数理解析研究所講究録
第 729 巻 1990 年 113-121

接続係数の数式処理による数値計算

大分大・工　大河内 茂美
Shigemi Ohkohchi

ここでは、常微分方程式の大域的問題である接続問題の接続係数を数式処理を利用して、数値計算を考えてみる。 このような形で、数式処理を考えるのは、数学以外の人に、数式処理の有用性を理解してもらうには、適切ではないかと考えたからです。

A.M.Emamzadeh は、無限遠点を不確定特異点とし、有限平面内に変わり点を有限個もつような、2階の線形常微分方程式のストークス係数の数値計算をおこなっている。それは、大略、次のような方法によるものである。

微分方程式（q(z) は、z の多項式程度としておきます。）

$$w'' = q(z)w$$

に対し、不確定特異点（無限遠点）での解として、次の２つの漸近解（W.K.B.解）を考える。

$$w_1(z) = A\cdot(q(z))^{-\frac{1}{4}}\exp[i\cdot\int^z q(u)^{\frac{1}{2}}du]\{a\ descending\ series\}$$
$$w_2(z) = B\cdot(q(z))^{-\frac{1}{4}}\exp[-i\cdot\int^z q(u)^{\frac{1}{2}}du]\{a\ descending\ series\}$$

ここで、A､B は任意定数としておく。

ひとつの角領域で、z を無限大とするとき、dominantな解の係数（A または B）

を次のように決定する。（いま、考えている領域では、$w_1(z)$ は dominant で、$w_2(z)$ は subdominant であるとしておく。） 初期条件を

$$w(0)=0, \quad w'(0)=1$$

として（初期条件は固定してかんがえる。）、解を絶対値が1の点まで延長する。そこからは、z を無限大としたとき、$w_2(z)$ は subdominant であるから無視でき、

$$y(z)=\frac{w_1(z)}{q(z)^{-1/4}\exp[i\cdot\int^z q(u)^{1/2}du]} \quad \to A$$

である点に注意して、$y(z)$ の満たす微分方程式を求めると、次の方程式が得られる。

$$y''+2(i\cdot q(z)^{1/2}-\tfrac{1}{4}q(z)^{-1})y' \\ +\{\tfrac{1}{4}(i-1)q(z)^{-1/2}-q(z)-1+\tfrac{5}{16}q(z)^{-2}\}y=0$$

ここで、z が無限遠点に近ずくとき、$y(z)$ が A になる事実から、dy/dz および d^2y/dz^2 はゼロとなるのであるが、その漸近展開から、d^2y/dz^2 の方がより速くゼロとなるので、計算結果に与える影響が少ない筈である。そのため、d^2y/dz^2 の項を無視して、上で得られた微分方程式を1階の微分方程式と見なし、接続の結果、得られた条件を初期条件として、求積し、解を z の絶対値が 10^8 まで接続して、A の近似値を求めている。 いまは、1つの領域で話を進めて来たが、ストークス曲線で隣あう、各、角領域で、同一の初期条件の解 $w(z)$ の漸近解のうちの dominannt な漸近解の係数を求め、それらをもとに、ストークス係数を計算している。具体例として、解析的な結果の分かっている、エアリー関数が満たす微分方程式

$$w''=z^n\cdot w$$

を取り上げている。この場合には、ストークス係数の解析的な値は

$$T = 2i\cdot\cos[\pi/(n+2)]$$

で与えられる。これをもとに、次の数値計算結果との比較を得ている。

A. M. EMAMZADEH

TABLE 1

n	The Stokes constant	
	Numerical values	Analytical values
1	0·999999999998 i	1 i
2	1·41421356237 i	1·41421356237 i
3	1·61803398875 i	1·61803398875 i
4	1·73205080763 i	1·73205080757 i
5	1·80193773476 i	1·80193773581 i
6	1·84775906494 i	1·84775906502 i

The above numerical results were produced by the computer programme which has been written for this purpose in ALGOL 60 and it is available upon request. The programme was tested and run on a CDC 7600 computer. It takes 13 to 36 seconds to produce each one of the above numbers. The computation time is increased as n increases.

