数理解析研究所講究録
第 729 巻 1990 年 92-103

超幾何型常微分方程式系の２変数化の試み

作陽音大　横山利章　(Toshiaki Yokoyama)

次の形の常微分方程式系を"超幾何型"という：

(1) $$(t-B)dZ/dt = AZ,$$

ここで、tは複素変数、Zはn次元タテベクトル、A、Bは定数を成分とするn次正方行列であるが、Bは対角とする。この方程式系については、次の大久保[1]の結果がある：

(i)任意の単独高階フックス型常微分方程式は、適当な変換により、(1)の形に書ける。

(ii)(1)がアクセサリーパラメータをもたないならば、そのモノドロミー群は代数的操作で求められる。

筆者の興味は、これらのことがらを２変数に拡張することにある。　つまり、解空間の次元が有限な２変数偏微分方程式系のあるクラスを考え、そのクラスの方程式系をある特別な形の大域的な解析のしやすい全微分方程式系になおし、その全微分方程式系について上記(ii)のような結果を示したい。

以下は、その１つの試みである。

§1. 方程式系

次の全微分方程式系を考える：

(2) $$dZ = \Omega Z, \quad \Omega = (x-B)^{-1}A\,dx + (A-\rho_1-\rho_2)(y-B)^{-1}dy - A\frac{d(x-y)}{x-y},$$

ここで、x、yは複素変数、Zはn次元タテベクトル、A、Bは定数を成分とするn次正方行列であるが、Aは

(3) $$(A-\rho_1)(A-\rho_2) = 0$$

をみたし、Bは対角とする。方程式系(2)が完全積分可能であること、即ち、$d\Omega = \Omega \wedge \Omega$が成り立つことは、(3)と

$$(x-B)^{-1}(y-B)^{-1} = -\frac{1}{x-y}\left\{(x-B)^{-1} - (y-B)^{-1}\right\}$$

を用いて直接計算することにより、容易に確められる。

以下では、Bの対角成分に重複を許し、

$$B = \mathrm{diag}(\overbrace{\lambda_1, \cdots, \lambda_1}^{n_1}, \overbrace{\lambda_2, \cdots, \lambda_2}^{n_2}, \cdots, \overbrace{\lambda_p, \cdots, \lambda_p}^{n_p})$$

$$(\lambda_k \neq \lambda_\ell \ (k \neq \ell), \quad n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n)$$

とする。また、

$$A = \begin{pmatrix} A^{11} & \cdots & A^{1p} \\ & \cdots\cdots & \\ A^{p1} & \cdots & A^{pp} \end{pmatrix},$$ A^{jk}は$n_j \times n_k$行列、

と書いたとき、

$$A^{kk} = \mathrm{diag}(\alpha_{k,1}, \cdots, \alpha_{k,n_k}) \quad (1 \leqq k \leqq p)$$

とする。　さらに、次の(C.1)-(C.3)を仮定する：

(C.1)　$\alpha_{k,t},\ \alpha_{k,t} - \alpha_{k,t'} \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \quad (1 \leqq k \leqq p,\ 1 \leqq t \neq t' \leqq n_k)$,

(C.2)　$\rho_i \neq -1, -2, \cdots \quad (i = 1, 2)$,

(C.3)　$\rho_1 - \rho_2 \neq 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$ 。

なお、(3)と(C.3)より A は ρ_i $(i = 1, 2)$ を固有値として対角化可能であるが、ρ_i の固有値としての重複度を m_i で表す。

§2. 基本解

本節では、モノドロミー群の計算に都合のよい(2)の基本解について述べる。　(2)を

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x} = \{(x-B)^{-1} - \dfrac{1}{x-y}\} A Z & (4.1) \\[2ex] \dfrac{\partial Z}{\partial y} = \{(A - \rho_1 - \rho_2)(y-B)^{-1} - \dfrac{1}{y-x} A\} Z & (4.2) \end{cases}$$

の形に書く。　(4.1)で y をパラメータとみなして、次を得る：

<u>命題1</u>　(4.1)は次の形の解をもつ：

$$\tilde{Z}_{k,t}(x,y) = (x - \lambda_k)^{\alpha_{k,t}} \sum_{m=0}^{\infty} G_m^{k,t}(y)(x - \lambda_k)^m$$

$$(1 \leqq k \leqq p,\ 1 \leqq h \leqq n_k),$$

ここで、$y \neq \lambda_k$、$G_0^{k,h}(y) \equiv {}^t(0, \cdots, 1, \cdots, 0)$（第 $n_1 + \cdots + n_{k-1} + h$ 成分のみ1、他は0）であり、$\sum_{m=0}^{\infty} G_m^{k,h}(y)(x-\lambda_k)^m$ は（$y \neq \lambda_k$ を止める毎に）$x = \lambda_k$ の近傍で収束。□

