

P^2 の 6 lines で分岐する double cover からできる 2次元多様体の周期

九州大学 理学部 松本 圭司 (Keiji Matsumoto)

§ 0 Introduction.

代数多様体の周期は、たいへん興味深い量である。例えば、Gaussの超幾何微分方程式 $E(\alpha, \beta, \gamma)$ は、Eulerの積分表示という解の積分表示を持つが α, β, γ が有理数のとき、この積分表示を或る Riemann 面の周期と見ることができる。また、楕円曲線の族に対し楕円曲線の周期を対応させる多価写像の逆写像として楕円 modular 関数 $\lambda(\tau)$ 、 $j(\tau)$ を得ることができる。ここでは、楕円曲線が P^1 の 4点で分岐する double cover であることに注目して、 P^2 の 6 lines で分岐する double cover からできる多様体の周期の具体的な構成を紹介する。

§ 1 P^2 の 6 lines で分岐する double cover からできる 2次元複素多様体

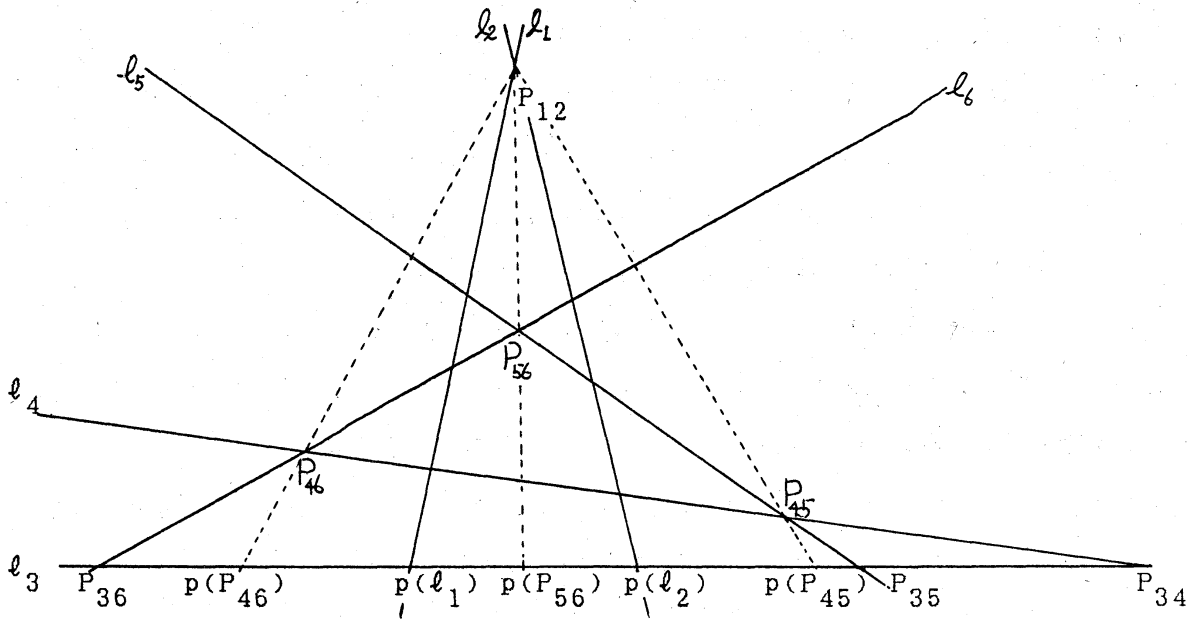
射影平面 P^2 上の 6 lines $l_j (j=1, \dots, 6)$ を同次座標 (t^1, t^2, t^3)

を用いて以下のように定める。

$$l_j = \{(t^1, t^2, t^3) : L_j = t^1 z_{1j} + t^2 z_{2j} + t^3 z_{3j} = 0\}$$

ここでは、どの 3 lines も P^2 内で 1点で交わらないことを仮定する。直線の配置 $l = \{l_1, \dots, l_6\}$ で分岐する P^2 の double cover を S' とする。曲面 S' は、二つの lines l_j, l_k の交点 P_{jk} で A_1 型の特異点を持つ。これらの特異点を解消してできる複素多様体を S とする。 S は楕円曲面の構造をもつことが以下のようにしてわかる。 S から P^2 への射影を π 、 P^2 から l_3 への l_1, l_2 の交点 P_{12} に関する射影を p とすると、 $(S, p \circ \pi, l_3)$ は、 $p(l_1)$ 、 $p(l_2)$ 上で I_0^* 型 (\mathbb{P}^1 , Euler数 6)、 $p(P_{jk}) (3 \leq j < k \leq 6)$ 上で I_2 型 (\mathbb{P}^1 , Euler数 2) singular fibres を持つ楕円曲面である。楕円曲面の Euler数は singular fibres の Euler数の和で与えられることから、 S の Euler数 $\chi(S)$ は

