数理解析研究所講究録
第 729 巻 1990 年 122-139

REDUCEでReduceをII

熊本大学 理学部　河野實彦 (Mitsuhiko Kohno)

§1. 序

線型微分方程式論の中での良く知られた Reduction Problems の一つに、1913年 G.D.Birkhoff が示した次の定理がある。

線型微分方程式系

$$(1.1)\quad \begin{cases} t\dfrac{dX}{dt} = t^q A(t)X & (q \geqq 0 : integer) \\ A(t) = \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{-m} & (t_0 \leqq |t| \leqq \infty) \end{cases}$$

は、ある解析的な線型変換

$$(1.2)\quad X = P(t)Y$$

によって、

$$(1.3)\quad t\frac{dY}{dt} = (B_0 + B_1 t + \cdots + B_q t^q)Y$$

なる標準形に Reduce できるというものであるが、40年たって、F.R.Gantmacher, P.Masani があいついで、次の様な反例を挙げて定理の誤りを指摘した。

線型微分方程式系

$$t\frac{dX}{dt} = \left\{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}X \qquad (q=0)$$

は、如何なる解析的変換によっても $tY' = B_0 Y$ なる微分方程式系には Reduce できない。証明は、モノドロミー群を考察したり、実際に解析的な $P(t)$ が存在しない事を示したりの簡単なものである。

これを受けて、1962年 H.L.Turrittin は、この reduction problem を再考し、(1.1) で A_0 が相異なる固有値を持つ場合は、ある適当な 有理型の $P(t)$ をもってすれば (1.1) を常に (1.3) に Reduce できる事を示した。

G.D.Birkhoff の主張する解析的変換によれば、(1.1) は

$$t\,\frac{dY}{dt} = t^{q}\left(\sum_{k=0}^{s} C_k t^{-k}\right) Y$$

なる微分方程式系に reduce できるが、s は 一般に q より大となるのである。

(1.1) において、非負整数 q を Poincaré rank(級)と呼んでいる。$q=0$ ならば、$t=\infty$ は確定特異点である(M.L.Sanvage, J.Horn)。上の場合のように、A_0 が相異なる固有値を持てば、$t=\infty$ は rank q の不確定特異点であるが、もし、A_0, A_1, A_2, ...と巾零行列が並んでいたら、$t=\infty$ は一体如何なる rank の不確定特異点であろうか、それとも確定特異点であろうか。この問題は、単独型微分方程式に対する Fuchs の理論に対応する。

例えば

$$(1.4)\qquad t\,\frac{dX}{dt} = t\left\{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix} + \frac{1}{t}\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} + \frac{1}{t^2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\right\} X$$

は、$t=\infty$ に Poincaré rank 1 の特異性を持つ。しかし、ここで

$$(1.5)\qquad X = \begin{pmatrix}t & t\\ 1 & -1\end{pmatrix} Z$$

なる多項式変換をほどこせば、Z のみたす微分方程式系は、

$$t\frac{dZ}{dt} = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & -13 \end{pmatrix} Z \tag{1.6}$$

となるので、$t=\infty$ は確定特異点である。

実は、上の微分方程式系（1.4）は、Euler 型単独微分方程式

$$t^2 y'' + t y' - \frac{1}{4} y = 0 \tag{1.7}$$

を、ただ単に $x_1 = y$, $x_2 = y'$ とおき、$X = (x_1, x_2)_*$[1] に対する微分方程式系化を考えたものに過ぎない。（1.4）の右辺の行列は、companion 行列（と呼ばれるもの）である。Euler 方程式の特性指数は $\rho = \pm\frac{1}{2}$ であり、確かに、上の変換後の特性指数は、(1.6)の定数行列の固有値 $\rho_1 = -\frac{1}{2}$、$\rho_2 = -\frac{3}{2}$ となっている。ついでながら付言すると、(1.5) の変換はまずい。

(1.5) の代りに t^{-1} の多項式変換

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^{-1} \end{pmatrix} Z \tag{1.8}$$

をほどこすと

$$t\frac{dZ}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} Z \tag{1.9}$$

となり、この方が（1.6）より、特異性を知るのにはよりすっきりした形である。これは、(1.7) を微分方程式系化するに当り、$z_1 = y$, $z_2 = t y'$ とおき、$Z = (z_1, z_2)_*$ に対する系を考えたものに対応する。更に良い変換は、(1.9) の右辺をも対角化する

