数理解析研究所講究録
第731巻 1990年 1-12



# Cut-free systems for some tense logics

鹿島　亮　( Ryo Kashima )
東京工業大学　理学部　情報科学科

## はじめに

Gentzen は，古典論理に対してＬＫと呼ばれる形式的体系を与え，ＬＫにおいては cut と呼ばれる推論規則は不要である，という有名なＬＫの基本定理（cut-elimination theorem）を証明した．このＬＫは非常に整然としたきれいな体系であり，しかも cut-free である（cut-elimination theorem が成り立つ）ことから，これは，無矛盾性の証明や決定手続きなど，古典論理についての多くの有益な情報を我々に与えてくれている．

このように，ＬＫが古典論理に対する非常に良い形式化であるので，非古典論理について研究する際にも，それがＬＫ風に形式化，特に cut-free に形式化できないかという問題がひとつの研究課題になってくる．本稿ではそうした研究のひとつとして，４つの時制命題論理 Kt，Kt4，Kt4.3，KtL に対して，ＬＫを拡張した cut-free な体系を与えた．

ところで，これらの時制論理に対して cut-free な体系を与えようとしても，ＬＫを普通に拡張する，すなわち，様相記号に関する

新しい推論規則をＬＫにつけ加える，だけではうまくいかない．そこで，ＬＫが sequent を扱っているのに対して，本稿では sequent が tree状につながったものを扱う体系を与えた．このように拡張された体系は，もとのＬＫと比べると少々複雑に見えるが，cut-free であることや subformula-property などＬＫが持っていた特徴的な性質は保存されているので，これらは時制論理に対するかなり良い形式化であると考えられる．

**定義1**

formula は次の1)2)で定義される．

1)　命題変数：$p_0$，$p_1$，… は formula である．

2)　a，b が formula ならば，$\wedge a b$，$\vee a b$，$\rightarrow a b$，$\neg a$，$\boxed{P}a$，$\boxed{F}a$，Ⓟa，Ⓕa はすべて formula である．

$\boxed{P}a$，$\boxed{F}a$，Ⓟa，Ⓕa はそれぞれ，“aは過去のいつでも真であった”，“aは未来のいつでも真である”，“aは過去のある時点で真であった”，“aは未来のある時点で真である”を表現する論理式である．

以後，a，b，c などは，formula を表わすものとする．また，読みやすさのために，$\wedge a b$，$\vee a b$，$\rightarrow a b$ のことをそれぞれ，$a \wedge b$，$a \vee b$，$a \rightarrow b$ と書く．括弧も適当に使用する．

**定義2**

1)　空でない集合W，W上の二項関係R，自然数にWの部分集合

を割り当てる関数P，の3つ組 $[W, R, P]$ を（時制命題論理の Kripke）model という.

2） model $M = [W, R, P]$，Wの要素 w，formula a に対して述語 $M, w \models a$ を，次のようにaの構成に関して帰納的に定義する.

命題変数 $p_i$ に対しては， $M, w \models p_i \Leftrightarrow w \in P(i)$，

$M, w \models a \wedge b \Leftrightarrow M, w \models a$ and $M, w \models b$， $M, w \models a \vee b \Leftrightarrow$

$M, w \models a$ or $M, w \models b$， $M, w \models a \rightarrow b \Leftrightarrow$

$M, w \not\models a$ or $M, w \models b$， $M, w \models \neg a \Leftrightarrow M, w \not\models a$，

$M, w \models \boxed{P}\, a \Leftrightarrow \forall x \in W$ (if $xRw$ then $M, x \models a$)，

$M, w \models \boxed{F}\, a \Leftrightarrow \forall x \in W$ (if $wRx$ then $M, x \models a$)，

$M, w \models ⓅⓅ a$

$M, w \models Ⓟ\, a \Leftrightarrow \exists x \in W$ ($xRw$ and $M, x \models a$)，

$M, w \models Ⓕ\, a \Leftrightarrow \exists x \in W$ ($wRx$ and $M, x \models a$).

