) := m(n+1) + nk - \frac{n(n+1)}{2}$$

とすると

$$B(f)^\sigma = B(f^\sigma) \qquad \forall \sigma \in Aut(\mathbb{C})$$

が成り立つ。特に

$$B(f) \in \mathbb{Q}(f).$$

<u>Remarks</u>. (i) $m \leq n$ の場合が、これまで知られていなかったように思われる。

(ii) $L(s, f, \underline{St})$ の、Deligne の意味の critical points (の右半分)は

$$\{ m \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq m \leq k-n, \quad m \equiv n \pmod 2 \}$$

である(特に $k \leq n$ なら critical point はない)。従って仮定(*)は

「 $m = 1$ ならば n : odd 」

という仮定でおきかえられると思われる。しかし今のところ $n \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 5$ の cases についてはわからない。∎

Proof は Thm 2 のそれと同様である。このときは $E_{m+n}^{(2n)}$ が問題となる。上の Remark (ii) との関連でいうと、$n \equiv 1 \pmod 4$, $n \geq 5$ のとき、$E_{n+1}^{(2n)}$ の性質が今のところよくわからない(多分 non-holomorphic modular form であろう)ため、仮定(*)をつけている。

References

1. Andrianov, A.N., Kalinin, V.L.: On the analytic properties of standard zeta functions of Siegel modular forms. Math. USSR Sbornik, 35, 1-17 (1979). (English transl.)

2. Böcherer, S.: Über die Fourier-Jacobi-Entwicklung Siegelscher Eisensteinreihen II. Math. Z., 189, 81-110 (1985).

3. Böcherer, S.: Über die Funktionalgleichung automorpher L-Funktionen zur Siegelschen Modulgruppe. J. reine angew. Math., 362, 146-168 (1985).

4. Böcherer, S.: Siegel modular forms and theta series. AMS Research Institute "Theta Functions", Bowdoin College, 1987

5. Evdokimov, S.A.: A characterization of the Maass space of Siegel modular forms of second degree. Math. USSR Sbornik, 40, 125-133 (1981).

6. Feit, P.: Poles and residues of Eisenstein series for symplectic and unitary groups. Mem. Amer. Math. Soc., 61, no. 346 (1986)

7. Freitag, E.: Thetareihen mit harmonischen Koeffizienten zur Siegelschen Modulgruppe. Math. Ann., 254, 27-51 (1980).

8. Garrett, P. B.: Pullbacks of Eisenstein series: applications. Automorphic Forms of Several Variables. Taniguchi Symposium, Katata, 1983: Birkhäuser 1984.

9. Harris, M.: Special values of zeta functions attached to Siegel modular forms. Ann. scient. Éc. Norm. Sup., 14, 77-120 (1981).

10. Oda, T.: On the poles of Andrianov L-functions. Math. Ann., 256, 323-340 (1981).

11. Piatetski-Shapiro, I., Rallis, S.: L-functions for the classical groups. In: Lect. Notes in Math., 1254: Springer 1987.

12. Sturm, J.: The critical values of zeta functions associated to the symplectic group. Duke Math. J., 48, 327-350 (1981).

13. Weissauer, R.: Stabile Modulformen und Eisensteinreihen. Lect. Notes in Math., 1219: Springer 1986.