数理解析研究所講究録
第731巻 1990年 155-165

消費税に対する「分割買い」について

On "Splitting-Buy" against the Consumption Tax

山口大学工短部　伊藤 暁 (Akira ITO)
山口大学工学部　井上 克司 (Katsushi INOUE)
山口大学工学部　高浪 五男 (Itsuo TAKANAMI)

あらまし　消費税が導入された当初，商店で買った品物を一度にでなく一個づつ別々に精算するという行動が見受けられた．はたしてこのような分割買い（払い）により常に得をすることができるのであろうか？　本稿では，分割数をなるべく少なくするという条件も考慮に入れて，この問題を考察する．

1．まえがき

税額など会計計算においては切捨てなどの端数処理が通常行なわれている。もちろん、このような操作により誤差が生じているのであるが、今までそれほど問題にされたことはなかった。ところが、消費税が導入されるや否やこの問題が注目を浴びるようになった。

【事例１】（朝日新聞'89/4/2)

◇算数では分からぬ

子供が「五十円のアイスクリームを買いに行く」というので、二人に百円持たせたら、間もなく「三円足りない、と言って売ってもらえなかった」とがっかりして帰ってきました。消費税だったなと思い直して子供たちに説明。税込み一個五十一円なので、今ばはそれぞれに六十円持たせました。すると、九円ずつおつりを持って帰ってきたんですけど、小学二年の上の子が「二個まとめて買うと三円なのに、一個ずつ買ったらどうして一円ずつなの。算数が分からなくなった」っていうんです。

消費税って、こんな子供にまで侵入するほど身近に押し寄せてきたんですね。

――福岡市城南区・主婦(三)

これは次の理由による：５０円×２個を買う。まとめて買うと、１００円×３％＝３円。１個づつ買うと、５０×３％＝1.5円→切捨て→１円×２個分＝２円。∴分割

が１円ほど得。

確かに、丸め方が切捨て方式ならば分割すればするほど得になるはずである。

【事例２】（同89'/4/14）

◇見習いたいけど…

「わあ、主婦の鏡」と感心したのは先日、近くのスーパーのレジで見かけた光景です。五十代の女性が、カゴいっぱい買った品を一品ずつ精算、レシートを打ってもらっていたんです。まとめて最後の合計額に三％上乗せされるのに比べて、納税額が少なくすんで得なんですよね。みんな分かってるんだけど、レジが込んでしまうのでなかなか出来なくて……。でもそのときのレジの方、いやな顔ひとつしなかったのもうれしかったです。

消費税はいやだと言う人は多いけど、言うばかりで何も出来ないのが現実。あんな勇気が大事なんですよね。あの主婦の方、これからも頑張ってほしいと祈りながら、早くすむ別のレジに並び変えた自分が情けなかった。私ですか？　見習いたいけど、オバタリアンみたいに見られても……。

――北九州市小倉南区・大崎多寿恵さん（三三）

また、次のような現象も起きた。

【事例３】（同'89/4/7）

外税方式なら60円安いのに

神奈川県横須賀市　無職・牧野進さん

乳酸飲料を月決めで毎朝四本配達してもらっています。従来、一本五十円で三十日分なら六千円払っていました。しかし、四月なら内税方式で一本五十二円になり、その百二十本分の六千二百四十円になるといわれました。外税方式なら六千円に三％を加えて六千百八十円ですみます。差し引き六十円の差があり便乗値上げのような気がします。

月決め分は検討中

乳酸飲料の地域会社　「グループの地域会社によって転嫁方法が異なっているようです。お客からの問い合わせが多いので、実情を調べ、月決めのお客さんには外税方式にするよう検討中です」

これは次の理由による。５０円×１２０個を買う。内税方式（四捨五入と見なす）では、５０×３％＝1.5円→四捨五入→２円×１２０個分＝２４０円。外税方式では、６０００円×３％＝１８０円。∴外税の方が６０円得。（内税法式は完全なバラ買いである。）