24 であることがわかる。



一方、 S は K3曲面と呼ばれる 2次元複素多様体となる；いたるところ零にならない正則 2-form がある単連結な 2次元 compact 複素多様体。実際、正則 2-form η は $\eta = \Pi_{j=1}^6 (z_{1j}s^1 + z_{2j}s^2 + z_{3j}s^3)^{-\frac{1}{2}} ds^1 \wedge ds^2$ で与えられ、単連結であることは Noether の公式から導くことができる。また $X(S) = 24$ と first betti 数 $b_1 = 0$ から S の 2次の Homology 群の rank は 22 であることがわかる。そこで $H_2(S, \mathbb{Z}) / \langle \text{torsions} \rangle$ の基底を $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_{22} \rangle$ とし、2-form η の 2-cycle γ_j ($j=1, \dots, 22$) 上での積分 $\omega_j(S) = \int_{\gamma_j} \eta$ を構成する。積分 $\omega_j(S)$ ($j=1, \dots, 22$) を並べたベクトル $\Omega(S) = (\omega_1(S), \dots, \omega_{22}(S))$ を曲面 S の周期と呼ぶ。以下の節で 2-cycle γ_j の構成と周期 $\Omega(S)$ がみたす周期関係式を具体的に求める。

§ 2 $H_2(S, \mathbb{Z})$ の基底

まず、lattice について簡単に復習する。

定義 有限 rank の free \mathbb{Z} -module L と L 上の \mathbb{Z} -valued symmetric

bilinear form $b(x,y)$ との組を、lattice と呼び、 (L,b) または L (混同することがないとき) で表す。 L の一つの基底 $\langle e_1, \dots, e_n \rangle$ に対し、行列 $(b(e_j, e_k))$ をつくる。この行列の行列式 $d(L)$ は、基底の取り方によらず一意的に定まる。 $d(L)$ を lattice (L,b) の discriminant と呼ぶ。 $d(L) \neq 0$ のとき、lattice (L,b) は、non-degenerate であるといい、 $d(L) = \pm 1$ のとき、lattice (L,b) は、unimodular であるという。

L の submodule M に対し、 $(M, b|_M)$ は lattice となる。また、 M の直交補空間 M^\perp を $M^\perp = \{x \in L : b(x,y) = 0, \text{ for any } y \in M\}$ で定めると $(M^\perp, b|_{M^\perp})$ も lattice となる。定義より以下のことが容易に導ける。

Lemma 2.1. (L,b) が non-degenerate lattice で M が L の submodule のとき、

- (1) $\text{rank } M + \text{rank } M^\perp = \text{rank } L$
 - (2) $\text{rank } M = \text{rank } L$ ならば、 $(L:M)^2 = d(M)d(L)^{-1}$
- が、成立する。

また、K3曲面 X に対して次のことが知られている。

Proposition 2.2. K3曲面 X の 2次の \mathbb{Z} -係数 Homology 群 $H_2(X, \mathbb{Z})$ は、rank 22 の自由加群であり、その上の交叉形式との組とでできる lattice は、unimodular lattice である。

定義 algebraic K3曲面 X に対し X の divisor からなる \mathbb{Z} -module は、 $H_2(X, \mathbb{Z})$ の submodule とみれる。この submodule を X の Néron-Severi 群 といい $NS(X)$ と書く。 $NS(X)$ の rank を X の Picard 数 と呼ぶ。 $NS(X)$ は自然に lattice となるが、 $NS(X)$ の $H_2(X, \mathbb{Z})$ での直交補空間 T_X を X の transcendental lattice という。

ここで § 1 で構成した K3曲面 S に対し $NS(S)$, T_S , $H_2(S, \mathbb{Z})$ について考えてみよう。 S には、二つの lines ℓ_j, ℓ_k の交点 P_{jk} ($j \neq k$) での特異点の解消から生じる 15個の curves $c(jk)$ ($= c(kj) \simeq \mathbb{P}^1$) と \mathbb{P}^2 上の一般の直線の

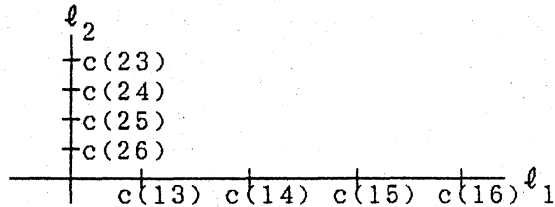
π による引き戻し $c\ell$ とで計 16 個の $H_2(S, \mathbb{Z})$ の元とみて \mathbb{Z} 上独立な 2-cycles がある。配置 ℓ が一般のとき (例えば、6 lines がすべてひとつの 2 次曲線に接するような事がない) これ以上独立な $NS(S)$ の元はない。 $c(jk)$'s ($1 \leq j, k \leq 6, j \neq k$) と $c\ell$ とで生成される \mathbb{Z} -module を AC とする。 $c(jk) \cdot c(jk) = -2$, $c(jk) \cdot c(mn) = 0$ ($\{j, k\} \neq \{m, n\}$), $c\ell \cdot c\ell = 2$, $c\ell \cdot c(jk) = 0$ であるから AC を $H_2(S, \mathbb{Z})$ の sublattice とみたとき、

$$AC \subset NS(S), \text{rank } NS(S) = \text{rank } AC = 16, \text{disc}(AC) = -2^{16}$$