上記の結果と数式処理の計算結果とを比較対照するために、central connection の接続係数を計算するのに、Bakken の方法を利用することにする。ここでは、簡単のために、その方法を、原点が正則点の場合として考えることにする。（もちろん、原点が確定特異点の場合の方が興味があるとおもわれるが、）それは次のような定理である。

Y(x,a) は微分方程式

$$y'' - [x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m]y = 0 \qquad (m \geq 1)$$

の不確定特異点（無限遠点）での正の実軸上 subdominant な解とし、

K(x,a) は、正の実軸上 x を無限大にするとき、

$$Y(x,a)/K(x,a) \to 1$$

となるものとする。

このとき、

$$\begin{aligned} Y(x,a) &= \int_x^\infty Y(t,a)(t^m + a_1 t^{m-1} + \cdots + a_m)(t-x)dt \\ &= \int_x^\infty Y(t,a)F_0(x,t,a)dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &= \int_x^\infty Y(t,a)F_n(x,t,a)dt \end{aligned}$$

とすれば、t に関して一様に

$$F_n(x,t,a) \to 0 \qquad (n \to \infty)$$

が成立し、さらに

$$Y(x,a) = \lim_{n\to\infty} \int_x^\infty K(t,a)F_n(x,t,a)dt$$

である。

ここで、実際上は、K(x,a) は Y(x,a) の漸近展開

$$y(x,a) \simeq x^{r(a)}\{1+\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^{-n/2}\}\exp[-E(x,a)]$$

ただし

$$\left(1+\frac{a_1}{z}+\cdots+\frac{a_m}{z^m}\right)^{\frac{1}{2}} = 1+\sum_{h=1}^{\infty} b_h(a)z^{-h}$$

$$r(a) = \begin{cases} -\frac{1}{4}m & (m:\mathrm{odd}) \\ -\frac{1}{4}m - b_{m/2}(a) & (m:\mathrm{even}) \end{cases}$$

$$E(x,a) = \frac{2}{m+2}\cdot x^{\frac{m+2}{2}} + \sum_{1\le h\le (m+2)/2} \frac{2}{(m+2-2h)} b_h(a)x^h$$

の主要部を用いて、

$$K(x,a)=x^{r(a)}\exp[-E(x,a)]$$

とする。また、$F_n(x,t,a)$ は次の漸化式から定まることに注意しておく。

$$F_0(x,t,a)=(t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_m)(t-x)$$

$$F_{n+1}(x,t,a)=(t^m+a_1t^{m-1}+\cdots+a_m)\cdot\int_x^t F_n(x,u,a)(t-u)du$$

Emamzadeh と同様に、エアリー関数の場合に接続係数の解析的な値と計算結果とを比較してみることにする。

例　　$y''-x^m y=0$ の場合

$$K(x)=x^{-m/4}\exp[-\frac{2}{m+2}x^{(m+2)/2}]$$

$$F_0(x,t)=t^m(t-x)$$

$$F_{n+1}(x,t)=t^m\cdot\int_x^t F_n(x,u)(t-u)du$$

$$Y(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty K(t)F_n(0,t)dt$$

$$Y'(0)=\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty K(t)F_n'(0,t)dt$$

より求まるが、n=5 とした場合の(y(0),y'(0) の近似値に対応する)出力結果は次のように得られる。

```
                 6*M  11
                X    *X                           10          9
INT(------------------------------,X)/(120*(120*M    + 2674*M    + 26757
                          M
     M/4   (2*SQRT(X) *X)/(M + 2)
    X    *E

      8          7            6             5             4
   *M   + 158341*M   + 613733*M   + 1628185*M   + 2994278*M   + 3769464

      3            2
   *M   + 3108992*M   + 1517136*M + 332640))
```

```
                         6*M  10
                        X    *X                                      10          9
- INT(------------------------------,X)/(120*(120*M    + 2126*M   +
                                   M
          M/4   (2*SQRT(X)  *X)/(M + 2)
         X    *E

              8               7                6              5              4
    16893*M   + 79259*M   + 243097*M   + 509135*M   + 737122*M   +

               3               2
    728136*M   + 469408*M   + 178224*M + 30240))
```

結果を数値的に見るために、m=1 として解析的な値とその近似値を求めてみると、次のようになる。

```
                 17                                        16
                X                                         X
INT(------------------------,X)          INT(------------------------,X)
     1/4   (2*SQRT(X)*X)/3                    1/4   (2*SQRT(X)*X)/3
    X    *E                                  X    *E
---------------------------------      -  ---------------------------------
          1698278400                                359251200
```

