数理解析研究所講究録
第 732 巻 1990 年 31-38

Hausdorff-gap から得られる ideal に関して

阪府大総 加茂静夫 (Shizuo Kamo)

この論文では、集合論における記法を用いる。

Definition. X を ω の subset、$f, g : X \to \omega$ とするとき、

$$f \prec g \text{ iff } \{ n \in X ; g(n) \leqq f(n) \} \text{ が finite}$$

と記し、g は f を dominate するという。

Definition. κ、λ を無限基数とする。$\langle \langle f_\alpha | \alpha < \kappa \rangle | \langle g_\beta | \beta < \lambda \rangle \rangle$ が (κ, λ)-gap であるとは、

(1) $f_\alpha, g_\beta : \omega \to \omega$, for any $\alpha < \kappa$, $\beta < \lambda$,

(2) $f_\alpha \prec f_\gamma \prec g_\delta \prec g_\beta$, for any $\alpha < \gamma < \kappa$, $\beta < \delta < \lambda$

が成り立つことである。

(κ, λ)-gap $\langle \langle f_\alpha | \alpha < \kappa \rangle | \langle g_\beta | \beta < \lambda \rangle \rangle$ が、unfilled であるとは、

$$f_\alpha \prec h \prec g_\beta, \text{ for any } \alpha < \kappa, \beta < \lambda$$

を満たす $h : \omega \to \omega$ が存在しないことである。

unfilled な (ω_1, ω_1)-gap を Hausdorff gap (略して、H-gap) と呼ぶ。

次の Fact は、よく知られている。

Fact. 正則無限基数 κ、λ に対して、$(\kappa, \lambda) \neq (\omega_1, \omega_1)$ なら、

$$W \models \text{" unfilled な } (\kappa, \lambda)\text{-gap は存在しない "}$$

を満たす基数を保つ適当な generic extention W が存在する。

H-gap に関して、Fact とは対照的な次の定理が成り立つ。

定理 (Hausdorff[D,Theorem 4.3]) H-gap は、存在する。

この論文では、H-gap $\mathfrak{G} = \langle\langle f_\alpha \mid \alpha<\omega_1\rangle \mid \langle g_\alpha \mid \alpha<\omega_1\rangle\rangle$ から得られるイデアル：

$$I_{\mathfrak{G}} = \{ x \subset \omega \ ; \ \exists h : x \to \omega \ \forall \alpha<\omega_1 (f_\alpha \restriction x \prec h \prec g_\alpha \restriction x) \}$$

に関して２つの結果を示す。

定義から明らかなように、任意の H-gap $\mathfrak{G}$ に対して、

$$\mathrm{fin} = \{ x \subset \omega \ ; \ x \text{ is finite} \} \subset I_{\mathfrak{G}}$$

が成り立つ。

定理１（CH）ω上のイデアル $\mathcal{I}$ が $\mathrm{fin} \subset \mathcal{I}$ を満たすなら、$\mathcal{I} = I_{\mathfrak{G}}$ となる H-gap $\mathfrak{G}$ が存在する。

証明. 連続体仮説（CH）を仮定する。$\mathcal{I}$ をω上のイデアルで $\mathrm{fin} \subset \mathcal{I}$ を満たすものとする。

各 $f, g : \omega \to \omega$ に対して、

$$f \ll g \text{ iff } \lim_{n \to \omega} (g(n) - f(n)) = \omega$$

と記す。

$$\mathcal{X} = \{ s \ ; \ \exists x \subset \omega (x \notin \mathcal{I} \ \& \ s : x \to \omega) \}$$

とおき、

$\langle s_\alpha \mid \alpha<\omega_1\rangle$: $\mathcal{X}$ の enumeration,

$\langle a_\alpha \mid \alpha<\omega_1\rangle$: $\mathcal{I}$ の enumeration

とし、各$\alpha < \omega_1$に対して、

$$b_\alpha = \mathrm{domain}(s_\alpha)$$

とおく。

$\alpha < \omega_1$ に関する induction により、$f_\alpha, g_\alpha : \omega \to \omega$ と $h_\alpha : a_\alpha \to \omega_1$を、次の (1)〜(4)を満たすようにとる。