---

1) 今後 添数 $*$ で転置を表わす。

$$X=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & t^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 1\end{pmatrix}Z,$$

即ち、最初から $z_1=\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}ty'$, $z_2=-\frac{1}{4}y+\frac{1}{2}ty'$ とおき、微分方程式系化したものであることは容易に判ろう。

少し脱線したので、話を前に戻すと、Sauvage, Horn, Birkhoff 等の研究の影響を受けて、1960年 J.Moser は線型微分方程式系に対する Fuchs 理論を考察し、(1.1) の $t=\infty$ が確定特異点となるための条件、及びそれを判定するための algorithm を確立している。その後、この Fuchs 理論と Birkhoff-Turrittin の研究とをからめて、解析的変換や有理型変換で不変なるものは何かを探る問題が、W.B.Jurkat-D.A.Lutz 等の一連の研究に引き継がれ、関連した研究は、W.Balser, E.Wagenfuhrer 他多数ある。また、視点を変えた特異点の不確定度に関する研究は、R.Gérard, B.Malgrange 他これまた多数ある。

さて、線型微分方程式の局所的理論なり大域的理論なり構成するにあたっては、微分方程式系を対象とする方が良い。行列論を通して、理論は明解になるし、単独型微分方程式は微分方程式系の部分集合に過ぎない。単独型微分方程式は常に微分方程式系に書き直すことが出来るが、ある標準的なかつ最適な形の微分方程式系に、解の局所的また大域的性質を変えることなく変換するには、一工夫いる問題である。

1964年、変換理論の大家 H.L.Turrittin [1] は、$t=0$ に確定特異点、$t=\infty$ に rank 1 の不確定特異点をもつ Birkhoff 標準系

$$t\frac{dX}{dt}=(B_0+B_1t)X \tag{1.10}$$

の二点接続問題を解明した K.Okubo の論文を評論した論文の中で、次の様に述べている：(1.10) に対応する単独型微分方程式は

(1.11) $$t^n y^{(n)} = \sum_{l=1}^{n} \left(\sum_{r=0}^{l} a_{l,r} t^r \right) t^{n-l} y^{(n-l)}$$

であるが、n＝2 のときには、(1.11) を (1.10) に reduce するに然したる問題はない。

However, if n>3, it is not at all clear just how one would systemnatically proceed to convert (1.11) into a system of type (1.10) or to convert (1.10) to (1.11). In fact at this point one runs into a number of difficult problems relating to equivalence classes of equations.

例えば、$n=3$ のときを考えてみよう。(1.11) を (1.10) に reduce するに、先ず、$y=t^{\mu}z$ とおいて、$a_{3,0}$ を消去するように μ を決めなさい。
z の方程式を 再び (1.11) (但し $a_{3,0}=0$) と書いたとき、$W=(z, z', z'')_*$ とおいて、companion 行列を係数にもつ微分方程式系を作る。そこで、η を3次方程式

$$(a_{11}-\eta)(a_{11}\eta-\eta^2+a_{22})-a_{33}=0$$

の根として求め、

$$\xi=a_{11}\eta-\eta^2+a_{22}$$

ととり、線型変換

$$W=\begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ \xi t & \eta t & 1 \end{pmatrix} X$$

をほどこせば、Birkhoff 標準形 (1.10) が得られる。

"事程左様に..." とこの評論を最初見たとき、読みとれた。

今回この短期共同研究集会に参加して頂いた R.Gérard 教授 (Institute de Recherche Mathématique Avancée*[2], U.L.P.(Strasbourg)) のセミナーで、数年前、接続問題についての講義をしたとき、Fuchs 型微分方程式は

$$(1.12)\quad (t-B)\frac{dX}{dt}= AX,\ B=\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n),\quad A\in M_n(\mathbb{C})$$

と書きます、また、全複素平面上に確定特異点と rank q の不確定特異点しかもたない線型微分方程式は

$$(1.13)\qquad t\frac{dX}{dt} = (B_0+B_1t+\cdots+B_qt^q)X,\quad B_i\in M_n(\mathbb{C}),$$

と書きますと説明する度に、どうして単独型は扱わないのか？ 単独型はいつも、それら標準系に書き直せるのか？ と彼に質問された。

あの Turrittin が評論の中で言わんとした所を計りかねていたこともあって、Gérard 教授を納得させるべく、単独型線型微分方程式

$$(1.14)\quad \begin{cases} \varphi^n y^{(n)} = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} a_l(t)\varphi^{n-l}y^{(n-l)}(t), \\ \varphi = \displaystyle\prod_{j=1}^{p}(t-\lambda_j) \qquad (\lambda_p=0), \\ a_l(t)\quad (l=1,2,\dots,n):\ t\text{ の多項式} \end{cases}$$

2) Gérard 教授は I.R.M.A. をアルザス数学研究所と称している。彼の投稿論文に Avancée を Alsacien と書いてきたから、Avancée に訂正したら、初校でまた Alsacien と訂正してきた。勿論、また訂正したが...

