数理解析研究所講究録
第732巻 1990年 58-68

Retracts of Compact Homogeneous Spaces and 0-dimensional Spaces

横浜国大・工　寺田敏司　(Toshiji Terada)

§1. Introduction.　位相空間 X は、任意の点 x, y に対して、$f(x)=y$ をみたす X の homeomorphism f が存在するとき、(topologically) homogeneous とよばれる。Uspenskiĭ の結果として、すべての Tychonoff 空間 X に対して、積空間 $X \times Y$ が homogeneous となるように Tychonoff 空間 Y を選べることが知られている。すなわち、Tychonoff 空間のカテゴリーでは、homogenity に関する関する問題は、余り多くは残っていない。　ところが、コンパクト T_2-空間のカテゴリーにおいては、homogenity に関する多くの問題が残されている。たとえば、

問 (Arhangel'skiĭ)　すべてのコンパクト T_2-空間は、homogeneous コンパクト T_2-空間の連続像となり得るか?

問（van Douwen） 特に，コンパクト T_2-空間 X が，βN 上に連続写像で写されるとき，X は non-homogeneous か？

などが，未解決な代表的問題である。ところで，上述の Uspenskiĭ の結果と関連して，Motorov が，次のような結果を与えた。"任意のコンパクト T_2-空間 Y との積 $X \times Y$ が homogeneous でないコンパクト T_2-空間 X が存在する。"
実際，"homogeneous コンパクト T_2-空間の retract とならないコンパクト T_2-空間 X が存在する。"

ここでの目的は，Motorov の結果と関連した Arhangel'skiĭ の 2，3 の問題に対して，その解を与えるところとする。

§2. Definitions. 以下の定義は Arhangel'skiĭ [1] による。

Def. X を位相空間とする。X の閉集合全体を 2^X で表す。（連続性などを仮定しない）写像 $F : X \longrightarrow 2^X$ が，次の条件をみたすとき，F は X 上の cellularity とよばれる。

1) $x \in F(x)$，

2) $y \in F(x) \longrightarrow F(y) \subset F(x)$，

3) $f: X \twoheadrightarrow X$ が $f(x)=y$ をみたす homeomorphism ならば，$f(F(x)) = F(y)$．

各 $F(x)$ は，cellularity F の term とよばれる。

X 上の cellularity F が，任意の $x, y \in X$ に対して，$F(x) = F(y)$ または，$F(x) \cap F(y) = \phi$ をみたすとき，F は disjoint であるとよばれる。

Th.（Arhangel'skii）位相空間 X が homogeneous である必要十分条件は，少なくとも1つのコンパクトな term をもつ cellularity（on X）は disjoint となることである。

Cellularity の作り方の例として，次のようなものがある。今，$\mathcal{G} = (Y, Z, \mathcal{E})$，ここで Y は位相空間，Z は Y の部分空間，$\mathcal{E}$ は Y の部分集合族とする。位相空間 X を任意にとる。X の閉集合 P が，次の条件をみたすとき，$\mathcal{G}$-saturated とよばれる。

$$(*)\begin{cases} \text{任意の連続写像 } f: Y \longrightarrow X \text{ に対して，} \\ f(E) \cap P \neq \phi \text{ for } \forall E \in \mathcal{E} \text{ ならば，} f(Z) \subset P \end{cases}$$

そこで，$F_{\mathcal{G}}: X \longrightarrow 2^X$ を，

$$F_{\mathcal{G}}(x) = \cap \{P : P \text{ は } x \text{ を含む } \mathcal{G}\text{-saturated 部分集合}\}$$

と定める。このとき，$F_{\mathscr{g}}$が確かにX上のcellularityとなる。これを，$\mathscr{g}$から得られたcellularityとよぶことにする。

Def. Xを位相空間とする。上のような任意の3つ組$\mathscr{g}$に対して，$\mathscr{g}$から得られるX上のcellularityが，少なくとも1つのtermをコンパクトにしているとき，disjointとなるならば，Xはcell solubleであるとよぶことにする。

Th. (Arhangel'skiĭ) homogeneousコンパクトT_2-空間のretractは，cell solubleである。

全Tychonoff空間と全連続写像からなるカテゴリーを$\mathbf{T}$で表す。

Def. 各$X \in \mathbf{T}$にX上の1つのcellularity F^Xを対応させる規則$\mathbf{F}$が，次の条件をみたすとき，abstract cellularityとよばれる：

任意の$f : X \longrightarrow Y$ (in $\mathbf{T}$)に対して，

$$f(F^X(x)) \subset F^Y(f(x)) \quad \text{for } {}^\forall x \in X .$$

$\mathscr{g} = (Y, Z, \mathcal{E})$を前述のような3つ組とする。各X

$\in \mathbf{T}$ に，q から得られる X 上の cellularity F_q^X を対応させると，abstract cellularity $\mathbf{F}_q = \{F_q^X : X \in \mathbf{T}\}$ が得られる。このような abstract cellularity を representable という。

Def. X をコンパクト T_2-空間とする。任意の abstract cellularity $\mathbf{F}$ に対して，その X 上の cellularity F^X が disjoint となるとき，X は completely cell soluble であるとよぶことにする。

§3. Results. Arhangel'skiĭ は，次の問題を出している。

問題 1. non-representable abstract cellularity は，存在するか？.