$\tilde{Z}_{k,h}(x,y)$ がそのまま(2)の解になるわけではないが、その1つの重要な性質を述べておく。　このことが、(2)のモノドロミー群の計算のキーとなる。

命題2　$\tilde{W}_{k,h}(x,y) := (x-\lambda_k)^{-\alpha_{k,h}} \tilde{Z}_{k,h}(x,y)$ とおく。$\mathcal{D}_k$ は、λ_k を含み λ_ℓ ($\forall \ell \neq k$) は含まない任意の単連結領域とする。さらに、$\Delta_k = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathcal{D}_k}$ とおく。　このとき、$\tilde{W}_{k,h}(x,y)$ は $(x,y) \in \mathcal{D}_k \times \Delta_k$ で正則である。　特に、$\tilde{W}_{k,h}(x,y)$ は、$x \in \mathcal{D}_k$ を止める毎に、$y = \lambda_\ell$ ($\ell \neq k$) で正則である。□

さて、

$$Z_{k,h}(x,y) = (y-\lambda_k)^{-\rho_1-\rho_2} \tilde{Z}_{k,h}(x,y)$$

$$(1 \leqq k \leqq p,\ 1 \leqq h \leqq n_k)$$

とおくと、次が成り立つ。

定理1　$Z_{k,h}(x,y)$ $(1 \leqq k \leqq p,\ 1 \leqq h \leqq n_k)$ は(2)の基本解をなす。□

§3. モノドロミー群

(2)の基本解行列

$$(Z_{1,1}(x,y),\cdots,Z_{1,n_1}(x,y),\cdots,Z_{p,1}(x,y),\cdots,Z_{p,n_p}(x,y))$$

を $Z(x,y)$ であらわす。　本節では、(2)の $Z(x,y)$ に関するモノドロミー群について考察する。

まず、基点 $(x_0,y_0)\in\mathbb{C}^2\setminus S$ を任意に固定する。　ここで、S は(2)の特異点集合

$$S=\bigcup_{k=1}^{p}(\{x=\lambda_k\}\cup\{y=\lambda_k\})\cup\{x=y\}$$

である。　(x_0,y_0) を起点かつ終点とする $\mathbb{C}^2\setminus S$ 内のループ μ_k、ν_k $(0\leqq k\leqq p)$ を図1、図2のように定義する。　このとき、μ_k、ν_k $(0\leqq k\leqq p)$ は $\pi_1(\mathbb{C}^2\setminus S;(x_0,y_0))$ の生成元となる。

$Z(x,y)$ を μ_k (resp. ν_k) にそって解析接続すると新たな基本解行列 $Z(x,y)M_k$ (resp. $Z(x,y)N_k$) が得られる。　ここで、M_k、N_k は $GL(n;\mathbb{C})$ の元である。　M_k $(0\leqq k\leqq p)$ 及び N_k $(0\leqq k\leqq p)$ で生成される $GL(n;\mathbb{C})$ の部分群を(2)の $Z(x,y)$ に関するモノドロミー群という。　以下、

$$e_{k,h}=\exp(2\pi\sqrt{-1}\,\alpha_{k,h})\qquad(1\leqq k\leqq p,\ 1\leqq h\leqq n_k),$$