を超幾何微分方程式系（1.12）や Birkhoff 標準系（1.13）、Schlesinger 標準系へ有理線型変換で reduce し、またモノドロミー群研究との関連から、特異点における特性指数や、係数間の関係を明らかにする問題を考察することになった（[2][3][4]を参照）。（1.14）で、各 $a_l(t)$ が高々 $(p-1)l$ 次の多項式ならば、微分方程式は $t=\lambda_j$ $(j=1,2,\dots,p)$ と $t=\infty$ に確定特異点をもつ Fuchs 型であり、$p=1$ で、$a_l(t)$ が高々 ql 次の多項式であれば、$t=0$ に確定特異点を、$t=\infty$ に Poincaré rank q の不確定特異点をもつ微分方程式であることを注意しておく。

§2. Birkhoff 標準系への Reduction

先ず、単独線型微分方程式

$$t^n y^{(n)} = \sum_{l=1}^{n}\left(\sum_{r=0}^{ql} a_{l,r} t^r\right) t^{n-l} y^{(n-l)} \tag{2.1}$$

を Birkhoff 標準系（1.13）に reduce する方法の１例を示す。§１ の例で述べたように、系化するに当って、最初に適当な shearing 変換を行っておくが良い。ここでは、

$$y_p(t) \equiv t^{-(q-1)p} y^{(p)}(t) \qquad (p=0,1,\dots n) \tag{2.2}$$

と置いて、y_p と y_{p+1} との関係式

$$t\,y'_p-(q-1)p\,y_p=t^q y_{p+1}$$

と、（2.1）の両辺に t^{-qn} をかけて得られる関係式

$$\begin{cases} y_n = \displaystyle\sum_{l=1}^{n} A_l(t)\, y_{n-l}, \\ A_l(t) = \displaystyle\sum_{r=0}^{ql} a_{l,r} t^{r-ql} \qquad (l=1,2,\dots,n) \end{cases}$$

とから、$Y=(y_0, y_1, \dots, y_{n-1})_*$ に対する微分方程式系

$$t\frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \theta_1 & t^q & & & \text{\Large 0} \\ 0 & \theta_2 & t^q & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & & \theta_{n-1} & t^q \\ t^q A_n(t) & t^q A_{n-1}(t) & \cdots & & \theta_n + t^q A_1(t) \end{pmatrix} Y$$

$$= A(t)Y \qquad (\theta_j = -(j-1)(q-1);\ j=1,2,\dots,n),$$

を作る。

これに、線型変換 $X=E(t)Y$ を施して、Birkhoff 標準系 (1.13) が得られるとすれば、(1.13) の右辺の係数を $B(t)$ と表すと、行列関数 $E(t)$ は変換(微分)方程式

$$(2.3) \qquad t\frac{d}{dt}E(t) + E(t)A(t) = B(t)E(t)$$

をみたさなければならない。即ち、これからの目的はこの変換方程式を通して、$A(t)$ から、$E(t)$ を有理関数としてうまく決めながら、高々 q 次の t の多項式から成る $B(t)$ を決定していこうというのである。

行列 $A(t)$の形等から推して、

$$\begin{cases} B(t) = (b_{i,j}(t)), \\ \quad b_{i,j}(t) \equiv 0 \quad (i+1<j;\quad i=1,2,\dots,n-1) \\ \quad b_{i,i+1}(t) = t^q \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ \quad b_{i,j}(t) \quad (j \leqq i):\ \text{高々 } q \text{ 次の多項式} \end{cases}$$

$$\begin{cases} E(t) = (e_{i,j}(t)), \\ \quad e_{i,i}(t) = 1 \quad (i=1,2,\dots,n-1) \\ \quad e_{i,j}(t) = 0 \quad (i<j;\quad i=1,2,\dots,n-1) \end{cases}$$

