数理解析研究所講究録
第727巻 1990年 201-214

代数曲線の universal period と Schottky 問題

九大・理　市川尚志　(Takashi Ichikawa)

序

Schottky 問題は，Abel 多様体の中から（完備，非特異）代数曲線の Jacobi 多様体と同型になるものを特徴づける問題であり，今まで数多くの研究がなされてきた（van der Geer [4] 参照）。最近の結果としては Novikov 予想の塩田 [10] による解決が著しい。また複素数体上の主偏極 Abel 多様体の同型類は，周期を対応させることにより，Siegel 上半空間の整 symplectic 群による商空間である Siegel modular 多様体の点として parametrize されるので，この中の Jacobian locus（Jacobi 多様体に対応する点全体の集合）の Zariski 閉包を，いくつかの Siegel modular form の零点集合として表す問題ととらえることもでき，これについても van Geemen [3] のすぐれた結果がある。

さてここではSchottky問題として次の問題を考える。

"Jacobian locus 上で0になるSiegel modular formを特徴づけよ"

我々の結果は，Siegel modular formのFourier展開からこの特徴づけを与えるものであり，ここで用いられるのが"代数曲線の乗法的周期のuniversalな形式巾級数表示（代数曲線のuniversal period）"である。この結果は，標数正の体上のSchottky問題にも同様に適用される。"universal period"は，Manin－Drinfeld［8］によるMumford曲線の乗法的周期を表す無限積（同様の式は弦理論においてSchottky－一意化された複素数体上の代数曲線についても得られている（［7］, p. 224））をKoebe座標により整係数巾級数に展開して得られる。これはこの座標が代数曲線のmoduli多様体においてよい数論的意味をもつことを示しており，"Teichmüller空間上の保型形式の整数論"の研究に役立つことが期待される。

§1. Mumford曲線とその周期

ここではMumford曲線とその周期についての，Mumford，Manin－Drinfeld，Gerritzenの結果を復習する。

1.1. Kを完備離散付値体とし，Rをその付値環とする。この時 $PGL_2(K)$ を $\mathbb{P}^1(K)$ に

$$\alpha(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \left(\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod K^\times \in PGL_2(K),\ z \in \mathbb{P}^1(K)\right)$$

として作用させる。Γ をK上のSchottky群，すなわち $PGL_2(K)$ の有限生成部分群で単位元以外の元がすべて双曲的（固有値の比がunitではない）となるものとする。この時 Γ は自由群になることが知られている（伊原[6]）。g を Γ の階数とし，

$$\Omega_\Gamma = \mathbb{P}^1(K) \setminus \{\Gamma \setminus \{1\} \text{の固定点の極限}\}$$

とすると，商空間 Ω_Γ/Γ に自然に種数 g をもつK上の代数曲線の構造が唯一つ入ることがMumford[9]により示されている（より正確に言うと，K上の解析空間 Ω_Γ/Γ が唯一つのK上の代数曲線に付随する解析空間として与えられる）。これを Γ に付随するMumford曲線と呼び C_Γ で表す。C_Γ はR上multiplicative reductionをもつ（すなわちR上stable reductionをもち，minimal modelのspecial fiberが $\mathbb{P}^1$ から成る）が，逆にmultiplicative reductionをもつ代数曲線は，あるSchottky群に付随するMumford曲線として得られることも示されている（[9]）。

1.2. Γ をK上の階数 g のSchottky群とし，γ_i $(1 \leq i \leq g)$

をその生成元とする。各 γ_i は双曲的なので，Hensel の補題より $\mathbb{P}^1(K)$ の元 x_i, x_{-i} $(x_i \neq x_{-i})$ と R の極大 ideal の元 t_i があって

$$(1.2.1) \qquad \gamma_i = \begin{pmatrix} x_i & x_{-i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i & x_{-i} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \text{ modulo center}$$