が成立する。さらに次が成立する。

Lemma 2.3. $1 \leq j, k \leq 6, j \neq k$ に対し $e_{jk} := \frac{1}{2} \sum_{m \neq j, k} \{c(jm) + c(km)\}$ とすると、 $e_{jk} \in NS(S)$ となる。

$j=1, k=2$ の場合 e_{jk} は右図の $c(\spadesuit)$ をたしたもの



Proof. S 上の有理型函数 $f = \frac{L_j}{L_k} \pi$ を考える。 f は $2\tilde{\ell}_j + \sum_{m \neq j, k} c(jm)$ で零となり、 $2\tilde{\ell}_k + \sum_{m \neq j, k} c(km)$ で極となる。ここで、 $\tilde{\ell}_j, \tilde{\ell}_k$ は、それぞれ ℓ_j, ℓ_k の π による strict transform。従って

$$2\tilde{\ell}_j + \sum_{m \neq j, k} c(jm) \equiv 2\tilde{\ell}_k + \sum_{m \neq j, k} c(km) \quad (\text{線型同値})$$

である。これより

$$\frac{1}{2} \sum_{m \neq j, k} \{c(jm) + c(km)\} \equiv \tilde{\ell}_k - \tilde{\ell}_j + \sum_{m \neq j, k} c(km) \in NS(S)$$

であることがわかる。 ■

Proposition 2.4. AC と e_{1j} 's ($2 \leq j \leq 6$) で生成される module を \overline{AC} とする。

$$NS(S) = \overline{AC}$$

となる。

証明は、Proposition 2.5 の証明内で行う。

2-cycles $c_1, \dots, c_6, r_1, \dots, r_6$ を $c_j \in AC^\perp$ ($1 \leq j \leq 6$), $c_j \cdot r_k = \delta_{jk}$ の関係をみたすように定める。具体的な c_j 's, r_j 's の定め方は、次の節で行う。すると c_j 's に対する交点行列 $(c_j \cdot c_k)$ ($1 \leq j, k \leq 6$) は、

$$2 \begin{pmatrix} U & & \\ & U & \\ & & -I_2 \end{pmatrix} \text{ ここで } U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

となる。

Proposition 2.5. c_1, \dots, c_6 は、 S の transcendental lattice T_S の基底となり、 $H_2(S, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus NS(S)$ となる。

Proof of Proposition 4 and 5. (1) $\langle c_1, \dots, c_6 \rangle = T_S$ であること。

c_j 's ($1 \leq j \leq 6$) の定め方と c_j 's に対する交点行列の形より

$\langle c_1, \dots, c_6 \rangle \subset T_S$ であることと $c_1, \dots, c_6, c(12), \dots, c(56), c\ell$ が線型独立であることは明らか。 $\langle c_1, \dots, c_6 \rangle \supset T_S$ を示すため、まず $\gamma_1, \dots, \gamma_6, c(12), \dots, c(56), c\ell$ が線型独立であることを示す。線型関係

$a_1 \gamma_1 + \dots + a_6 \gamma_6 + a_7 c(12) + \dots + a_{21} c(56) + a_{22} c\ell = 0, a_j \in \mathbb{Z} (1 \leq j \leq 22)$ があるとする。上の式の左辺と $c_j (1 \leq j \leq 6)$ との交点を考えると c_j 's, γ_j 's の定め方より a_j となる。一方、線型関係より $a_j = 0 (1 \leq j \leq 6)$ となる。また $c(jk) (1 \leq j, k \leq 6, j \neq k), c\ell$ との交点を考えれば $a_j = 0 (7 \leq j \leq 22)$ を得る。従って、 $\gamma_1, \dots, \gamma_6, c(12), \dots, c(56), c\ell$ の線型独立性がわかる。任意の $c \in T_S$ に対し $c - \sum_{j=1}^6 (c \cdot \gamma_j) c_j$ を作る。この cycle と $\gamma_1, \dots, \gamma_6, c(12), \dots, c(56), c\ell$ との交点を調べる。 $\gamma_j (1 \leq j \leq 6)$ との交点は、 $c_j \cdot \gamma_k = \delta_{jk}$ であることから

$$(c - \sum_{j=1}^6 (c \cdot \gamma_j) c_j) \cdot \gamma_k = c \cdot \gamma_k - \sum_{j=1}^6 (c \cdot \gamma_j) (c_j \cdot \gamma_k) = 0$$

となる。 $c(jk) (1 \leq j, k \leq 6, j \neq k)$ との交点は、 $c, c_j \in T_S = NS(S)^\perp$ より明らかに 0 となる。 $H_2(S, \mathbb{Z})$ が non-degenerate lattice であることと、22個の独立な 2-cycles との交点が 0 となることより $c - \sum_{j=1}^6 (c \cdot \gamma_j) c_j = 0$ となる。これは $c \in T_S$ が c_j の \mathbb{Z} -係数一次結合で表されることを意味する。