ところが、必ずしも外税の方が得とは言えず単価が違えば内税の方が得な場合もある。例えば、単価が５０円ではなく４５円だったとしよう。すると内税方式では、４５×３％＝1.35円→四捨五入→１円×１２０個分＝１２０円。外税方式では、５４００円×３％＝１６２円。∴内税の方が４２円得。同様にして単価が８０円の場合も内税の方が４８円得になる。

2．基本的性質

本章では、後ほど必要となる幾つかの数理的な事実について整理する。R、Z、N、を各々実数、整数、自然数の整数の集合とする。

【定義１】$x,y \in R$、$k \in N$とする。

$\lfloor x \rfloor \triangleq x$を越えない最大の整数（切捨て）

$\lceil x \rceil \triangleq x$より小さくない最小の整数（切り上げ）

$[x] \triangleq \lfloor x+1/2 \rfloor$（四捨五入）

$x\mathrm{mod}1 \triangleq x-\lfloor x \rfloor$（xの小数部分）

$k\delta \triangleq 0,1,\cdots,$あるいは$k$。特に$\delta=0$あるいは１。

【事実１】$x,y,z \in R$、$A \in Z$とする。

(1) $\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$、$[-x] = -[x-1]$

(2) $\lfloor A+x \rfloor = A+\lfloor x \rfloor$、$\lceil A+x \rceil = A+\lceil x \rceil$、$[A+x] = A+[x]$

(3) $x-1 < \lfloor x \rfloor \leqq x$、$x \leqq \lceil x \rceil < x+1$

(4) $x \leqq y$ならば、$\lfloor x \rfloor \leqq \lfloor y \rfloor$, $\lceil x \rceil \leqq \lceil y \rceil$, $[x] \leqq [y]$

(5) $\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor = \lfloor x+y \rfloor - \delta$

(6) $\lceil x \rceil + \lceil y \rceil = \lceil x+y \rceil + \delta$

(7) $[x] + [y] = [x+y+1/2] - \delta$

（証明略）□

本稿では、$\alpha \in R$は税率を表し$\alpha > 0$と仮定する。すると、税込み価格を表す関数F,F'と、税額を表す関数f,f'は次のように定まる。

【定義２】$x \in R$とする。

$F(x) \triangleq \lfloor (1+\alpha)x \rfloor$、$f(x) \triangleq \lfloor \alpha x \rfloor$

$F'(x) \triangleq [(1+\alpha)x]$、$f'(x) \triangleq [\alpha x]$

F,f は切捨て、F',f'は四捨五入の場合に対応する。

事実1の(4)〜(6)は ⌊ ⌋ をF,f、[ ] をF',f'に置き換えても成り立つ。例えば

【事実2】$x,y,z \in R$とする。

(1) $x \leqq y$ ならば、$F(x) \leqq F(y)$, $f(x) \leqq f(y)$, $F'(x) \leqq F'(y)$, $f'(x) \leqq f'(y)$。すなわち単調非減少。