として、決めてやれば良いことが判る。

さて、(2.3) を成分毎に書き下せば、

$$(2.4)_j \qquad t^q e_{j,j-1}(t)+\theta_j=b_{j,j}(t)+t^q e_{j+1,j}(t) \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

$$(2.5)_j \qquad t\frac{d}{dt}e_{j,j-k}(t)+t^q e_{j,j-k-1}(t)+\theta_{j-k}e_{j,j-k}(t)$$

$$=b_{j,j-k}(t)+\sum_{l=0}^{k-1} b_{j,j-l}(t)e_{j-l,j-k}(t)+t^q e_{j+1,j-k}(t),$$

$$(k=1,2,\dots,j-1;\, j=2,3,\dots,n),$$

となる。但し、上式で

$$\begin{cases} e_{j,0}(t)\equiv 0, \\ e_{n+1,n-k}(t)\equiv -A_{k+1}(t) \qquad (k=0,1,\dots,n-1) \end{cases}$$

と解釈する。

$A_l(t)$ は t^{-1} の多項式、$b_{i,j}(t)$ は高々 q 次の t の多項式である事を考慮して、$e_{i,j}(t)$ を t^{-1} の多項式とみると、上式は単なる代数的関係式となり、更にまた、各第k対角成分 $e_{i,j}(t)$ $(i-j=k)$ は t^{-1} の同じ次数の多項式として決定できる事が判ろう。

次の記法を導入する：

$$A_l(t)=a_{l,ql}+\sum_{\nu=1}^{l} t^{-\nu q}\overset{\nu}{A}_l(t) \qquad (l=1,2,\dots,n)$$

と分解する。対応して、

$$e_{j,j-k}(t)=\sum_{\nu=1}^{k} t^{-\nu q}\overset{\nu}{e}_{j,j-k}(t) \qquad (k=1,2,\dots,j-1;\, j=2,3,\dots,n)$$

と表す。ここで、$\overset{\nu}{A}_l(t)$, $\overset{\nu}{e}_{j,\,j-k}(t)$ は高々 $(q-1)$ 次の t の多項式である。また、

$$t\frac{d}{dt}\left(t^{-\nu q}e^{\nu}(t)\right)= t\frac{d}{dt}\left(t^{-\nu q}\sum_{m=0}^{q-1}\xi_m t^m\right)$$

$$= t^{-\nu q}\left(\sum_{m=0}^{q-1}(-\nu q+m)\xi_m t^m\right)$$

$$= t^{-\nu q}D_{\nu q}[e^{\nu}(t)],$$

$b(t)$, $e(t)$ をそれぞれ高々 q次、$(q-1)$次の t の多項式としたとき、

$$b(t)e(t)=t^q[b(t)e(t)]^0+[b(t)e(t)]^1$$

と表す。 $D_{\nu q}[e^{\nu}(t)]$, $[b(t)e(t)]^{\nu}$ $(\nu=0,1)$ も高々 $(q-1)$次の t の多項式である。

これ等を (2.5)$_j$ に代入して、両辺の t^{-q} の等巾の係数（tの多項式）を等しいとおくと、結局、次の関係式が得られる。

(2.6)$_j$
$$D_{\nu q}[\overset{\nu}{e}_{j,\,j-k}]+\theta_{j-k}\overset{\nu}{e}_{j,\,j-k}+\overset{\nu+1}{e}_{j,\,j-k-1}$$
$$=\sum_{l=0}^{k-1}\{[b_{j,\,j-l}\overset{\nu}{e}_{j-l,\,j-k}]^1+[b_{j,\,j-l}\overset{\nu+1}{e}_{j-l,\,j-k}]^0\}+\overset{\nu+1}{e}_{j+1,\,j-k}$$

$(\nu=1,2,\ldots,k;\ k=1,2,\ldots,j-1;\ j=1,2,\ldots,n)$,

(2.7)$_j$
$$b_{j,\,j-k}=\overset{1}{e}_{j,\,j-k-1}-\sum_{l=0}^{k-1}[b_{j,\,j-l}\overset{1}{e}_{j-l,\,j-k}]^0-\overset{1}{e}_{j+1,\,j-k}$$