(2) $H_2(S, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC}$ であること。

$2 e_{1j} \in AC (2 \leq j \leq 5)$ であるから $[\overline{AC}: AC] = 2^5$ である。従って $[T_S \oplus \overline{AC} : T_S \oplus AC] = 2^5$ を得る。次に $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC}$ と $T_S \oplus \overline{AC}$ との index を求める。そのために $\gamma_j (1 \leq j \leq 6)$ を $c_j (1 \leq j \leq 6), c(mn) (1 \leq m, n \leq 6, m \neq n), c\ell$ との \mathbb{Q} -係数一次結合で表してみる。 $\gamma_j \cdot c_k = \gamma_{jk}, \gamma_j \cdot c(mn)$

$\in \mathbb{Z}$ であり $\langle c_j, c(mn), cl \rangle$ の交点行列が $2 \begin{pmatrix} U & & \\ & U & \\ & & -I_{17} \\ & & & 1 \end{pmatrix}$ であることから

$$t(\gamma_1, \dots, \gamma_6) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} U & & \\ & U & \\ & & -I_2 \end{pmatrix} t(c_1, \dots, c_6) \\ + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix} t(c(12), \dots, c(56), cl)$$

という形をとる。このことから $[\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC} : T_S \oplus \overline{AC}] = 2^6$ を得る。ゆえに $[\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC} : T_S \oplus AC] = 2^{11}$ である。 $H_2(S, \mathbb{Z})$ の sublattice $T_S \oplus AC$ の discriminant $d(T_S \oplus AC)$ は、 $\langle c_j, c(mn), cl \rangle$ の交点行列から -2^{22} であることがわかる。Lemma 2.1 より $\text{disc}(\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC}) = -2^{22}/2^{22} = -1$ を得る。Proposition 2.2 より $H_2(S, \mathbb{Z}) = \langle \gamma_1, \dots, \gamma_6 \rangle \oplus \overline{AC}$ である。

(3) $NS(S) = \overline{AC}$ であること。

$\overline{AC} \subset NS(S)$ は、Lemma 2.3 より明らか。任意の $c \in NS(S)$ は $c = \sum_{k=1}^6 a_k \gamma_k + C$, $C \in \overline{AC}$ と表せる。 $c \in NS(S)$ より $c \cdot c_j = 0$ ($1 \leq j \leq 6$) であるが、

$$c \cdot c_j = \left(\sum_{k=1}^6 a_k \gamma_k + C \right) \cdot c_j = \sum_{k=1}^6 a_k (\gamma_k \cdot c_j) = a_j$$

ゆえ $a_k = 0$ ($1 \leq k \leq 6$) を得る。したがって $NS(S) = \overline{AC}$ である。 ■

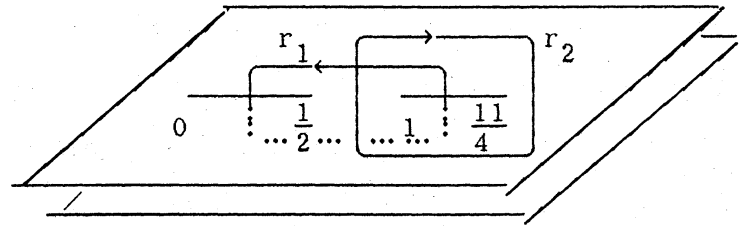
§ 3 2-cycles c_j, γ_j ($1 \leq j \leq 6$) の構成

6本の直線を affine 座標 (u, v) を用いて次で定める。

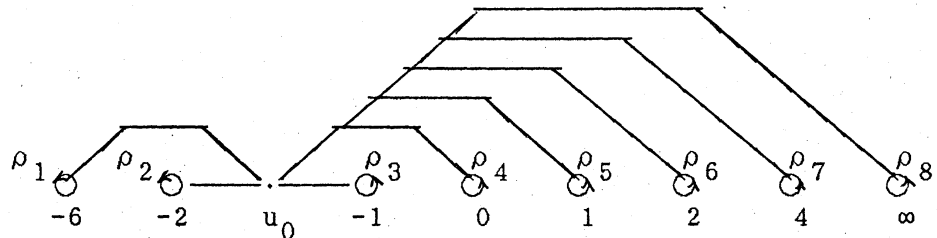
$$l_1: u = 0, \quad l_2: u - 1 = 0, \quad l_3: v = 0, \quad l_4: v - 1 = 0, \\ l_5: u + v + 1 = 0, \quad l_6: u + 2v - 4 = 0.$$

この直線たちの配置で定まる S に対して transcendental cycles c_j ($1 \leq j \leq 6$), その dual cycles γ_j を具体的に構成する。§ 1 で述べたように S は 底空間 \mathbb{P}^3 , projection $\text{po}\pi$ とで楕円曲面の構造をもつ。singular fibres は、 u -座