(2) $F(x)+F(y)=F(x+y)-\delta$

(3) $f(x)+f(y)=f(x+y)-\delta$

(4) $F'(x)+F'(y)=F'(x+y+\frac{1}{2(1+\alpha)})-\delta$

(5) $f'(x)+f'(y)=f'(x+y+1/2\alpha)-\delta$

以後、各関数の定義域は整数と仮定する。

【事実3】$A \in Z$のとき、

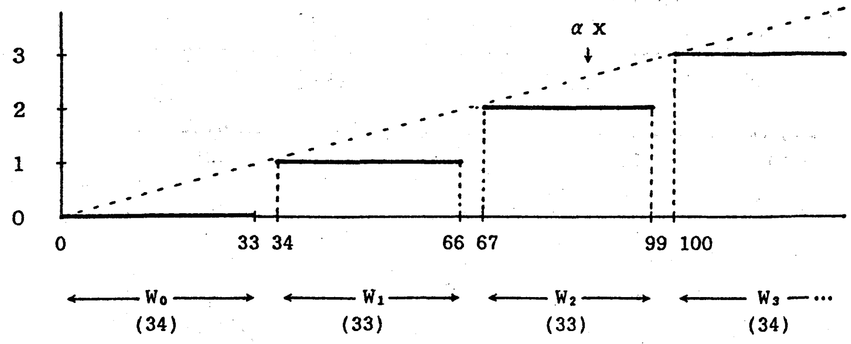
(1) $F(A)=A+f(A)$、$F'(A)=A+f'(A)$

(2) F,F'は単射であるが全射ではない。

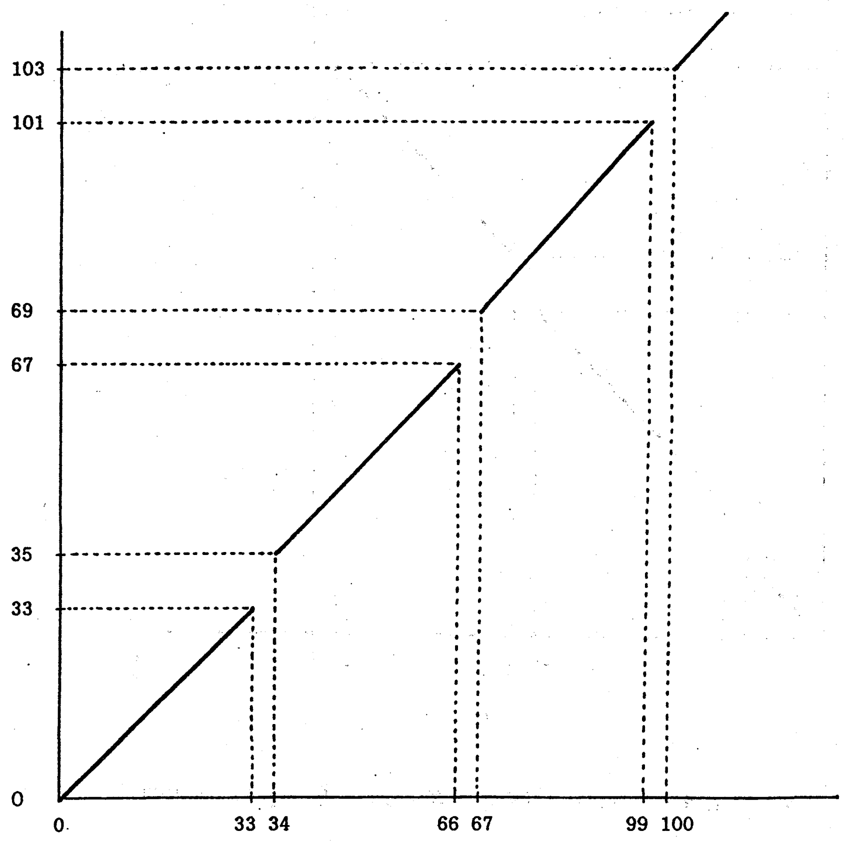
(3) $\alpha < 1$の場合、f,f'は全射であるが単射ではない。

(証明略) □

上記の(2)について、例えば$\alpha=0.03$の場合、Fは$103i+34$, $103i+68$, ならびに$103i+102$ $(i \geq 0)$なる値は決してとらない(図1参照)。