と表される。すなわち $x_{\pm i}$ は γ_i の固定点で，t_i は R に属する γ_i の固有値の比である。g 以下の自然数 i, j に対し，${}_i\Gamma_j$ を Γ の元でその被約表示が $\gamma_k^{\pm 1} \cdot \gamma' \cdot \gamma_l^{\pm 1}$（ただし $k \neq i$, $l \neq j$）となるものから成る集合とする。体の異なる4つの元 a, b, c, d に対し，その複比 $[a, b; c, d]$ を

$$[a, b; c, d] = \frac{a-c}{a-d} \cdot \frac{b-d}{b-c}$$

で定義すると，無限積

$$\prod_{\gamma \in {}_i\Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$$

は $K^\times$ の中で収束する（[8]）。$K^\times$ の元 q_{ij} $(1 \leq i, j \leq g)$ を

$$(1.2.2) \qquad q_{ij} = c_{ij} \cdot \prod_{\gamma \in {}_i\Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$$

$$\text{ただし} \quad c_{ij} = \begin{cases} [x_i, x_{-i}; x_j, x_{-j}] & (i \neq j) \\ t_i & (i = j) \end{cases}$$

で定義する。この時 Manin-Drinfeld [8] により C_p の Jacobi

多様体 J_r はK上の解析空間として商空間

$$(K^\times)^g \Big/ \left(\left(\prod_j q_{ij}^{n_j} \right)_{1\le i\le g} \,\middle|\, n_j \in \mathbb{Z} \right)$$

で表されることが示されている。q_{ij} を C_p の乗法的周期と呼ぶ。

1.3. $|\ |$ をKの乗法付値とする。$\mathcal{U}$ を $(K\times K\times K)^g$ の元 $u=(x_i, x_{-i}, t_i)_{1\le i\le g}$ で条件

$x_j \neq x_k \ (j\neq k)$, $0<|t_i|<\min\{1, |[x_j, x_k; x_{-i}, x_i]| \ (j, k \neq \pm i)\}$

を満たすものから成る集合とする。この時 Gerritzen [5] により，任意の $\mathcal{U}$ の元 $u=(x_i, x_{-i}, t_i)$ に対し，(1.2.1) により定義される $\gamma_i\ (1\le i\le g)$ から生成される $PGL_2(K)$ の部分群は，γ_i を生成元にもつ階数 g の Schottky 群になることが示されている。

§2. Universal period

ここでは式 (1.2.2) を，$x_{\pm i}$, t_i を変数と見て整係数巾級数に展開する。これが "universal period" であるが，それは $t_i\ (1\le i\le g)$ を変数とする $\mathbb{Z}[x_i, 1/(x_j-x_k)]$ $(i, j, k\in\{\pm1, \dots, \pm g\})$,

ただし $j \neq k$）上の形式巾級数環

$$A = \left(\mathbb{Z}\left[x_i, \frac{1}{x_j - x_k}\right]\right)[[t_1, \cdots, t_g]]$$

の元として与えられる。(1.2.2) が A の元として表されるというのは一見予想がしにくいが，Mumford 曲線が $\mathcal{D}$ の各元に対し定まるので，その乗法的周期が $\mathcal{D}$ 上の解析関数として与えられるはずであると考えれば意外ではない。以下の計算により q_{ij} が A に属することがわかるだけではなく，それを具体的に求めることもできる。

2.1. g を自然数，x_i, x_{-i}, t_i $(1 \leq i \leq g)$ を変数とし，$\Omega = \mathbb{Q}(x_{\pm i}, t_i)$ とおく。γ_i を (1.2.1) で定義される $PGL_2(\Omega)$ の元とし，Γ を γ_i $(1 \leq i \leq g)$ から生成される $PGL_2(\Omega)$ の部分群とすると，$x_{\pm i}$, t_i は変数だから Γ は γ_i を生成元とする自由群となる。整数 $k = -g, -g+1, \cdots, -1$ に対し $t_k = t_{-k}$, $\gamma_k = (\gamma_{-k})^{-1}$ とおくと，γ_k も (1.2.1) を満たす。Γ の元 γ の被約表示が $\prod_{p=1}^{n} \gamma_{\sigma(p)}$ $(\sigma(p) \in \{\pm 1, \cdots, \pm g\})$ となる時，$n(\gamma) = n$ とおく。A を上のように定め，$\mathfrak{m}$ を t_i $(1 \leq i \leq g)$ から生成される A の ideal とする。この時