標を用いて $u = 0, 1$ ($p(\ell_1), p(\ell_2)$) 上で I_0^* 型 (⊠)、 $u = -6, -2, -1, 2, 4, \infty$ ($p(P_{jk})$ ($3 \leq j < k \leq 6$)) 上で I_2 型 (⊕) となる。 $\Delta = \{p(\ell_1), p(\ell_2), p(P_{jk}) (3 \leq j < k \leq 6)\} = \{u = -6, -2, -1, 0, 1, 2, 4, \infty\} \subset \ell_3$ とおく。まず、楕円曲面 $(S, p\pi, \ell_3)$ の global monodromy を調べる。そのために ℓ_3 内に base point $u_0 = -\frac{3}{2}$ をとり、その上の fibre $(p\pi)^{-1}(u_0)$ を v -平面の $\{0, 1/2, 1, 11/4\}$ で分岐する double cover とみて、下図のように $H_1((p\pi)^{-1}(u_0), \mathbb{Z})$ の basis r_1, r_2 を定める。



また $\ell_3 - \Delta$ の基本群の生成元 ρ_j ($1 \leq j \leq 8$) を下図のようにとる。



ρ_j ($1 \leq j \leq 8$) による ${}^t(r_1, r_2)$ の circuit matrix を N_j とする。 ρ_j に沿った r_1, r_2 の変形を追うことにより N_j が次のようになることがわかる。

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, & N_2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, & N_3 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 N_4 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & N_5 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, & N_6 &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \\
 N_7 &= \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, & N_8 &= \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

u_0 を基点とする ℓ_3 内の curve ρ と $(p\pi)^{-1}(u_0)$ 上の 1-cycle r に対し fibering $p\pi: S \rightarrow \ell_3$ の locally flatness から 連続的な 1-cycles $\rho(r)_u$

の family で $\rho(r_{u_0}) = r$ となるものがとれる。それらの union $\bigcup_{u \in \rho} \rho(r)_u$ は、実2次元の曲面となる。これを $\rho(r)$ で表す。circuit matrices N_j ($1 \leq j \leq 8$) が次の式をみたすので

$$N_4 N_5 = 1, \quad N_1 N_2 N_3 N_4 = 1, \quad N_5 N_6 N_7 N_8 = 1.$$

実2次元閉曲面 c_j ($1 \leq j \leq 4$)

$$c_1 := \rho_5^{-1} \rho_4^{-1}(\gamma_2), \quad c_2 := \rho_8 \rho_7 \rho_6 \rho_5(\gamma_1),$$

$$c_3 := \rho_1 \rho_2 \rho_3 \rho_4(\gamma_2), \quad c_4 := \rho_5 \rho_4(\gamma_1);$$

を得る。一方、二つの開曲面 $\rho_2 \rho_1(\gamma_2)$ と $\rho_3(\gamma_1)$ は、 $\pi^{-1}(u_0)$ 内で、共通の境界をもつ。これらを貼合わせることによって閉曲面 c_5 が得られる。 c_5 を

$$c_5 := \rho_2 \rho_1(\gamma_2) + \rho_3(\gamma_1)$$

で表すことにする。同様にして閉曲面 c_6 が

$$c_6 := \rho_6(\gamma_1) + \rho_8 \rho_7(\gamma_2)$$

で与えられる。

Lemma 3.1. cycles c_j ($1 \leq j \leq 6$) は、AC の任意の元と直交する。

Proof. AC の generators $c(jk)$ ($1 \leq j, k \leq 6, j \neq k$), c_l と直交することを示せばよい。

$c(12)$, c_l 以外の AC の generators は楕円曲面 $(S, \rho\pi, l_3)$ の singular fibres 上にあるから、 c_j ($1 \leq j \leq 6$) との交点数は明らかに 0 となる。

$c(12)$, c_l との交点数を調べるために、楕円曲面 $(S, \rho\pi, l_3)$ の regular fibre e_l と π に関する l_3 の strict transform \tilde{l}_3 との交点数を調べる。

$c_l \equiv 2\tilde{l}_3 + \sum_{k \neq 3} c(3k)$, $c_l \equiv c(12) + e_l$ であるから $c_j \cdot e_l = c_j \cdot \tilde{l}_3 = 0$ を示せばよい。 e_l として ρ_j ($1 \leq j \leq 8$) 上にはない点の regular fibre をとれば、明らかに c_j ($1 \leq j \leq 6$) との交点は 0 となる。

また \tilde{l}_3 と ρ_j ($1 \leq j \leq 8$) 上の regular fibre との交点は、regular fibre を v -平面の double cover とみたときの分岐点となっている。ゆえに $\bigcup_{u \in \rho_j} \rho_j(r_k)_u$ ($1 \leq j \leq 8, k=1, 2$) の構成のとき $\rho_j(r_k)_u$ が分岐点を通らないようにすれば \tilde{l}_3 と c_j ($1 \leq j \leq 6$) とが交わらない。 ■

次に cycles c_j ($1 \leq j \leq 6$) に対する dual cycles γ_k ($1 \leq k \leq 6$) (i.e. $c_j \cdot \gamma_k = \delta_{jk}$) を定める。 $b \in \Delta$ に対し μ_b で $l_3^+ = \{u \in \mathbb{C} : \text{Im } u \geq 0\}$ 内の u_0 から b への oriented curve を表すことにする。2-cycles γ_j ($1 \leq j \leq 6$) を以下のよ