$$f_i=\exp(-2\pi\sqrt{-1}\,\rho_i)\qquad(i=1,2)$$

と略記する。

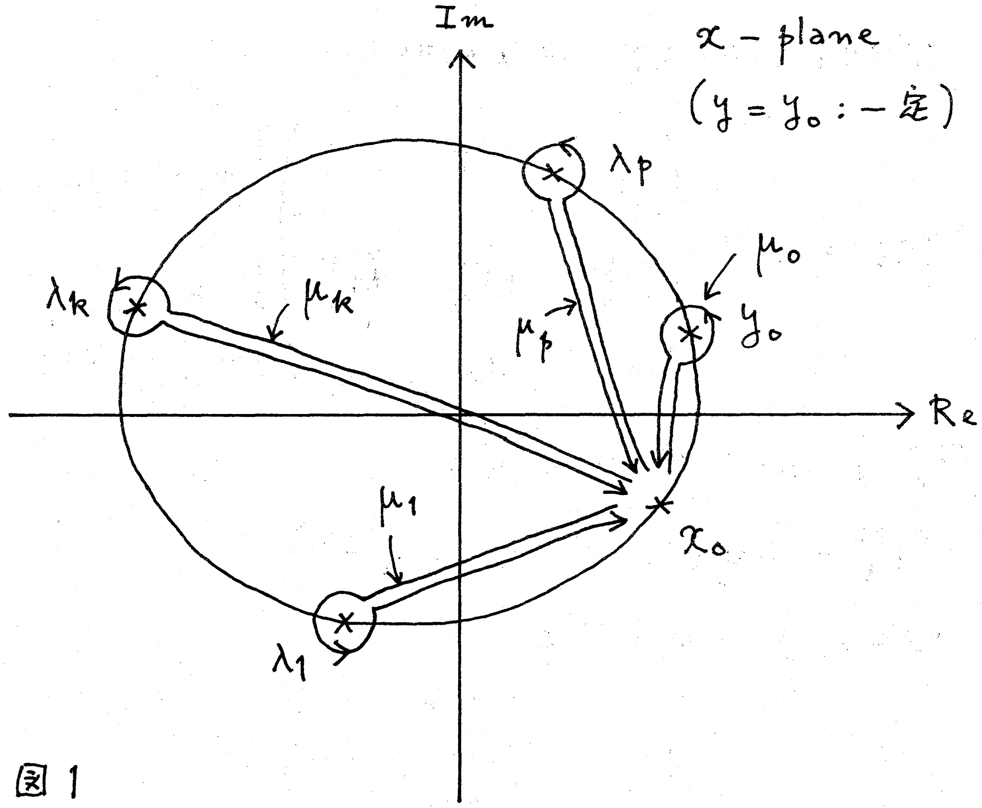

Im
x - plane
(y = y₀ : 一定)
λp
μ₀
λk
μk
μp
y₀
Re
μ₁
x₀
λ₁

図 1

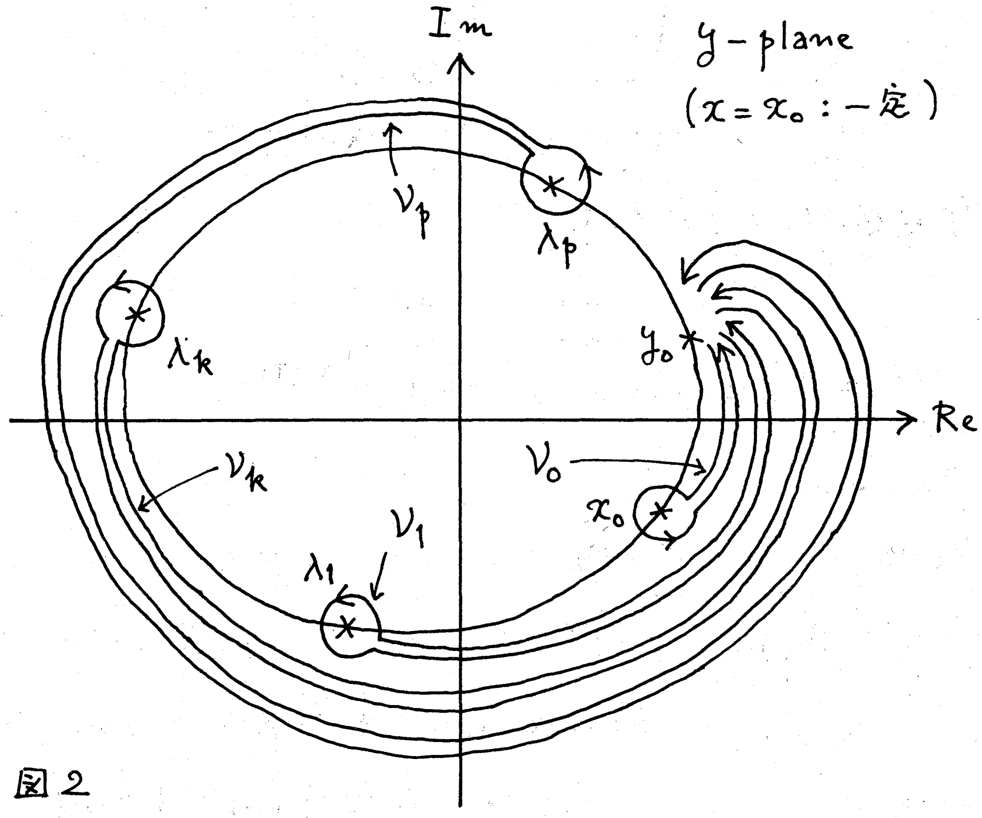

Im
y - plane
(x = x₀ : 一定)
νp
λp
λk
y₀
Re
νk
ν₀
x₀
ν₁
λ₁

図 2

<u>定理2</u>　(i) M_k $(1\leqq k\leqq p)$ は次の形をもつ:

$$M_k = I + \left(\begin{array}{ccccc} & & 0 & & \\ \tilde{M}_k^{k1} & \cdots & \tilde{M}_k^{kk} & \cdots & \tilde{M}_k^{kp} \\ & & 0 & & \end{array}\right) \begin{array}{l} \}\; n_1+\cdots+n_{k-1} \\ \}\; n_k \\ \}\; n_{k+1}+\cdots+n_p \end{array} ,$$

ここで、$\tilde{M}_k^{ij}$ は $n_i\times n_j$ 行列であり、

$$\tilde{M}_k^{kk} = \mathrm{diag}(e_{k,1}-1,\cdots,e_{k,n_k}-1).$$