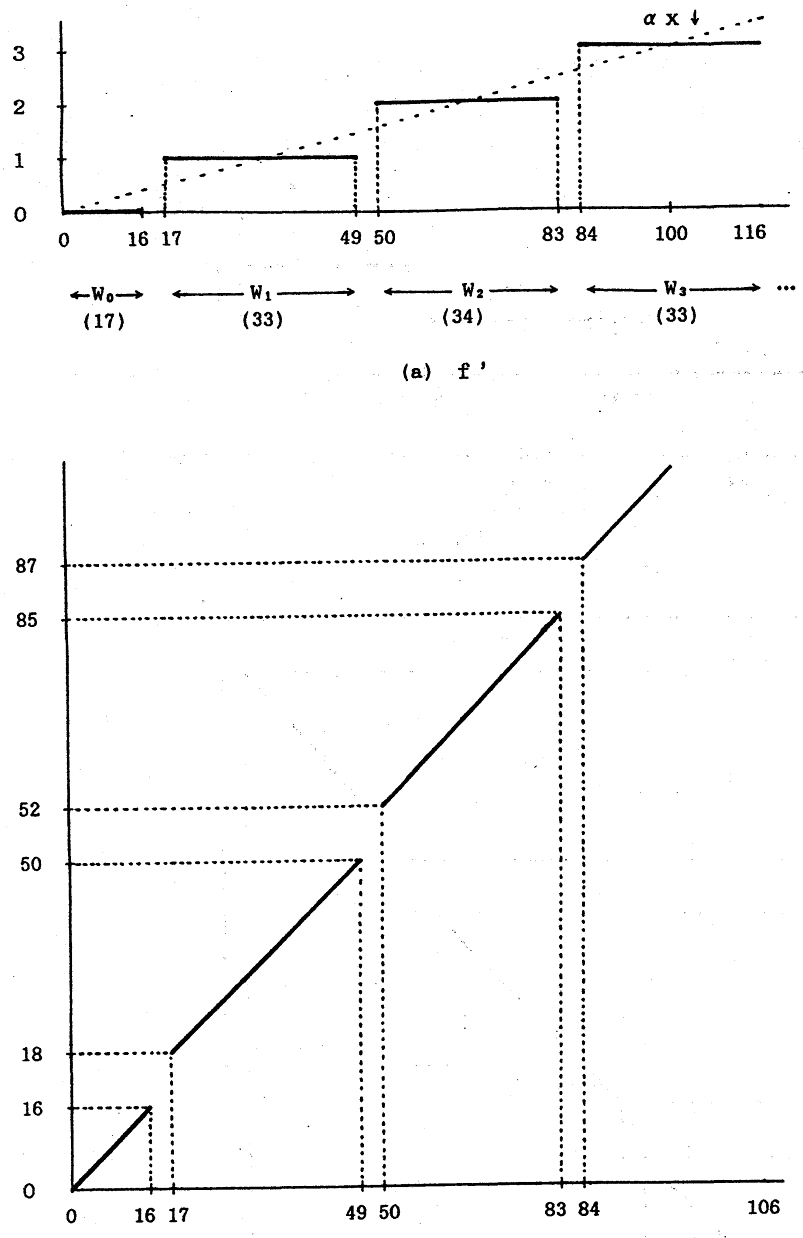


(a) f



(b) F

図．1　切捨ての場合の税額ｆと税込み価格Ｆ（税率$\alpha = 0.03$）．



(b) F'

図.2 四捨五入の場合の税額f'と税込み価格F'（税率$\alpha = 0.03$）.

$B \in N$ が与えられたとき$B=f(A)=\lfloor \alpha A \rfloor$を満たす$A \in N$を求めたい。$B \leqq \alpha A < B+1$より、$B/\alpha \leqq A < (B+1)/\alpha = B/\alpha + 1/\alpha$。このとき$\alpha \geqq 1$ならば$B/\alpha \leqq A < B/\alpha + 1$、すなわち$A=\lceil B/\alpha \rceil = f^{-1}(B)$と定まるが、$\alpha < 1$の場合は$A=\lceil B/\alpha \rceil$,あるいは$\lceil B/\alpha \rceil +1$,あるいは…のように幾つものAがありうる（事実３）。そこで次のようにBに対応するAで最小のものを定める。

以後、$0<\alpha<1$と仮定する。

【定義２】$x\in R$とする。

$g(x)\triangleq\lceil x/\alpha\rceil$、$g'(x)\triangleq\lceil (x-1/2)/\alpha\rceil$、$M\triangleq\lceil 1/\alpha\rceil$

【事実４】$x,y,z\in R$とする。

(1) $g(x)+g(y)=g(x+y)+\delta$

(2) $g'(x)+g'(y)+g'(z)=g'(x+y+z-1)+2\delta$

（証明略）□

税額がｉ円である帯域を

$$W_i\triangleq\{g(i),g(i)+1,\cdots,g(i+1)-1\}$$

と記す。各帯域に含まれる点の個数は$|W_i|=g(i+1)-g(i)=g(1)-\delta=M-\delta$である。

【命題１】各$j(1\leq j\leq n)$について$s_j\in W_{i_j}$のとき、

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \in \bigcup_{k=0}^{n-1} W_{\Sigma i_j+k}$$