うに定める。

$$\gamma_1 := \mu_{-2}(-2r_1) + \mu_0(r_1) + \mu_{-6}(r_1+r_2) + \mu_{-1}(-r_2),$$

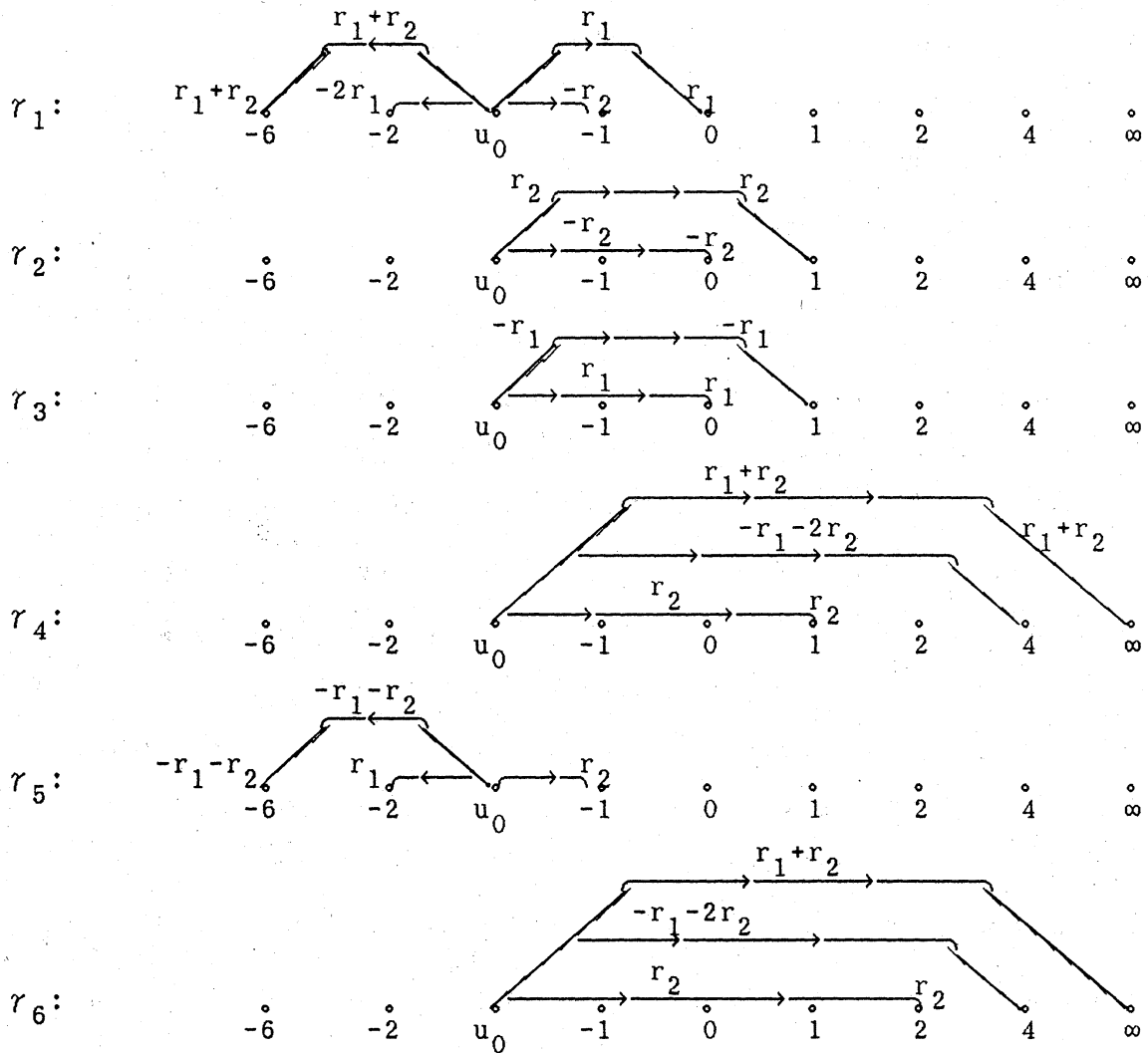
$$\gamma_2 := \mu_0(-r_2) + \mu_1(r_2),$$

$$\gamma_3 := \mu_1(-r_1) + \mu_0(r_1),$$

$$\gamma_4 := \mu_1(r_2) + \mu_4(-r_1-2r_2) + \mu_\infty(r_1+r_2),$$

$$\gamma_5 := \mu_{-6}(-r_1-r_2) + \mu_{-2}(r_1) + \mu_{-1}(r_2),$$

$$\gamma_6 := \mu_4(-r_1-2r_2) + \mu_2(r_2) + \mu_\infty(r_1+r_2).$$

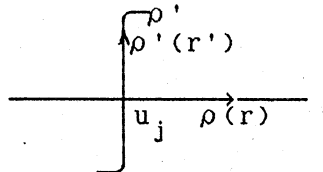


Lemma 3.2. cycles $\{\gamma_j\}$ ($1 \leq j \leq 6$) は、cycles $\{c_j\}$ ($1 \leq j \leq 6$) に対する dual cycles となり、cycles $\{c_j\}$ ($1 \leq j \leq 6$) の交点行列は、