この問題は，次のように解決される。各 $X \in \mathbf{T}$ に対して，$F_c^X : X \longrightarrow 2^X$ を

$$F_c^X(x) = \text{the connected component of } x \text{ in } X$$

で定義する。このとき，

$$\mathbf{F}_c = \{F_c^X ; X \in \mathbf{T}\}$$

は，abstract cellularity であることがわかる。

Th. $\mathbf{F}_c$ は non-representable である。

この定理の証明の概略は，次のとうりである。任意の3っ組 $\mathcal{G} = (Y, Z, \mathcal{E})$ を前の様なものとする。$\mathbf{F}_{\mathcal{G}} \neq \mathbf{F}_c$ が示せればよい。そこで，$\mathcal{G}$ の場合別に調べる。たとえば，Y の clopen subset G で $G \cap Z \neq \phi$ かつ $E - G = \phi$ が，各 $E \in \mathcal{E}$ に対して成立している場合は，$F_{\mathcal{G}}^X(x) = X$ が任意の $X \in \mathbf{T}$，任意の $x \in X$ に対して成り立つ。したがって，連結でない空間 X に対して，$F_{\mathcal{G}}^X \neq F_c^X$ となる。また，Y の任意の clopen subset G に対して，$G \cap Z \neq \phi$ ならば，$E \subset G$ をみたす $E \in \mathcal{E}$ が存在する場合には，$\kappa = |Y|$ として，長さ $\kappa^+ + 1$ の long line L を考えると，$F_{\mathcal{G}}^L \neq F_c^L$ が示せる。

この結果に関連して，次の問題が考えられる。

問　Cell soluble コンパクト T_2-空間は completely cell soluble か？

Arhangel'skiĭ は、次の問題も提出している。

問題2. 任意の零次元コンパクト T_2-空間は、completely cell soluble か？

問題3. $\beta N \setminus N$ は completely cell soluble か？

これらの問題は、次のように解けた。

Th. 任意の零次元コンパクト T_2-空間は completely cell soluble である。特に、$\beta N \setminus N$ も、そうである。

この定理を証明することは、結局、2点 discrete 空間の所の話に帰着される。$\mathbb{F}$ を、かってな abstract cellularity とするとき、2点 discrete 空間 $D=\{0, 1\}$ 上の cellularity F^D を考えると、次の場合がある。

(1)　$F^D(0)=\{0\}$ かつ $F^D(1)=\{1\}$

(2)　$F^D(0) = F^D(1) = D$

(1) の場合は. $F^X(x)=\{x\}$ が. 任意の零次元コンパクト T_2-空間 X と任意の $x\in X$ に対して成り立ち, F^X は disjoint となる。 (2) の場合は. $F^X(x)=X$ が, 任意の $X\in \mathbb{T}$ と任意の $x\in X$ に対して成り立ち. 同様に. F^X は, disjoint となる。

この定理に関連した次の問題が考えられる。

問 任意の零次元コンパクト T_2-空間は homogeneous コンパクト T_2-空間の retract となるか?

実際, Arhangel'skiǐ は. 次の問題を出している。

問題 4. 任意の零次元コンパクト T_2-空間 X に対して, 積 $X\times Y$ が homogeneous となる compact T_2-空間 Y が存在するか?

この問題の部分解的なものを与えることはできる。

Def. 位相空間 X が次の条件をみたすとき, X は weakly homogeneous であると呼ぶことにする。

任意の $x, y \in X$ と任意の近傍 $U \ni x$, $V \ni y$ に対して，X からそれ自身への homeomorphism f が存在し，$f(x) \in V$ かつ $f^{-1}(y) \in U$ とできる。

明らかに，homogeneous ならば，weakly homogeneous である。

Prop. X が零次元 T_1-空間のとき，X が weakly homogeneous である必要十分条件は，X の任意の点 x, y に対して，x, y の任意の近傍 U_x, V_y に対し，x, y の clopen 近傍 U'_x, V'_y を，

$$\begin{cases} (1) & U'_x \subset U_x,\ V'_y \subset V_y \\ (2) & U'_x \text{ と } V'_y \text{ は homeomorphic} \end{cases}$$

をみたすように選べることである。

また，次の事実は明らか。

Prop. X が零次元 T_1-空間のとき，X が homogeneous である必要十分条件は，X の任意の点 x, y に対して，x, y の任意の近傍 U_x, V_y をとると，x, y の clopen 近傍 U'_x, V'_y を

$\begin{cases} (1)\ U_x' \subset U_x,\ V_y' \subset V_y. \\ (2)\ (U_x', x) \text{ と } (V_y', y) \text{ は pair として homeomorphic}. \end{cases}$

をみたすように選べることである。

Prop. X が 1st countable，零次元のとき，weakly homogeneous と homogeneous は同値である。

一般には weakly homogeneous space は homogeneous とは限らない。

Example. $\mathbb{Q}$ を有理数全体の作る普通の位相を与えた空間とするとき，$\beta\mathbb{Q}$ は weakly homogeneous であるが，homogeneous でない。

Th. X を零次元コンパクト T_2-空間とすれば，$X \times Y$ が weakly homogeneous となるように，零次元コンパクト T_2-空間 Y を選べる。

実際，$\mathcal{B}$ を X の clopen 部分集合からなる基底とする。そこで，

$$Y = \prod\{B^\omega : B \in \mathcal{B}\} \times X^\omega$$

とすれば，Y は weakly homogeneous で，しかも，X×Y は，Y と homeomorphic となる。

Cor. 任意の零次元コンパクト T_2-空間は，weakly homogeneous compact T_2-空間の retract となる。

さらに，Introduction で述べた，Arhangel'skii の問題に対しても，次の部分解が得られたことになる。

Cor. 任意の compact T_2-空間は weakly homogeneous コンパクト T_2-空間の連続像となる。

References

[1] A. V. Arhangel'skii, Topological homogeneity. Topological groups and their continuos images, Uspekhi Mat. Nauk 42 (1987), 69–105 = Russian Math. Surveys 42 (1987), 83–131.