$(k=1,2,\ldots,j-1;\ j=1,2,\ldots,n-1)$,

$(2.7)_n$ $b_{n,n-k}$

$$= \overset{1}{e}_{n,n-k-1} - \sum_{l=0}^{k-1} [b_{n,n-l} \overset{1}{e}_{n-l,n-k}]^0 + \overset{1}{A}_{k+1} + a_{k+1,q(k+1)} t^q$$

$$(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

但し、上式で

$$\begin{cases} \overset{\nu}{e}_{n+1,n-k}(t) \equiv -\overset{\nu}{A}_{k+1}(t) \\ \overset{\nu}{e}_{j-l,j-k}(t) \equiv 0 \qquad (\nu > k-l) \end{cases}$$

と解釈する。

$(2.4)_n$ と $(2.7)_n$ から、直ちに

$$b_{n,n-k}(t) - a_{k+1,q(k+1)} t^q \qquad (k=0, 1, \ldots, n-1)$$

は $(q-1)$次の t の多項式、また $(2.7)_j$ から、$b_{j,j-k}(t)$ $(j<n)$ も高々 $(q-1)$次の t の多項式であることが判る。

さて、$(2.4)_j$, $(2.6)_j$, $(2.7)_j$ から $b_{i,j}(t)$ を決定するには、次の簡単な事実に基づく。

補助定理　ρ_l $(l=1, 2, \ldots, N)$ は代数方程式

$$[\rho]_N + \eta^1 [\rho]_{N-1} + \cdots + \eta^N = \prod_{l=1}^{N} (\rho - \rho_l)$$

$$([\rho]_p = \rho(\rho-1)\cdots(\rho-p+1))$$

の根として、与えられたものとしよう。

このとき、未知変数 μ が関係式

$$\begin{cases} \xi^{k}=(\mu-(N-k))\,\xi^{k-1}+\eta^{k} & (k=1,2,\ldots,N) \\ \xi^{0}\equiv 1, \qquad \xi^{N}\equiv 0 \end{cases}$$

をみたせば、μ は ρ_l $(l=1,2,\ldots,N)$ の１つに等しい。また、例えば $\mu=\rho_N$ とすれば、次式が成り立つ：

$$\begin{vmatrix} \xi^{1}+\rho-(N-2) & -1 & & \mathbf{0} \\ \xi^{2} & \rho-(N-3) & -1 & \\ \vdots & & \ddots & -1 \\ \xi^{N-1} & \mathbf{0} & & \rho \end{vmatrix} = \prod_{l=1}^{N-1}(\rho-\rho_l)$$

上の補助定理を用いて、先ず $\{b_{n,n}(t),\ e^{k}_{n,n-k}(k)\ (k=1,2,\ldots,n-1)\}$ の決定について説明しよう。$(2.4)_n$, $(2.6)_n$ とから

$$(2.8)\qquad \begin{cases} e^{1}_{n,n-1}+\theta_n+A^{1}_{1}=b_{n,n}-a_{1,q}t^{q} \\ D_{kq}[e^{k}_{n,n-k}]+\theta_{n-k}e^{k}_{n,n-k}+e^{k+1}_{n,n-k-1}+A^{k+1}_{k+1} \\ \qquad =[b^{k}_{n,n}e_{n,n-k}]^{1} \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \end{cases}$$

を得るが、

$$\begin{cases} A^{\nu}_{l}(t)=\alpha^{\nu}_{l}(0)+\alpha^{\nu}_{l}(1)+\cdots+\alpha^{\nu}_{l}(q-1)\,t^{q-1}, \\ b_{n,n}-a_{1,q}t^{q}=\beta_0+\beta_1 t+\cdots+\beta_{q-1}t^{q-1} \\ e^{k}_{n,n-k}=\xi^{k}_{0}+\xi^{k}_{1}+\cdots+\xi^{k}_{q-1}t^{q-1} \end{cases}$$

$$(k=1,2,\ldots,n-1),$$

とおいて、上式に代入すると

(2.9) $$\xi_0^{k+1} = (\beta_0 + kq - \theta_{n-k})\xi_0^k - a_{k+1,0}$$

$$= (\beta_0 + (n-1)q - (n-k-1))\xi_0^k - a_{k+1,0}$$

$$(\xi_0^0 \equiv 1,\quad \xi_0^n \equiv 0;\ k=0,1,\ldots,n-1),$$

(2.10) $$\begin{cases} \xi_\nu^1 = \beta_\nu - \alpha_1^1(\nu) \\ \xi_\nu^{k+1} = (\beta_0 + (n-1)q - \nu - (n-k-1))\xi_\nu^k + \beta_\nu \xi_0^k \\ \quad + (\beta_1 \xi_{\nu-1}^k + \cdots + \beta_{\nu-1}\xi_1^k) - \alpha_{k+1}^{k+1}(\nu) \end{cases}$$