(ii) N_k $(1\leqq k\leqq p)$ は次の形をもつ:

$$N_k = I + \left(\begin{array}{ccc} & \tilde{N}_k^{1k} & \\ & \vdots & \\ 0 & \tilde{N}_k^{kk} & 0 \\ & \vdots & \\ & \tilde{N}_k^{pk} & \end{array}\right) .$$
$$\begin{array}{ccc} \underbrace{\qquad\qquad}_{n_1+\cdots+n_{k-1}} & \underbrace{\qquad}_{n_k} & \underbrace{\qquad}_{n_{k+1}+\cdots+n_p} \end{array}$$

(iii) ある $T\in GL(n;\mathbb{C})$ が存在し、

$$M_0 = T^{-1}\cdot\mathrm{diag}(\overbrace{f_1,\cdots,f_1}^{m_1},\overbrace{f_2,\cdots,f_2}^{m_2})\cdot T \tag{5}$$

が成り立つ。□

証明の概略.　(i)、(iii)は既に大久保[1]が示している。(ii)は命題2より従う。　実際、$Z_{j,h}(x_0,y)$ $(j\neq k)$ は $y=\lambda_k$ で正則だから、ν_k にそって解析接続しても不変である。　これは、N_k が上の形となることに他ならない(図3、4参照)。(終)