（ただし， $M, w \not\models a$ は not$(M, w \models a)$ のこと．）

3） model $M = [W, R, P]$，formula a が，Wの任意の要素 w に対して $M, w \models a$ のとき， $M \models a$ と書く.

model $M = [W, R, P]$ の，Wを時点の集合，Rを時間の前後関係，$P(i)$を $p_i$ が真になる時点の集合と見たとき， $M, w \models a$ は“model M の時点 w においてaは真である”と解釈できる.

**定義3**

1） model $M = [W, R, P]$ に関する条件 tr.，co.，re.，(transitive, connected, reflexive) を次のように定義する.

tr.: $\forall x, y, z \in W$ (if($xRy$ and $yRz$) then $xRz$).

co.:　$\forall x, y \in W \quad (x = y \ \text{or} \ xRy \ \text{or} \ yRx)$.

re.:　$\forall x \in W \quad xRx$.

2）時制命題論理　Kt，Kt4，Kt4.3，KtL　を次のような formula の集合として定義する.

Kt ≙ {a | 任意の model Mについて M⊨a}.

Kt4 ≙ {a | tr.を満たす任意の model Mについて M⊨a}.

Kt4.3 ≙ {a | tr.,co.を同時に満たす任意の model M について　M⊨a}.

KtL ≙ {a | tr.,co.,re.を同時に満たす任意の model M について　M⊨a}.

例えば，　$p_0 \to \boxed{P}F\,p_0 \in Kt$，　$\boxed{P}\,p_0 \to \boxed{P}\boxed{P}\,p_0 \in Kt4$，
$(p_0 \wedge \boxed{P}\,p_0 \wedge \boxed{F}\,p_0) \to \boxed{P}\boxed{F}\,p_0 \in Kt4.3$，　$\boxed{P}\,p_0 \to p_0 \in KtL$　である.

また，　$Kt \subsetneq Kt4 \subsetneq Kt4.3 \subsetneq KtL$　である.

さて，本稿の目的はこれらの時制論理に対する cut-free な体系をつくることであるが，これらの体系を見やすいものにするために，記号“¬”を持たない，普通とは異なる論理式を扱うことにする.

**定義4**

inner-negation-formula（i-n-f と略する）は次の1)2)で定義される.

1）二種類の命題変数：$p_0$，$p_1$，…，$n_0$，$n_1$，…　は i-n-f である.

2）a，b が i-n-f ならば，$\wedge ab$，$\vee ab$，$\boxed{P}a$，$\boxed{F}a$，

Ⓟ a, Ⓕ a はすべて i-n-f である.

i-n-f の各命題変数 $n_i$ は $\neg p_i$ を表現している.

以後, a, b, c などは, formula または i-n-f を表わすものとする. また, 読みやすさのために, ∧ a b, ∨ a b のことをそれぞれ, a ∧ b, a ∨ b と書く. 括弧も適当に使用する.

**定義5**

formula a に対して i-n-f a* を, 次のように a の長さに関して帰納的に定義する.

$p_i{}^* \triangleq p_i$, $(a \wedge b)^* \triangleq a^* \wedge b^*$, $(a \vee b)^* \triangleq a^* \vee b^*$, $(a \rightarrow b)^* \triangleq (\neg a)^* \vee b^*$, $(\boxed{P}\, a)^* \triangleq \boxed{P}(a^*)$, $(\boxed{F}\, a)^* \triangleq \boxed{F}(a^*)$, (Ⓟ a)* ≜ Ⓟ(a*), (Ⓕ a)* ≜ Ⓕ(a*), $(\neg p_i)^* \triangleq n_i$, $(\neg(a \wedge b))^* \triangleq (\neg a)^* \vee (\neg b)^*$, $(\neg(a \vee b))^* \triangleq (\neg a)^* \wedge (\neg b)^*$, $(\neg(a \rightarrow b))^* \triangleq a^* \wedge (\neg b)^*$, $(\neg\neg a)^* \triangleq a^*$, (¬ $\boxed{P}$ a)* ≜ Ⓟ((¬ a)*), (¬ $\boxed{F}$ a)* ≜ Ⓕ((¬ a)*), (¬ Ⓟ a)* ≜ $\boxed{P}$((¬ a)*), (¬ Ⓕ a)* ≜ $\boxed{F}$((¬ a)*).