(1) $f_\xi \prec f_\alpha \ll g_\alpha \prec g_\xi$, for any $\xi < \alpha$,

(2) $f_\alpha \restriction a_\xi \ll h_\xi \ll g_\alpha \restriction a_\xi$, for any $\xi < \alpha$,

(3) $f_\alpha \restriction b_\alpha \not\prec s_\alpha$ or $s_\alpha \not\prec g_\alpha \restriction b_\alpha$,

(4) $f_\alpha \restriction a_\alpha << h_\alpha << g_\alpha \restriction b_\alpha$

いま、(1)〜(4) をみたす f_α, g_α, h_α (for $\alpha < \omega_1$) がとれたとする。

(1) より、

$$\mathcal{G} = \langle \langle f_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \rangle \ : \text{gap}$$

が成り立つ。又、(2) より任意の $\beta < \omega_1$ に対して、

$$f_\alpha \restriction a_\beta \prec h_\beta \prec g_\alpha \restriction a_\beta \quad , \text{for any } \alpha < \omega_1$$

となるから、

$$a_\beta \in I_{\mathcal{G}}$$

が成り立つ (i.e., $\mathcal{I} \subset I_{\mathcal{G}}$)。更に、(3) より、

$$I_{\mathcal{G}} \subset \mathcal{I}$$

である。

以下、(1)〜(4) をみたす f_α, g_α, h_α が ($\alpha < \omega_1$ に関する induction で) とれることを示す。

Notation. $X, Y \subset {}^\omega\omega$ に対して、

$$X << Y \text{ iff } \forall f \in X \ \forall g \in Y \ (f << g)$$

と記す。

補題 1. $X, Y \subset {}^\omega\omega$ が、$0 < |X| \leqq \omega$ & $|Y| \leqq \omega$ & $X << Y$ を満たすなら、

$$X << \{h\} << Y$$

を満たす $h : \omega \to \omega$ が存在する。

証明. $Y = \phi$ なら明らかだから、$Y \neq \phi$ としておく。

$\langle f_n \mid n < \omega \rangle$: X の enumeration,

$\langle g_n \mid n < \omega \rangle$: Y の enumeration

をとっておく。 $X << Y$ だから、任意の $k < \omega$ に対して、

$$\lim_{n \to \omega} (\min\{g_i(n) ; i \leqq k\} - \max\{f_i(n) ; i \leqq k\}) = \omega$$

が成り立つ。そこで、各 $k < \omega$ に対して、$n_k < \omega$ を、

$n_k < n_{k+1}$,

$\forall n \in [n_k, n_{k+1})$ ($\min\{g_i(n); i \leqq k\} - \max\{f_i(n); i \leqq k\} \geqq 2k$),

となるようにとり、$h : \omega \to \omega$ を、

$h(n) = \max\{f_i(n); i \leqq k\} + k$, if $n \in [n_k, n_{k+1})$

で定めれば、$X << \{h\} << Y$ である。□

補題２． b, s, X, Y, Z が、

$b \subset \omega$ & $s : b \to \omega$ & b is infinite,

$X, Y \subset {}^{\omega}\omega$ & $Z \subset \{ h ; \exists x \subset \omega (h : x \to \omega) \}$,

$X \neq \phi$ & $|X| \leqq \omega$ & $|Y| \leqq \omega$ & $X << Y$,

$\forall h \in Z$ ($X \restriction \mathrm{domain}(h) << \{h\} << Y \restriction \mathrm{domain}(h)$),

$\forall h \in Z$ ($b \cap \mathrm{domain}(h)$ is finite)

を満たすとすると、

$X << \{f\} << \{g\} << Y$,

$f \restriction \mathrm{domain}(h) << h << g \restriction \mathrm{domain}(h)$, for any $h \in Z$,

$f \restriction b \not\prec s$ or $s \not\prec g \restriction b$

を満たす $f, g : \omega \to \omega$ が存在する。

証明.　$a = \omega \setminus b$ とおく。補題１を用いて、$f_1, g_1 : a \to \omega$ を、

$X \restriction a << f_1 << g_1 << Y \restriction a$,

$f_1 \restriction \mathrm{domain}(h) << h << g_1 \restriction \mathrm{domain}(h)$, for any h in Z