$$(\xi_\nu^n \equiv 0;\ k=1,2,\ldots,n-1;\ \nu=1,2,\ldots,q-1)$$

なる関係式が得られる。補助定理より、(2.9) から直ちに、 $\beta_0 + (n-1)q$ は

(2.11) $$[\rho]_n - \sum_{l=1}^{n} a_{l,0}[\rho]_{n-l} = \prod_{l=1}^{n}(\rho - \rho_l) = 0$$

の根の１つに等しい。この式は、(2.1) の確定特異点 $t=0$ における特性方程式である。これらの根（特性指数） ρ_l $(l=1,2,\ldots,n)$ に

(2.12) $$\rho_n \leqq \rho_{n-1} \leqq \cdots \leqq \rho_1$$

と順序付けておく。

いま

$$\beta_0 + (n-1)q = \rho_n$$

ととれば、(2.9) から ξ_0^k $(k=1,2,\ldots,n-1)$ は一意的に決まる。

すると、(2.10) は

$$
\begin{pmatrix}
\xi_0^1+\rho_n-\nu-(n-2) & -1 & & & \mathbf{0} \\
\xi_0^2 & \rho_n-\nu-(n-3) & -1 & \ddots & \\
\vdots & & & & \\
 & & \ddots & & -1 \\
\xi_0^{n-1} & \mathbf{0} & & & \rho_n-\nu
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
\xi_\nu^1 \\ \xi_\nu^2 \\ \vdots \\ \xi_\nu^{n-1}
\end{pmatrix}
$$

$=$ 既知　　　　　　　$(\nu=1,2,\ldots,q-1)$

なる式であるが、係数の行列式は、再び補助定理から、

$$\prod_{l=1}^{n-1}(\rho_n-\nu-\rho_l)$$

に等しい事が判り、(2.11)の順序付けよりこれは 0 ではない。よって、ξ_ν^k $(k=1,2,\ldots,n-1)$ は、また一意的に決まる。このようにして、$\{b_{n,n}(t),\ e^k_{n,n-k}(t)\}$ の係数は完全に決まることになる。

次に、$j=n-1$ に対して

$$\{b_{j,j}(t),\ e^k_{j,j-k}(t)\quad (k=1,2,\ldots,j-1)\}$$

を上のようにして決め、更に次は $j=n-2$ に対してと進んで、$j=1$ まで $B(t)$ の主対角成分を決定していく。

その後、$\nu=1,2,\ldots,(n-1)$ の順に、$j=n,n-1,n-2\ldots$ と

$$\{b_{j,j-\nu}(t),\ e^k_{j,j-\nu-k}(t)\quad (k=1,2,\ldots,j-\nu-1)\}$$

を、$B(t)$ の対角方向に沿って決定していくことが出来る。その時のアルゴリズムは、常に上の補定定理によるのである。

このように決定された $E(t)$は、t^{-1}の多項式を成分とする行列となり、また Birkhoff 標準系の係数行列のうち

$$B_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 & & & & \mathbf{0} \\ b^0_{2,1} & \rho_2 - q & & & \\ \vdots & & \ddots & & \\ b^0_{n,1} & \cdots & & b^0_{n,n-1} & \rho_n - (n-1)q \end{pmatrix}$$

$$B_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & 1 \\ a_{n,qn} & a_{n-1,q(n-1)}, & & \cdots & a_{1,q} \end{pmatrix}$$

として定まり、(2.1) の各特異点での特性指数はそのまま Birkhoff 標準系 (1.13) に移された事も判る。

補助定理による上のアルゴリズムを見ると、これは正にコンピュータによる数式処理向きである。$REDUCE$ によるプログラム例は [5] にあるので参照されたい。

§3. Schlesinger 標準系への Reduction

さて、(1.14) で各 $a_l(t)$ が高々 $(p+q-l)$ 次の多項式のとき、$t=\lambda_j$ $(j=1,2,\ldots,p)$ に確定特異点、$t=\infty$ に Poincaré rank q の不確定特異点をもつ微分方程式であるが、これを Schlesinger 標準系と呼ばれる

$$(3.1)\qquad \frac{dX}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \frac{C_j}{t-\lambda_j} + \sum_{k=1}^{q} B_k t^{k-1} \right\} X, \qquad C_j,\ B_k \in M_n(\mathbb{C})$$