$$A_T = 2 \begin{pmatrix} U & & \\ & U & \\ & & -I_2 \end{pmatrix}$$

となる。

Proof. 2-cycles c_j, γ_j ($1 \leq j \leq 6$) は、ともに $(p\circ\pi)^{-1}(u_0)$ 上の 1-cycle r の u_0 を基点とする ℓ_3 内の curve ρ に沿う接続によって定まっている。このような 2-cycles $c = \rho(r)$, $c' = \rho'(r')$ の交点は、 ℓ_3 内での ρ と ρ' との交点 u_j 上の regular fibre $(p\circ\pi)^{-1}(u_j)$ 内にある。そこでの交点数を計算するには、 u_j における r の ρ に沿う接続と r' の ρ' に沿う接続 $\rho(r)_{u_j}, \rho'(r')_{u_j} \in H_1((p\circ\pi)^{-1}(u_j), \mathbb{Z})$ を求めて、交点数 $\rho(r)_{u_j} \cdot \rho'(r')_{u_j}$, $\rho' \cdot \rho$, を計算しそれらの積をつくれればよい。つまり $-(\rho \cdot \rho')(\rho(r)_{u_j} \cdot \rho'(r')_{u_j})$ で求めることができる。 ρ と ρ' のすべての交点に関して上記のものを計算しそれらを加えればよい。



$$\rho(r)_{u_j}, \rho'(r')_{u_j} \in H_1((p\circ\pi)^{-1}(u_j), \mathbb{Z}),$$

$$\rho(r) \cdot \rho'(r') |_{u_j} = -(\rho \cdot \rho')(\rho(r)_{u_j} \cdot \rho'(r')_{u_j})$$

実際に c_j, γ_j ($1 \leq j \leq 6$) に対し上記のことを行えばよい。 ■

§ 4 周期関係式

K3曲面 X に対し $H_2(X, \mathbb{Z})$ の基底 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{22}\}$ と X 上 0 にならない正則 2-form ϕ をとる。また、 $\{e_1, \dots, e_{22}\}$ を $\{\gamma_1, \dots, \gamma_{22}\}$ に対する $H^2(X, \mathbb{Z})$ の 双対基底 (i.e. $e_j(\gamma_k) = \delta_{jk}$) とし、22次正方行列 A を $A = (a_{jk})$, $a_{jk} = e_j \cdot e_k \in H^4(X, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}$ で定める。K3曲面 X の周期 $\Omega = (\omega_1, \dots, \omega_{22})$, $\omega_j = \int_{\gamma_j} \phi$ ($j=1, \dots, 22$) は、次の周期関係式をみたす。

Proposition 4.1. $\Omega A {}^t\Omega = 0$, $\Omega A {}^t\bar{\Omega} > 0$.

Proof. e_j を自然に $H^2(X, \mathbb{R})$ の元とみて対応する d-closed 2-form を ψ_j で

表せば、 $a_{jk} = \int_X \psi_j \wedge \psi_k$ である。 $\{\psi_j\}$ は $H^2(X, \mathbb{R})$ の基底で $d\psi = 0$ であるから、 $\phi = \sum_{j=1}^{22} m_j \psi_j + dv$, $m_j \in \mathbb{C}$, $v: C^\infty$ 1-form, と表せる。一方、

$$\int_{\gamma_k} \psi_j = e_j(\gamma_k) = \delta_{jk} \text{ であるから、}$$

$$\omega_k = \int_{\gamma_k} \phi = \int_{\gamma_k} (\sum_{j=1}^{22} m_j \psi_j + dv) = \sum_{j=1}^{22} m_j \delta_{jk} = m_k$$

を得る。 $\phi' = \sum_{j=1}^{22} \omega_j \psi_j$ と置く。 $\int_X \phi \wedge \phi = 0$ と Stokes の定理より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_X \phi \wedge \phi = \int_X (\phi' + dv) \wedge (\phi' + dv) = \int_X \phi' \wedge \phi' + 2 \int_X \phi' \wedge dv + \int_X dv \wedge dv \\ &= \int_X \phi' \wedge \phi' = \int_X (\sum_{j=1}^{22} \omega_j \psi_j) \wedge (\sum_{k=1}^{22} \omega_k \psi_k) = \sum_{j,k=1}^{22} \omega_j \left(\int_X \psi_j \wedge \psi_k \right) \omega_k \\ &= \sum_{j,k=1}^{22} \omega_j a_{jk} \omega_k = \Omega A^t \Omega \end{aligned}$$