となるようにとる。$f_2, g_2 : b \to \omega$ を、

$f_2 << g_2$ & $X \restriction b \prec f_2$ & $g_2 \prec Y \restriction b$,

$f_2 \not\prec s$ or $s \not\prec g_2$

となるようにとり、

$f = f_1 \cup f_2$, $g = g_1 \cup g_2$

とすればよい。　□

定理１の証明（続） いま、$\alpha < \omega_1$ に対して、f_ξ, g_ξ, h_ξ (for $\xi < \alpha$) まで (1)〜(4) を満たすようにとられたとする。

$b_\alpha \notin \mathcal{J}$ & $\{ a_\xi ; \xi < \alpha \} \subset \mathcal{J}$ & fin $\subset \mathcal{J}$

だから、$b \subset b_\alpha$を、

b : infinite & $b \cap a_\xi$: finite , for all $\xi < \alpha$

となるようにとる。補題2より、f_α, g_α: $\omega \to \omega$ を、

$f_\xi \prec f_\alpha \ll g_\alpha \prec g_\xi$, for all $\xi < \alpha$,

$f_\alpha \upharpoonright s_\xi \ll h_\xi \ll g_\alpha \upharpoonright s_\xi$, for all $\xi < \alpha$,

$f_\alpha \upharpoonright b \not\prec s_\alpha \upharpoonright b$ or $s_\alpha \upharpoonright b \not\prec g_\alpha \upharpoonright b$

となるようにとる。そして、h_α: $\omega \to \omega$ を、

$f_\alpha \upharpoonright a_\alpha \ll h_\alpha \ll g_\alpha \upharpoonright a_\alpha$

となるようにとればよい。 ■

定理2 (CH) 基数 κ が、$\kappa^\omega = \kappa$ を満たすとする。

$P = \{ p ; \exists x \subset \kappa (|x| < \omega$ & $p : x \to 2) \}$

(κ個の Cohen real を付け加える partial ordering)

とおく。このとき、V^P において、

$\{ I_{\mathcal{G}} ; \mathcal{G}$ is a H-gap $\}$

= the family of all ideals $\mathcal{J}$ such that

fin $\subset \mathcal{J}$ and $\mathcal{J}$ is $\leqq \omega_1$-generated.

が成り立つ。

$Q = \{ q ; \exists x \subset \omega (|x| < \omega$ & $q : x \to 2) \}$

とおく。定理2を示すため、まず次の補題を示す。

補題3. $\mathcal{G} = \langle \langle f_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \mid \alpha < \omega_1 \rangle \rangle$ を H-gap とし、$\mathcal{J} = I_{\mathcal{G}}$ とおく。このとき、

$V^Q \models$ " $I_{\mathcal{G}}$ is the ideal generated by $\mathcal{J}$ "

が成り立つ。

証明.　$V^Q \models$ "$\mathcal{I} \subset I_Q$" は、明かだから、＝を示すには、

$$\Vdash_Q \forall x \in I_Q \exists y \in \mathcal{I} (x \subset y)$$

を示せば十分である。それを示すため、

$$q \in Q \ \& \ x : Q\text{-name} \ \& \ q \Vdash x \in I_Q$$

とする。 Q-name h を、

$$\Vdash h : x \to \omega \ \& \ \forall \alpha < \omega (f_\alpha \upharpoonright x \prec h \prec g_\alpha \upharpoonright x)$$

となるようにとる。各 $\alpha < \omega_1$ に対して、$q_\alpha \leqq q$ と $n_\alpha < \omega$ を、

$$q_\alpha \Vdash \forall k \in x \setminus n_\alpha (f_\alpha(n) < h(n) < g_\alpha(n))$$

となるようにとる。$|Q \times \omega| = \omega$ だから、$r \in Q$ と $m < \omega$ を、

$$A = \{ \alpha < \omega_1 ; \ q_\alpha = r \ \& \ n_\alpha = m \} \text{ is cofinal in } \omega_1$$