（証明略）□

命題により次のことが言える：各s_jを統合する前の税の総額は$\sum_{j=1}^{n} i_j$である。

統合すると、税はΣi_j，$\Sigma i_j+1,\cdots$，あるいはΣi_j+n-1円となるから、0，1,…,あるいはn-1円損をすることになる。

逆に、$s\in W_k$を$s=\Sigma s_j$とｎ分割して各$s_j\in W_{i_j}$となったとしよう。すると命題より、分割前の税額ｋはΣi_j，$\Sigma i_j+1,\cdots$，あるいはΣi_j+n-1に等しいはずである。すなわち、分割後の税額であるΣi_jはk，k-1,…，あるいはk-n+1に等しい。従ってｎ分割すると、０，1，…,あるいはｎ－１円得をすることになる（Ｋ分割したときＫ－１円以上得することはありえない）。

以上が切捨ての場合であるが、四捨五入については次のようになる。

$\lfloor \alpha A+1/2 \rfloor$ =BとするとB$\leqq \alpha A+1/2<B+1$であるから、$(B-1/2)/\alpha \leqq A<((B+1)-1/2)/\alpha=(B-1/2)/\alpha+1/\alpha$。故に$f'(A)=B$を満たす最小のAは$\lceil (B-1/2)/\alpha \rceil$である。

税額がｉ円である帯域を

$$W_i \triangleq \{g'(i),g'(i)+1,\cdots,g'(i+1)-1\}$$

と定義する。帯域に含まれる点の個数は$|W_i|=g'(i+1)-g'(i)=g'(3/2)-\delta=M-\delta$である。各帯域は切捨ての場合に対して、マイナス方向に約Ｍ／２ほどずれている（図２参照）。

【命題２】各$j(1\leq j\leq n)$について$s_j \in W'_{i_j}$のとき、

$$\sum_{j=1}^{n} s_j \in \bigcup_{k=-\lfloor n/2 \rfloor}^{\lfloor n/2 \rfloor} W'_{\sum i_j+k}$$

（証明略）□

従って、Ｋ分割したとき±$\lfloor K/2 \rfloor$円以上得あるいは損をすることはありえない。

統合と分割の二つの観点を考え合わせれば、分割することによって税額が変動する様子は図３のようになる。図においてT_O, T_Iは

$$T_O \triangleq f(\sum_{i=1}^{N} a_i),\ T_I \triangleq \sum_{i=1}^{N} f(a_i)$$

を表す。ここに$a_1,a_2,\cdots,a_N$は各商品の値段である。あらゆる分割の中で最小（最大）の税額をT_{min} (T_{max})とすると、切捨ての場合は

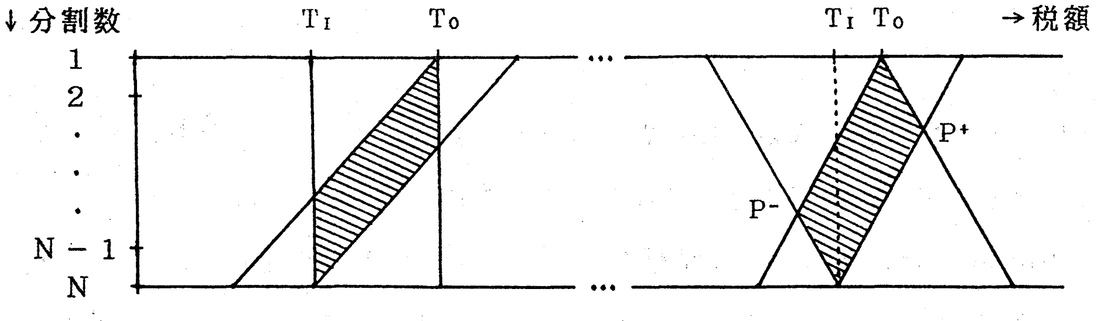
$$T_{min}=T_I \quad (T_{max}=T_O)$$

である。一方、四捨五入の場合は図３の点$P^-(P^+)$の座標を求めることにより、

$$T_{min} \geqq T_I - \lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor$$

$$(T_{max} \leqq T_O + \lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor)$$

であることがわかる。ここで、$\Delta T \triangleq T_O-T_I$とおいた。従って、$T_{max}-T_{min} \leq \Delta T+\lfloor (N-2\Delta T+1)/4 \rfloor \cdot 2 \leq \Delta T+N/2-\Delta T+1/2=(N+1)/2=\lceil N/2 \rceil$となる。



(a) 切捨ての場合　　　　(b) 四捨五入の場合

図.3　T_O, T_I から定まる税の存在範囲（N＝品物の個数）.