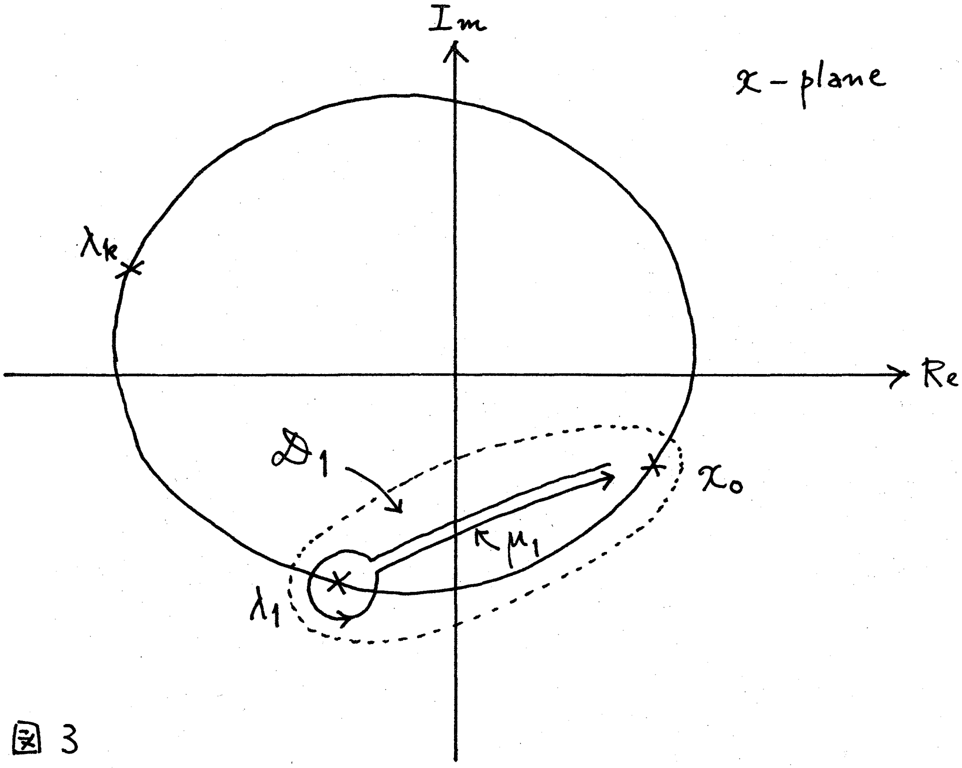
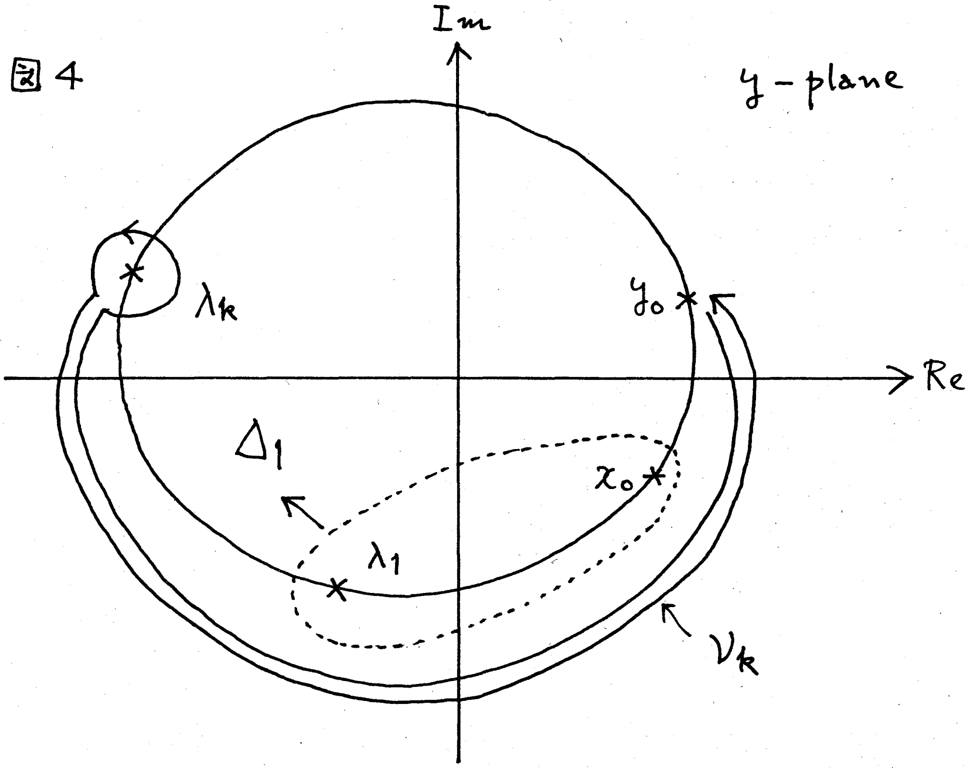


図 3

図 4



破線のように$\mathcal{D}_1$をとれば、ν_kは$\mathcal{D}_1 \times \Delta_1$に含まれる.

定理3　M_k、N_k $(0 \leqq k \leqq p)$には、次の関係がある：

(6)　$$M_1 M_2 \cdots M_p M_0 = I,$$

(7)　$$N_p N_{p-1} \cdots N_1 N_0 = f_1 f_2 I,$$

(8)　$$N_0 = M_0. \quad \square$$

証明の概略.　(6)は$(4.1)_{y=y_0}$の特異点が$x=\lambda_1, \cdots, \lambda_p, y_0$のみである（$x=\infty$は特異点ではない）ことより従う。(7)は$(4.2)_{x=x_0}$の特異点が$y=\lambda_1, \cdots, \lambda_p, x_0, \infty$であり、$y=\infty$では

$$(A-\rho_1-\rho_2)(y-B)^{-1} - \frac{1}{y-x_0}A = -(\rho_1+\rho_2)\frac{1}{y} + O\left(\frac{1}{y^2}\right)$$