2.2 補題．$\gamma \in \Gamma$, $i = \pm 1, \cdots, \pm g$ に対し，

$$\gamma(x_i) \in A.$$

特に $\gamma \notin \gamma_i^{\mathbb{Z}}$ ならば, γ の被約表示を $\gamma_k \cdot \gamma'$ とする時

$$\gamma(x_i) \in x_k + \mathfrak{m}.$$

証明. まず後半を $n(\gamma)$ についての帰納法で示す。$\gamma \notin \gamma_i^{\mathbb{Z}}$ の被約表示を $\gamma_k \cdot \gamma'$ とし $\gamma(x_i) = x_k + \alpha$ となる $\alpha \in \mathfrak{m}$ があると仮定すると, $j \neq -k$ の時

$$(\gamma(x_i) - x_{-j})^{-1} = \{(x_k - x_{-j})(1 + \alpha/(x_k - x_{-j}))\}^{-1} \in A.$$

よって

$$(\gamma_j \cdot \gamma)(x_i) = \left\{x_j - \frac{(\gamma(x_i) - x_j)\, x_{-j}\, t_j}{\gamma(x_i) - x_{-j}}\right\}\left\{1 - \frac{(\gamma(x_i) - x_j)\, t_j}{\gamma(x_i) - x_{-j}}\right\}^{-1}$$
$$\in x_j + \mathfrak{m}.$$

また $\gamma \in \gamma_i^{\mathbb{Z}}$ の時は $\gamma(x_i) = x_i$ だから, $j \neq \pm i$ に対し同様に $(\gamma_j \cdot \gamma)(x_i) \in x_j + \mathfrak{m}$。前半はこれより明らか。

2.3 補題. $\gamma \in \Gamma$ の被約表示を $\gamma' \cdot \gamma_\ell$ とすると, $j \neq \pm \ell$ となる $j \in \{\pm 1, \cdots, \pm g\}$ に対し

$$\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}) \in \mathfrak{m}^{n(\gamma)}.$$

証明. $n(\gamma)$ についての帰納法で示す。$\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}) \in \mathfrak{m}^{n(\gamma)}$

を仮定する。γ の被約表示を $\gamma_k \cdot \gamma'$ とすると補題 2.2 より $\gamma(x_j) = x_k + \beta$ となる $\beta \in \mathfrak{m}$ がある。よって $\beta - t_\ell(\gamma(x_j) - x_\ell) \in \mathfrak{m}$。従って $\ell \neq -k$ の時

$$\{\gamma(x_j) - x_{-\ell} - t_\ell(\gamma(x_j) - x_\ell)\}^{-1}$$
$$= \{(x_k - x_{-\ell}) + (\beta - t_\ell(\gamma(x_j) - x_\ell))\}^{-1} \in A.$$

同様に $\{\gamma(x_{-j}) - x_{-\ell} - t_\ell(\gamma(x_{-j}) - x_\ell)\}^{-1} \in A$。従って

$$(\gamma_\ell \cdot \gamma)(x_j) - (\gamma_\ell \cdot \gamma)(x_{-j})$$
$$= \frac{(x_\ell - x_{-\ell})^2 (\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}))\, t_\ell}{\{\gamma(x_j) - x_{-\ell} - t_\ell(\gamma(x_j) - x_\ell)\}\{\gamma(x_{-j}) - x_{-\ell} - t_\ell(\gamma(x_{-j}) - x_{-\ell})\}}$$
$$\in \mathfrak{m}^{n(\gamma)+1}.$$

2.4 命題. $\gamma \in {}_i\Gamma_j$ に対し

$$[x_i, x_{-i} ; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})] \in 1 + \mathfrak{m}^{n(\gamma)}.$$

証明. γ の被約表示を $\gamma_k \cdot \gamma'$ とすると、補題 2.2 より $\gamma(x_j) - x_k,\ \gamma(x_{-j}) - x_k \in \mathfrak{m}$。よって $k \neq \pm i$ より

$$(\gamma(x_j) - x_{-i})^{-1},\ (\gamma(x_{-j}) - x_i)^{-1} \in A.$$

従って補題 2.3 より

$$[x_i, x_{-i} ; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$$
$$= 1 + \frac{(x_i - x_{-i})(\gamma(x_j) - \gamma(x_{-j}))}{(\gamma(x_j) - x_{-i})(\gamma(x_{-j}) - x_i)} \in 1 + \mathfrak{m}^{n(\gamma)}.$$