**定義6**

i-n-f と, 2種類の開き括弧 " P[ ", " F[ " と, 閉じ括弧 " ] " から成る T-sequent という文字列を, 次の1)-4)で帰納的に定義する.

1) 空列は T-sequent である.

2) a が i-n-f で Γ が T-sequent ならば, a Γ は T-sequent である.

3) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, P[ Γ ] Δ は T-sequent である.

4) Γ と Δ がともに T-sequent ならば, F[ Γ ] Δ は T-sequent である.

例えば, a , b , c , d , e が i-n-f のとき

a b P[ c F[ P[ ] ] d ] P[ e ]

は T-sequent である. ただし, 読みやすさのためにこれを

a , b , P[ c , F[P[]], d ], P[ e ]

と書くことにする.

以後 Γ や Δ などは T-sequent を表わすものとする.

一般に, Γ と Δ が T-sequent ならば Γ, Δ も T-sequent である.

**定義7**

T-sequent X に対してその意味を表わす i-n-f m(X) を次の 1)-4)で帰納的に定義する. ただし, a は i-n-f であり, Γ と Δ は T-sequent である.

1) $m() \triangleq p_0 \wedge n_0$.

2) $m(a, \Gamma) \triangleq a \vee m(\Gamma)$.

3) $m(P[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{P}\, m(\Gamma) \vee m(\Delta)$.

4) $m(F[\Gamma], \Delta) \triangleq \boxed{F}\, m(\Gamma) \vee m(\Delta)$.

例えば Γ = a , b , P[ c , F[P[]], d ], P[ e ] のとき,

$m(\Gamma) = a \vee b \vee \boxed{P}(c \vee \boxed{F}(\boxed{P}\perp \vee \perp) \vee d \vee \perp) \vee \boxed{P}(e \vee \perp) \vee$

$\perp$ である. (ただし $\perp \triangleq p_0 \wedge n_0$)

**定義8**

T-sequent を推論する体系 S-K t (Sequential system for K t) を, 次の公理と推論規則によって定義する. ただし, a と b は任意の i-n-f であり, Γ と Δ と Π と Σ は任意の T-sequent である.

公理: $p_i, n_i$ (i は任意の自然数)

推論規則: 以下の (exchange)〜($\textcircled{F}$).

$$\frac{\Gamma, \Delta, \Pi, \Sigma}{\Gamma, \Pi, \Delta, \Sigma}\ (\mathrm{exchange})$$

$$\frac{\Gamma}{\Delta, \Gamma}\ (\mathrm{weakening})$$

$$\frac{a, a, \Gamma}{a, \Gamma}\ (\mathrm{contraction})$$

$$\frac{P[\Gamma], \Delta}{\Gamma, F[\Delta]}\ (\mathrm{turn}) \qquad \frac{F[\Gamma], \Delta}{\Gamma, P[\Delta]}\ (\mathrm{turn})$$

$$\frac{a, \Gamma \qquad\qquad b, \Gamma}{a \wedge b, \Gamma}\ (\wedge)$$

$$\frac{a, \Gamma}{a \vee b, \Gamma}\ (\vee) \qquad \frac{a, \Gamma}{b \vee a, \Gamma}\ (\vee)$$

$$\frac{P[a], \Gamma}{\boxed{P}\, a, \Gamma}\ (\boxed{P}) \qquad \frac{F[a], \Gamma}{\boxed{F}\, a, \Gamma}\ (\boxed{F})$$

$$\frac{P[a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{P}\, a, P[\Gamma], \Delta}\ (\textcircled{P}) \qquad \frac{F[a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{F}\, a, F[\Gamma], \Delta}\ (\textcircled{F})$$