であることより従う。(8)はν_0がμ_0にホモトピックであることより従う。（終）

注意　(6)、(7)で、積の順序はループの定義に依る。(6)の$M_1 \cdots M_p$の部分と(7)の$N_p \cdots N_1$の部分が逆順となることに注意。

さて、本稿の主定理を述べよう。

$$N = n^2 - n + 2 - \sum_{k=1}^{p} n_k^2 - \sum_{i=1}^{2} m_i^2$$

とおく。

定理4　$N=0$ならば、M_k $(0 \leqq k \leqq p)$及びN_k $(0 \leqq k \leqq p)$を、対角変換を除いて、具体的に決定することができる。$\square$

証明の概略. 大久保[1]が示しているように、N = 0 ならば、(5)と(6)から M_k $(0 \leqq k \leqq p)$ を対角変換を除いて具体的に決めることができる。 (6)、(7)、(8)より

(9) $$N_p N_{p-1} \cdots N_1 = f_1 f_2 M_1 M_2 \cdots M_p$$

が成り立つが、この関係式から、N_k $(1 \leqq k \leqq p)$ も対角変換を除いて具体的に決めることができる。(定理2(ii)より、(9)の左辺には決定すべき成分が $\sum_{k=1}^{p} n_k \times n = n^2$ 個ある。 これは、(9)の関係式の個数と一致する。) (終)

注意 N = 0 ということは、(2)がアクセサリーパラメータをもたないということに他ならない。

§4. 他の方程式系との関係

最後に、適当な変換で、(2)の形に書ける偏微分方程式系を列挙する。 いずれも、従属変数だけでなく独立変数の変換も必要である。

(a) F_1 のみたす方程式系

$$\begin{cases} (x\partial_x(x\partial_x + y\partial_y + \gamma - 1) - x(x\partial_x + \beta)(x\partial_x + y\partial_y + \alpha))z = 0 \\ (y\partial_y(y\partial_y + x\partial_x + \gamma - 1) - y(y\partial_y + \beta')(y\partial_y + x\partial_x + \alpha))z = 0, \end{cases}$$

ここで、$\partial_x = \partial/\partial x$、$\partial_y = \partial/\partial y$ であり、$\alpha, \beta, \beta', \gamma$ は定数である。 この場合は、(2)で $n = 3$ である。 また、N = 0

となる。

(b) F_2 のみたす方程式系

$$\begin{cases} (x\partial_x(x\partial_x+\gamma-1)-x(x\partial_x+\beta)(x\partial_x+y\partial_y+\alpha))z=0 \\ (y\partial_y(y\partial_y+\gamma'-1)-y(y\partial_y+\beta')(y\partial_y+x\partial_x+\alpha))z=0, \end{cases}$$

ここで、$\alpha, \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ は定数である。　この場合は、(2) で $n=4$ である。　また、$N=0$ となる。

(c) 高山 [2] による (b) の一般化

$$\begin{cases} (x\partial_x(x\partial_x+\gamma-1)-x(x\partial_x+\beta)(x\partial_x+y\partial_y+\alpha))z=0 \\ (\sum_{k=0}^{m} y^k p_k(y\partial_y)(y\partial_y+x\partial_x+\alpha,\ k))z=0, \end{cases}$$

ここで、$p_k(\zeta)$ は ζ の多項式で、

$$\deg p_0=m,\quad \deg p_k \leqq m-k \quad (1\leqq k\leqq m)$$

をみたすものである。　また、(ζ, k) は

$$(\zeta, 0)=1,\quad (\zeta, k)=\zeta(\zeta+1)\cdots(\zeta+k-1) \quad (k\geqq 1)$$

である。　この場合は、(2) で $n=2m$ である。

以上、詳細は現在準備中の [3] を見られたい。

参考文献

[1] K. Okubo, On the group of Fuchsian equations, 都立大学数学教室セミナー報告, 1987.

[2] N. Takayama, Euler-Poisson-Darboux equation,

harmonic equation and special functions of several variables, to appear in Proc. Franco-Japanese colloquium on differential equations at Strasbourg in 1985.

[3] T. Yokoyama, A system of total differential equations of two variables and its monodromy group, preprint.

追記. 今年(1990年)になって、Hermitian invariantに関する結果が得られた。大久保[1]の Ch. 3, Th. 6 がそのまま N_k $(1 \leqq k \leqq p)$ についても成り立つ。これについても詳しくは[3]を見られたい。