に reduce する問題を、次に考えてみよう。

(2.2) と (1.14) の両辺に $t^{-(q-1)n}\varphi^{-n}$ をかけた

$$y_n = \sum_{l=1}^{n} a_l(t)\psi^{-l} y_{n-l} \qquad (\psi = \varphi\, t^{q-1})$$

とから、$Y=(y_0, y_1, \ldots, y_{n-1})_*$ に対する微分方程式系

$$\varphi \frac{dY}{dt} = \begin{pmatrix} \theta_1 \varphi t^{-1} & \psi & & & \mathbf{0} \\ 0 & \theta_2 \varphi t^{-1} & \psi & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \ddots & \psi \\ a_n(t)\psi^{1-n} & a_{n-1}(t)\psi^{2-n} & \cdots & & \theta_n \varphi t^{-1} + a_1(t) \end{pmatrix} Y$$

$$= A(t)Y$$

を得る。

(3.2) $$B(t) = \varphi\left\{ \sum_{j=1}^{p} \frac{C_j}{t-\lambda_j} + \sum_{k=1}^{q} B_k t^{k-1} \right\}$$

とおいて、変換方程式

(3.3) $$\varphi \frac{dE(t)}{dt} + E(t)A(t) = B(t)E(t)$$

から、また §2 と同様に $E(t)$ と共に、$B(t)$ の係数行列を決定すれば良い。

そのために、高々 $(p+q-1)$ 次の t の多項式を表す基底として

$$\{\varphi^{(p)}, \varphi^{(p-1)}, \ldots, \varphi', \varphi, \varphi t, \ldots, \varphi t^{q-1}\}$$

をとり、$A(t)$, $B(t)$, $E(t)$ を次のように分解する：

$$A(t) = \left\{ \sum_{h=0}^{p-1} A^h(\psi)\varphi^{(p-h)} + \varphi \sum_{\nu=0}^{q-2} A^{p+\nu}(\psi) t^\nu \right\} + A_\infty \psi$$

$$A^h(\psi) = \sum_{r=0}^{l-1} A_r^h \psi^{r-l-1} \qquad (h=0, 1, \ldots, p+q-2)$$

$$A_\infty = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & 0 & 1 \\ \alpha_n & \alpha_{n-1} & & \cdots & \alpha_1 \end{pmatrix}$$

（但し、 $a_l(t) = \alpha_l t^{p+q-1} + \cdots$ ），

$$B(t) = \{ \sum_{h=0}^{p-1} D_h \varphi^{(p-h)} + \varphi \sum_{\nu=0}^{q-2} B_{\nu+1} t^\nu + B_q \psi \},$$

$$E(t) = \{ \sum_{h=0}^{p-1} E^h(\psi) \varphi^{(p-h)} + \varphi \sum_{\nu=0}^{q-2} E^{p+\nu}(\psi) t^\nu \},$$

これらを変換方程式（3.3）に代入して、$E^h(\psi)$ を ψ^{-1} の多項式を成分とする行列として決めるようにすれば、そのアルゴリズムは §2 と全く同様の操作で、補助定理のみに基づくものになる。詳しくは [4] [5] を参照されたい。

§1 の例でも述べたように、Reduction の方法は、他にもいろいろあろうが、いずれにしても具体的な計算となると、人力ではうんざりする作業である。*REDUCE* に全ておまかせしたい。

参考文献

[1] H.L.Turrittin: Solvable related equations pertaining to turning point problems, Asymptotic solutions of differential equations and their applications by C.H.Wilcox, John Wiley, 1964, 27-52

[2] K.Okubo: On the group of Fuchsian equations, Seminor report of Tokyo Metropolitan University, 1987

[3] M.Kohno and T.Suzuki : Reduction of single Fuchsian differential equations to hypergeometric systems, Kumamoto J. Sci.(Math) 17, 27-74 (1987)

[4] M.Kohno: A simple reduction of single linear differential equations to Birkhoff and Schlesinger's canonical systems, Kumamoto J.Math. 2, 9-27 (1989)

[5] T.Hamano and S.Ohkohchi: Reduction of general single linear differential equations to Schlesinger's canonical systems, to appear in Kumamoto J. Math. 3 (1990)