となるようにとる。

$$y = \{ k < \omega ; m \leqq k \ \& \ \exists r' \leqq r (r' \Vdash k \in x) \}$$

とおく。y のとりかたから、

$$r \Vdash x \subset y \cup m$$

である。以下、$y \in \mathcal{I}$ を示す。

☆　$\alpha, \beta \in A \ \& \ k \in y$ とすると、

$$f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k)$$

が成り立つ。

∵)　$\alpha, \beta \in A \ \& \ k \in y$ とする。$r' \leqq r$ を、

$$r' \Vdash k \in x$$

となるようにとる。このとき、$k \geqq m$ だから、

$$r' \Vdash f_\alpha(k) < h(k) < g_\beta(k)$$

が成り立つ。

$$\therefore \ r' \Vdash f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k).$$

$$\therefore \ f_\alpha(k) + 1 < g_\beta(k).$$

☆より、$h : y \to \omega$ を、

$$h(k) = \max \{ f_\alpha(k) ; \alpha \in A \} + 1$$

で定める。定めかたと☆より、

$$\forall \alpha<\omega(\, f_\alpha \restriction y \prec h \prec g_\alpha \restriction y \,)$$

が成り立つ。 $\therefore\ y \in \mathcal{I}.$ $\square$

系３．１． $\mathfrak{G} = \langle \langle f_\alpha \mid \alpha<\omega_1 \rangle \mid \langle g_\alpha \mid \alpha<\omega_1 \rangle \rangle$ を H-gap とし、

$\mathcal{I} = I_{\mathfrak{G}}$ とおく。このとき、

$$V^P \models \text{" } I_{\mathfrak{G}} \text{ is the ideal generated by } \mathcal{I} \text{ "}$$

が成り立つ。

証明. 補題３と

$$V^P \cap \mathcal{P}(\omega) \subset \bigcup\{\, V^{P \restriction a} \,;\, a \in V \ \&\ a \subset \kappa \ \&\ |a| \leqq \omega \,\}$$

より明か。 $\square$

定理２の証明. まず、V^P において、

$$\forall \mathfrak{G} : \text{H-gap} \ (\, I_{\mathfrak{G}} \text{ is } \leqq \omega_1\text{-generated} \,)$$

が成り立つことを示す。そこで、

$$\mathfrak{G} \in V^P \text{ and } V^P \models \mathfrak{G} \text{ is a H-gap}$$

とする。 $A \in V$ を、

$$|A| \leqq \omega_1 \quad \& \quad \mathfrak{G} \in V^{P \restriction A}$$

となるようにとる。 $V^{P \restriction A} \models \mathrm{CH}$ だから、

$$V^{P \restriction A} \models I_{\mathfrak{G}} \text{ is } \leqq \omega_1\text{-generated}$$

が成り立つ。 $P \cong (P \restriction A) \times (P \restriction (\kappa \setminus A))$ かつ $P \cong P \restriction (\kappa \setminus A)$ だから、
系３．１より、

$$V^P \models I_{\mathfrak{G}} \text{ is } \leqq \omega_1\text{-generated}$$

である。

逆を示すため、

$$\mathcal{I} \in V^P \ \&\ V^P \models \mathcal{I} \text{ is } \leqq \omega_1\text{-generated and fin} \subset \mathcal{I}$$

とする。 $S \in V^P$ を、

$$V^P \models |S| \leqq \omega_1 \text{ and } \mathcal{I} \text{ is generated by } S$$

となるようにとり、$A \in V$ を、

$$|A| \leqq \omega_1 \quad \& \quad S \in V^{P \restriction A}$$

となるようにとる。 $V^{P \restriction A} \models CH$ だから、定理１より、$\mathfrak{G} \in V^{P \restriction A}$ を、

$$V^{P \restriction A} \models \mathfrak{G} \text{ is a H-gap and } I_{\mathfrak{G}} \text{ is generated by } S$$

となるようにとる。系３．１より、

$$V^P \models I_{\mathfrak{G}} = \mathcal{I}$$

が成り立つ。 ■

参考文献

[D] E. K. Van Douwen, The Integer and Topology, in Handbook of Set Theoretic Topology.