S-Ktの推論図の例:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{p_0, n_0} & \text{(w)} \\
\underline{P[\,], p_0, n_0} & \text{(turn)} \\
\underline{F[p_0, n_0]} & (\textcircled{F}) \\
\underline{\textcircled{F}\, p_0, F[n_0]} & \text{(e)} \\
\underline{F[n_0], \textcircled{F}\, p_0} & \text{(turn)} \\
\underline{n_0, P[\textcircled{F}\, p_0]} & \text{(e)} \\
\underline{P[\textcircled{F}\, p_0], n_0} & (\boxed{P}) \\
\underline{\boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0, n_0} & (\vee) \\
\underline{n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0, n_0} & \text{(e)} \\
\underline{n_0, n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0} & (\vee) \\
\underline{n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0, n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0} & \text{(c)} \\
n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0 & 
\end{array}
$$

ただし, (e),(w),(c)は それぞれ, (exchange), (weakening), (contraction)

$(n_0 \vee \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0 = (p_0 \to \boxed{P}\,\textcircled{F}\, p_0)^*)$

**定理 (S-Ktの完全性定理)**

Γ はS-Ktで推論できる iff $m(\Gamma) \in Kt^*$.

ただし, $Kt^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt\}$.

**証明**

参考文献[3].

**定義9**

S-Kt4 は S-Kt に次の2つの推論規則を加えた体系である.

$$
\frac{P[\textcircled{P}\, a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{P}\, a, P[\Gamma], \Delta}\ (\textcircled{P}_{tr})
\qquad
\frac{F[\textcircled{F}\, a, \Gamma], \Delta}{\textcircled{F}\, a, F[\Gamma], \Delta}\ (\textcircled{F}_{tr})
$$

S-Kt4の推論図の例:

$$
\begin{array}{ll}
\underline{\underline{p_0, n_0}} & \text{(e),(w),(turn)} \\
\underline{P[n_0, p_0]} & (\textcircled{P}) \\
\underline{\underline{\textcircled{P}\, n_0, P[p_0]}} & \text{(e)},(\boxed{P}) \\
\underline{\underline{\boxed{P}\, p_0, \textcircled{P}\, n_0}} & \text{(e),(w),(turn)}
\end{array}
$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{P[\textcircled{P}n_0, \boxed{P}p_0]}{\textcircled{P}n_0, P[\boxed{P}p_0]}\ (\textcircled{P}_{tr})}{\boxed{P}\boxed{P}p_0, \textcircled{P}n_0}\ (e),(\boxed{P})}{\textcircled{P}n_0 \vee \boxed{P}\boxed{P}p_0}\ (\vee),(e),(c)\text{を適当に行なう}$$

$$(\textcircled{P}n_0 \vee \boxed{P}\boxed{P}p_0 = (\boxed{P}p_0 \to \boxed{P}\boxed{P}p_0)^*)$$

**定理（S-Kt4の完全性定理）**

ΓはS-Kt4で推論できる　iff　$m(\Gamma) \in Kt4^*$.

ただし，$Kt4^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt4\}$.

**証明**

参考文献[3].

**定義１０**

S-Kt4.3 は S-Kt4 に次の推論規則を加えた体系である.

$$\dfrac{\Gamma \qquad \Delta \qquad \Pi}{\Sigma}\ (cross)$$

ただし，

$\Gamma = \overline{d}, \overline{\sigma[}\ \overline{a}, \Omega$ ,

$\Delta = \overline{\textcircled{P}e}, \overline{e}, \overline{\sigma[}\ \overline{\textcircled{F}c}, \overline{c}, \Omega$ ,

$\Pi = \overline{\textcircled{F}f}, \overline{f}, \overline{\sigma[}\ \overline{\textcircled{P}b}, \overline{b}, \Omega$ ,

$\Sigma = \overline{a}, \overline{\textcircled{P}b}, \overline{\textcircled{F}c}, \overline{\sigma[}\ \overline{d}, \overline{\textcircled{P}e}, \overline{\textcircled{F}f}, \Omega$ ,

$\overline{a}$ などは $a_1, a_2, \cdots, a_n$ という i-n-f の有限列または空列,

$\overline{a} = a_1, a_2, \cdots, a_n$ のとき $\overline{\textcircled{P}a} = \textcircled{P}a_1, \textcircled{P}a_2, \cdots, \textcircled{P}a_n$,

$\overline{\sigma[}$ は " P[ " と " F[ " から成る有限列または空列,

Ω は i-n-f と " P[ " と " F[ " と " ] " から成る有限列または空列　（Ω の中では開き括弧と閉じ括弧がつりあわない

こともあるので Ω は必ずしも T-sequent ではない).