を得る。また、 $\int_X \phi \wedge \bar{\phi} > 0$ であることから、

$$\begin{aligned} 0 < \int_X \phi \wedge \bar{\phi} &= \int_X \phi' \wedge \bar{\phi}' = \int_X (\sum_{j=1}^{22} \omega_j \psi_j) \wedge (\sum_{k=1}^{22} \bar{\omega}_k \bar{\psi}_k) \\ &= \sum_{j,k=1}^{22} \omega_j \left(\int_X \psi_j \wedge \bar{\psi}_k \right) \bar{\omega}_k = \sum_{j,k=1}^{22} \omega_j a_{jk} \bar{\omega}_k = \Omega A^t \bar{\Omega} \end{aligned}$$

を得る。 ■

K3曲面 S に対して周期関係式を具体的に求めてみよう。 $\gamma_1, \dots, \gamma_6$ を § 3 で構成した 2-cycles とし $\langle \gamma_7, \dots, \gamma_{22} \rangle$ を $NS(S)$ の基底とする。§ 2 で示したように $\langle \gamma_1, \dots, \gamma_6, \gamma_7, \dots, \gamma_{22} \rangle$ は、 $H_2(S, \mathbb{Z})$ の基底となる。 γ_j に対する $H^2(S, \mathbb{Z})$ の双対基底を $\langle e_1, \dots, e_6, e_7, \dots, e_{22} \rangle$ とする。 $H_2(S, \mathbb{Z})$ の元 c に対し $(c \cdot \cdot): H_2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ は $H^2(S, \mathbb{Z})$ の元とみれば、 $(c \cdot \cdot) \cdot (c' \cdot \cdot) = c \cdot c'$ となる。§ 3 で構成した 2-cycles $c_j (1 \leq j \leq 6)$ は、 $c_j \cdot \gamma_k = \delta_{jk}$, $c_j \in NS(S)^\perp$ をみたすので $(c_j \cdot \cdot) = e_j (1 \leq j \leq 6)$ となる。また、Lemma 3.2 より交点行列 $(e_j \cdot e_k) (1 \leq j, k \leq 22)$ は、

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2U & & & * \\ & 2U & & * \\ \hline & & -2I_2 & \\ * & & & * \end{array} \right) \quad \text{ここで} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

の形となる。正則 2-form $\eta = \prod_{j=1}^6 (z_{1j}s^1 + z_{2j}s^2 + z_{3j}s^3)^{-\frac{1}{2}} ds^1 \wedge ds^2$ を 2-cycle γ_j ($j=1, \dots, 22$) 上での積分し周期 $\Omega(S) = (\omega_1(S), \dots, \omega_{22}(S))$,

$\omega_j(S) = \int_{\gamma_j} \eta$ を構成する。 $\gamma_j \in NS(S)$ ($7 \leq j \leq 22$) より $\omega_j(S) = 0$ ($7 \leq j \leq 22$) となる。このことに注意して Proposition 4.1 を用いると

$$(4.1) \quad (\omega_1(S), \dots, \omega_6(S)) \begin{pmatrix} 2U & & \\ & 2U & \\ & & -2I_2 \end{pmatrix} {}^t(\omega_1(S), \dots, \omega_6(S)) = 0$$

$$(4.2) \quad (\omega_1(S), \dots, \omega_6(S)) \begin{pmatrix} 2U & & \\ & 2U & \\ & & -2I_2 \end{pmatrix} {}^t(\overline{\omega_1(S)}, \dots, \overline{\omega_6(S)}) > 0$$

を得る。

$w_j(s) := \omega_j(S)/\omega_1(S)$ と置くと (4.1) から

$$w_2(S) = -w_3(S)w_4(S) + \frac{1}{2}\{w_5(S)^2 + w_6(S)^2\}$$

を得る。これを (4.2) に代入すると

$$\begin{aligned} & -w_3(S)w_4(S) + \frac{1}{2}\{w_5(S)^2 + w_6(S)^2\} - \overline{w_3(S)}\overline{w_4(S)} + \frac{1}{2}\{\overline{w_5(S)}^2 + \overline{w_6(S)}^2\} \\ & + w_3(S)\overline{w_4(S)} + \overline{w_3(S)}w_4(S) - w_5(S)\overline{w_5(S)} - w_6(S)\overline{w_6(S)} \\ = & - (w_3(S) - \overline{w_3(S)})(w_4(S) - \overline{w_4(S)}) + \frac{1}{2}\{(w_5(S) - \overline{w_5(S)})^2 + (w_6(S) - \overline{w_6(S)})^2\} > 0 \end{aligned}$$

これより

$$(4.3) \quad 2\text{Im}(w_3(S))\text{Im}(w_4(S)) - \text{Im}(w_5(S))^2 - \text{Im}(w_6(S))^2 > 0$$

を得る。また、 $Z(S) := \begin{pmatrix} w_3(S) & \frac{1}{1+i}(w_5(S) + iw_6(S)) \\ \frac{1}{1-i}(w_5(S) - iw_6(S)) & w_4(S) \end{pmatrix}$ と置くと

(4.3) は、 $\det\left(\frac{Z(S) - {}^t\overline{Z(S)}}{2i}\right) > 0$ と同値となる。