2.5 定理－定義. g 以下の自然数 i, j に対し，命題 2.4 より無限積 $\prod_{\gamma \in \Gamma_i \backslash \Gamma / \Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})]$ は A の中で収束する。A の元 p_{ij} を

$$c_{ij} \cdot \prod_{\gamma \in \Gamma_i \backslash \Gamma / \Gamma_j} [x_i, x_{-i}; \gamma(x_j), \gamma(x_{-j})] \quad (c_{ij} : (1.2.2) \text{ の通り})$$

で定義し，これを

the universal expression of multiplicative periods of algebraic curves

(the universal period of curves)

と呼ぶ。定義より，$PGL_2(\Omega)$ の元 γ_i ($1 \leq i \leq g$) を完備離散付値体 K 上の Schottky 群 Γ の生成元に specialize する時，p_{ij} は C_Γ の乗法的周期 q_{ij} に specialize される。

2.6. 上式より p_{ij} を計算することができる。例えば

(2.6.1) $$p_{ij} \equiv c_{ij} \mod \begin{cases} m & (\text{if } i \neq j) \\ m^2 & (\text{if } i = j), \end{cases}$$

$$p_{ij} \equiv c_{ij} \cdot \Big(1 + \sum_{\substack{k \in \{\pm 1, \cdots, \pm g\} \\ |k| \neq i, j}} \frac{(x_i - x_{-i})(x_j - x_{-j})(x_k - x_{-k})^2}{(x_i - x_k)(x_{-i} - x_k)(x_j - x_{-k})(x_{-j} - x_{-k})} t_{|k|} \Big)$$
$$\mod \begin{cases} m^2 & (\text{if } i \neq j) \\ m^3 & (\text{if } i = j). \end{cases}$$

一般に $t_1, \cdots, t_g$ の積の係数になる $\mathbb{Z}[x_i, 1/(x_j - x_k)]$ の元は，$x_{\pm 1}, \cdots, x_{\pm g}$ から成る複比で生成されることがわかる。この係数を求める，

すなわち p_{ij} を決定することは，後述するSchottky問題への応用の上からも重要な問題であると思われる。

§3. Schottky問題

ここでは "universal period" を用い，Jacobian locus 上で0になるSiegel modular formの特徴づけを与える。

3.1. 自然数 g を固定する。k を任意の体とし，f を k 上定義された次数 g，重さ ℓ ($\in \mathbb{N}$) のSiegel modular form，すなわち

$$H^0(\mathcal{A}_g \otimes k,\ (\Lambda^g \pi_*(\Omega^1_{\mathcal{A}/\mathcal{A}_g}))^{\otimes \ell})$$

（ただし $\mathcal{A}_g$ は次元 g の主偏極Abel多様体のmoduli stack (Deligne-Mumford [1]) で，$\pi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}_g$ は universal abelian scheme を表す）の元とする。$k = \mathbb{C}$ の時は，これは古典的なSiegel modular formの定義を与える。この時 Faltings [2] より，f は k 上有理的な Fourier展開

$$F(f) = \sum_{T=(t_{ij})} a(T) \prod_{i,j=1}^{g} q_{ij}^{t_{ij}}$$

（T：半整非負定値対称行列，$a(T) \in k$）をもつことがまた

れている。$k=\mathbb{C}$ の時は、$q_{ij}=\exp(2\pi\sqrt{-1}\, z_{ij})$ ($Z=(z_{ij})$ は g 次 Siegel 上半空間の点）となる。対称性 $q_{ij}=q_{ji}$ より $F(f)$ は $k[[q_{ij}\ (1\le i,j\le g)]]$ に属する。$\mathcal{M}_g$ を種数 g の（完備、非特異）代数曲線の moduli stack とし、$j:\mathcal{M}_g\to\mathcal{X}_g$ を Torelli 写像とする。