S-Kt4.3の推論図の例:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{p_0, n_0}{P[F[n_0, p_0]]} \qquad \dfrac{p_0, \quad n_0}{P[F[\textcircled{F} n_0, n_0, p_0]]} \qquad \dfrac{p_0, \quad n_0}{P[F[\textcircled{P} n_0, n_0, p_0]]}}{\textcircled{P} n_0, \textcircled{F} n_0, n_0, P[F[p_0]]}\,(\mathrm{cross})}{\dfrac{n_0, \textcircled{P} n_0, \textcircled{F} n_0, \boxed{P}\,\boxed{F}\,p_0}{n_0 \vee \textcircled{P} n_0 \vee \textcircled{F} n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{F}\,p_0}}$$

$(n_0 \vee \textcircled{P} n_0 \vee \textcircled{F} n_0 \vee \boxed{P}\,\boxed{F}\,p_0 \ = \ ((p_0 \wedge \boxed{P}\,p_0 \wedge \boxed{F}\,p_0) \rightarrow \boxed{P}\,\boxed{F}\,p_0)^*)$

**定理(S-Kt4.3の完全性定理)**

$\Gamma$ はS-Kt4.3で推論できる iff $m(\Gamma) \in Kt4.3^*$.

ただし, $Kt4.3^* \triangleq \{a^* \mid a \in Kt4.3\}$.

**証明**

参考文献[3].

**定義11**

S-KtL は S-Kt4.3 に次の2つの推論規則を加えた体系である.

$$\dfrac{a, \Gamma}{\textcircled{P} a, \Gamma}\,(\textcircled{P}_{re}) \qquad\qquad \dfrac{a, \Gamma}{\textcircled{F} a, \Gamma}\,(\textcircled{F}_{re})$$

(S-KtL においては(cross)を次の簡単な形の規則に変えてよい:

$$\dfrac{\overline{\textcircled{P} c}, \overline{\sigma}[\ \overline{\textcircled{F} b}, \Omega \qquad\qquad \overline{\textcircled{F} d}, \overline{\sigma}[\ \overline{\textcircled{P} a}, \Omega}{\overline{\textcircled{P} a}, \overline{\textcircled{F} b}, \overline{\sigma}[\ \overline{\textcircled{P} c}, \overline{\textcircled{F} d}, \Omega}\,(\mathrm{cross}_{re})$$

)

S-KtL の推論図の例:

$$\dfrac{p_0, n_0}{\quad}\,(\mathrm{e})$$

$$\cfrac{\cfrac{n_0 , p_0}{Ⓟ\, n_0 , p_0}\,(Ⓟ_{re})}{Ⓟ\, n_0 \vee p_0} \qquad (Ⓟ\, n_0 \vee p_0 \; = \; (\boxed{P}\, p_0 \to p_0)^*)$$

**定理（S-KtLの完全性定理）**

Γ はS-KtLで推論できる iff $m(\Gamma) \in KtL^*$.

ただし，$KtL^* \triangleq \{a^* \mid a \in KtL\}$.

**証明**

参考文献[3].

**定理（cut-elimination theorem）**

S-Kt, S-Kt4, S-Kt4.3, S-KtL において次の推論規則 (cut) は admissible である.

$$\frac{\Gamma, a^* \qquad (\neg a)^*, \Gamma}{\Gamma}\,(cut)$$

ただし a は任意の formula

**証明**

完全性定理より明らか.

## 参考文献

[1] D.M.Gabbay, Investigations in Modal and Tense Logics with Applications to Problems in Philosophy and Linguistics, D.Reidel, 1976.

[2] M.Sato, A study of Kripke-type models for some modal

logics by Gentzen's sequential method, Publ. RIMS, Kyoto Univ., Vol.13(1977), pp.381-468.

[3] 鹿島亮, Cut-free systems for some tense logics, 東京工業大学修士論文, 1990.