3. アルゴリズム

本章では、税率αは有理数と仮定し$\alpha = D'/D$ のように既約分数の形で表されるものとする。すると、$a = qD + a \bmod D$, $b = rD + b \bmod D$ とおくと、

$$f(a) = \lfloor aD'/D \rfloor = \lfloor (qD + a \bmod D)D'/D \rfloor = qD' + f(a \bmod D),$$

$$f(b) = rD' + f(b \bmod D),$$

$$f(a+b) = (q+r)D' + f(a \bmod D + b \bmod D)$$

であるから、

$$f(a+b) - f(a) - f(b) = f(a \bmod D + b \bmod D) - f(a \bmod D) - f(b \bmod D)$$

となる。f'についても同様。これは$a - a \bmod D$が分割に対して何等影響を及ぼさないことを意味している。以後、与えられる商品の値段aは全て$0 \le a \le D-1$を満たすものとする。もし必要ならば、求められた結果に$a - a \bmod D$分を加えればよい。

“MinTAX”とは次のような問題である：N個の商品の値段$a_1, a_2, \cdots, a_N$、税率α、分割数K、および金額Tが入力として与えられたとする。税率をαとするとき、商品の各K分割に対する税額のうちで最小の値はTであるか？

【定理１】 MinTAX は$O(NKD^{K-1})$時間で解ける。

（証明略）□

次に、分割数を特に指定しないときはどうであろうか？ すなわち、あらゆる分割を許すときに税額が最も少なくて済むものを求めたい。

“Min*TAX”とは次のような問題である：N個の商品の値段$a_1,a_2,\cdots,a_N$、税率α、分割数K、および金額Tが入力として与えられたとする。税率をαとするとき、商品のあらゆる分割に対する税額のうちで最小の値はTであるか？

前定理から、$O(N^2D^{N-1})$の時間で求められることがわかるが、これはNの指数関数である。次の定理ではNに関して多項式のアルゴリズムを示す。

【定理２】 Min*TAX は$O(DN^{D-1})$時間で解ける。

（証明略）□

現実的に考えるとαは固定されているから、定理のアルゴリズムは一応満足できるものと言えるであろう。

【注】切捨ての場合は、$T_{min}=T_I=\Sigma f(a_i)$であるから、Min*TAX は$O(N(\log D)^2)$、すなわち入力の大きさに関する多項式時間で求めることができる。

最後に計算量理論上の考察を行なう。

“ExisTAX”とは次のような問題である：N個の商品の値段$a_1,a_2,\cdots,a_N$、分割数K、税率α、金額Tが入力として与えられたとする。税額をTとするようなK分割は存在するか？

【補題１】 ExisTAX は（分割数K=2，税額T=0 のときでさえ）ＮＰ完全である。

（証明略）□

【定理３】 MinTAX は（分割数K=2，税額T=0 のときでさえ）ＮＰ困難である。

【注】 ExisTAX が強ＮＰ完全であることが示されれば、定理１に示した疑似多項式時間アルゴリズムの大幅な改良はかなり難しいと結論される。

文　献

[1] 白松録郎：その後の消費税--価格転嫁と１円玉、かや書房（１９８９）．

[2] M.R.Garey and D.S.Johnson, *Computers and Intractability*, Freeman (1979).

[3] D.E.Knuth, *The art of Computer Programming; Fundamental Algorithms*, Addison-Wesley (1973).

[4] Ｃ．ベルジュ（野崎訳）：組み合せ論の基礎 、サイエンス社（昭４８）．

[5] M.W.Krentel, The Complexity of Optimization Problems, *Pro.18th Ann. ACM Symp. on Theory of Computing* (1986), pp.69-76.