3.2 定理. A を §2 の通りとし、f を k 上定義された次数 g の Siegel modular form とする。この時、j による f の pull back $j^*(f)$ が 0 になるための必要十分条件は、

$$F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}}=0 \quad \text{in } A\otimes k .$$

証明. k を代数閉体と仮定してよい。まず $j^*(f)=0$ を仮定する。k 上の形式巾級数体 $k((z))$ を z を素元とする完備離散付値体と見て、Ω を 1.3 で定義した $k((z))$ 上の解析空間とする。この時仮定より、$\varphi=F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}}\in A\otimes k$ は任意の Ω の元に対し 0 をとるから、特に $x_j\neq x_k\ (j\neq k)$, $t_i\in(z)k[[z]]$ を満たす任意の $(x_i,x_{-i},t_i)_{1\le i\le g}\in(k\times k\times k[[z]])^g$ に対し 0 をとる。k は無限体だから $\varphi=0$。

次に $F(f)|_{q_{ij}=p_{ij}}=0$ を仮定する。$\mathcal{F}$ を $j^*(f)=0$ で定義される $\mathcal{M}_g\otimes k$ の closed subset とする。M_g を種数 g の代数曲線の coarse moduli scheme とすると、k は代数閉体なので、$\mathcal{F}$ は

$M_g \otimes k$ のある closed subset と同一視される。Deligne-Mumford [1] により $M_g \otimes k$ は既約になることが示されているので，k を含む完備離散付値体 K と K 上の Mumford 曲線で $M_g \otimes k$ の generic point η に対応するものがとれる。よって仮定より $F \ni \eta$ となるから $M_g \otimes k$ の既約性より $F = M_g \otimes k$ を得る。これで定理が示された。

3.4 系．f を k 上定義された次数 g の Siegel modular form で $j^*(f) = 0$ となるものとする。この時整数 $s_1, \cdots, s_g \geq 0$ が存在して

$$F(f) = \sum_{t_{ii} = s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^{g} q_{ij}^{t_{ij}} + \sum_{Tr(T) > \sum s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^{g} q_{ij}^{t_{ij}} ,$$

ただし

$$\sum_{t_{ii} = s_i} a(T) \prod_{i,j=1}^{g} [x_i, x_{-i} ; x_j, x_{-j}]^{t_{ij}} = 0 .$$

証明．(2.6.1) よりただちに従う。

3.5．与えられた重さをもつ Siegel modular form のなす空間は有限次元なので，定理 3.2 における条件は十分高い次数までの t_i $(1 \leq i \leq g)$ の積の係数について見ればよいが，その次数

のeffectiveな評価を行うことは重要な問題だと思われる。

文献

1. P. Deligne and D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of a given genus, Publ. Math. IHES. 36 (1969) 75-109.

2. G. Faltings, Arithmetische kompaktifizierung des modulraums der abelschen varietäten, in : Proceedings Arbeitstagung (Bonn 1984), Lecture Notes in Math. vol. 1111, pp. 321-383, Springer 1985.

3. B. van Geemen, Siegel modular forms vanishing on the moduli space of curves, Invent. Math. 78 (1984) 329-349.

4. G. van der Geer, The Schottky problem, in : Proceedings Arbeitstagung (Bonn 1984), Lecture Notes in Math. vol. 1111, pp. 385-406, Springer 1985.

5. L. Gerritzen, Zur analytischen Beschreibung des Raumes der Schottky-Mumford-Kurven, Math. Ann. 255 (1981) 259-271.

6. Y. Ihara, On discrete subgroups of the 2×2 projective linear group over p-adic fields, J. Math. Soc. Japan 18 (1966)

219-235.

7. ミチオ・カク著，太田信義訳，「超弦理論」，シュプリンガー・フェアラーク東京，1989.

8. Yu. I. Manin and V. Drinfeld, Periods of p-adic Schottky groups, J. reine angew. Math. 262/263 (1972) 239-247.

9. D. Mumford, An analytic construction of degenerating curves over complete local fields, Comp. Math. 24 (1972) 129-174.

10. T. Shiota, Characterization of Jacobian varieties in terms of soliton equations, Invent. Math. 83 (1986) 333-382.