解析的な値

$$Y(0)=\frac{\Gamma(1/3)\cdot 3^{-1/6}}{\sqrt{\pi}}$$

$$=1.258541622...$$

反復回数5の計算結果

$$\tilde{Y}(0)=\int_0^\infty x^{17-1/4}\exp[-\tfrac{2}{3}\,x^{2/3}]dx\ /1698278400$$

$$=(3/2)^{10+1/2+1/3}\ \Gamma(10+11/6)\ /1698278400$$

$$=1.266260731...$$

ここで、

$\Gamma(1/3) = 2.6789385347...$

$\Gamma(2/3) = 1.3541179394...$

と、ガンマ関数の duplication formula を用いて計算してある。
同様に

$$Y'(0) = \Gamma(2/3)\cdot 3^{1/2-1/3}/\sqrt{\pi}$$
$$= -0.9174908809...$$

$$\tilde{Y}'(0) = -0.9234693897...$$

解析的によく分かっている例を取り上げて説明したが、大域的挙動が解析的には分からない微分方程式の接続係数の計算このような形での利用が有効な場合があるのではないかと考えている。というのも、応用上の具体的な測定結果とつきあわせる場合には、ある程度の近似的な結果で十分なのだから。

次に、いま考えた central connection problem の近似計算を利用することを考えてみたい。a をパラメーターとして、微分方程式

$$y'' - (x^{2m} + ax^{m-1})y = 0,$$

を考える。この方程式の解で、正の実軸上 subdominant な解は次の形の漸近展開

$$y(x,a) = x^{-\frac{1}{2}a - \frac{1}{2}m}\exp[-\frac{1}{m+1}x^{m+1}][1+O(x^{-\frac{1}{2}})],$$

をもつが、原点では

$$y(0,a) = 2^{\frac{m+a}{2m+2}}(m+1)^{-\frac{m+a}{2m+2}}\frac{\Gamma(1/(m+1))}{\Gamma((a+m+2)/(2m+2))}$$

$$y'(0,a) = 2^{\frac{a+m+2}{2m+2}}(m+1)^{-1-\frac{a+m}{2m+2}}\frac{\Gamma(-1/(m+1))}{\Gamma((a+m)/(2m+2))}$$

となることが分かっている。ここでは、逆に、独立変数 x を固定し、パラメーター a が十分大きくなった場合の解の挙動について考えてみたい。

$$\varepsilon^2 y'' = (x^{m-1} + \varepsilon^2 x^{2m}) y$$
$$a = \varepsilon^{-2} \quad (\varepsilon \to 0)$$

の形に書き直してみると、原点 x=0 を m-1 位の変わり点として持つ変わり点問題であることが分かる。従って、この方程式に、従属変数の変換による一様簡略化を行うと、次の形の方程式に簡略化できる。

$$\varepsilon^2 z'' = x^{m-1} \cdot z$$

このとき、（簡単のため、m=2 とするが、一般の場合には、拡張したエアリー関数を用いることとして）$Z_i(x)$ (i=1,2) を、それぞれ、第一種、第二種のエアリー関数として、２つの独立解 $y_1(x), y_2(x)$ がもとまる。

$$y_i(x) = z_i(\varepsilon^{-2/3} x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \varepsilon^{2n} + \varepsilon^{4/3} z_i'(\varepsilon^{-2/3} x) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x) \varepsilon^{2n} \quad (i=1,\ 2)$$

ここで、上に現れた $P_n(x), Q_n(x)$ は次の漸化式

$$P_0(x) = const.$$
$$Q_0(x) = \frac{1}{2} \cdot A_0(x) x^{-1/2} \int_0^x t^{-1/2+4} dt$$

$$P_n(x) = -\frac{1}{2} Q_{n-1}'(x) + \frac{1}{2} \cdot \int_0^x t^4 Q_{n-1}(t) dt$$
$$Q_n(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2} \cdot \int_0^x t^{-1/2} \{ t^4 P_n(x) - P_n''(x) \} dt$$

から定まるので、数式処理により容易に求めることができる。

$$y(x, a) = c_1 y_1(x, a) + c_2 y_2(x, a)$$

の形で一般解を書き表し、原点での接続係数から、任意定数 c_1, c_2 を定めれば、正の実軸上 subdominant な解のパラメーター a を大きくした場合の a に関する

漸近挙動が、エアリー関数の漸近的性質を通して、定まる。

いま、取り上げた方程式と異なる形の微分方程式に対しても、Bakkenn 等の方法により、原点などの点における接続係数の近似値を求め、それらの値を利用して、任意定数の近似的な値を求め、パラメーターを大きくした場合のおおよその解の漸近的挙動を知ることができるであろうと考えている。

参考文献

Emamzadeh,A.M.,Numerical Investigations into the Stokes Phenomenon.I, J.Inst.Maths Applics 19(1977),77-86.

Bakken,I.,On the Central Connection Problem for a Class of Ordinary Differential Equations, Funkcial.Ekvac.,20(1977),115-127;

Sibuya,Y., Uniform simplification in a full neighborhood of a transition point, Amer.Math.Soc.,Memoir 149,1974.

Ohkohchi,S., An extention of Weber's equation, Kumamoto J. Math.,3(to apper)