

鉛直流体層における自然対流中での伝播波と定在波の非線形相互作用

日本原子力研究所 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)
和歌山大学・教育 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに

温度が異なる 2 枚の鉛直平板間に満たされた流体中に発生する自然対流は流れの安定性という立場から見るとベナール対流のような対流の特徴と平面ポアズイユ流のような平行流の特徴とを合わせ持っていて安定性研究の興味深い対象となっている。しかも、この自然対流は 3 次関数の速度分布と線形の温度分布を持ち、これらは流体方程式の厳密解となっている。このため、安定性を厳密に解析することが可能であり、そこで発生している物理現象は比較的単純である。

鉛直流体層における自然対流の線形安定性は Gershuni (1953), Rudakov (1967), Vest and Arpaci (1969), Gill and Kirkham (1970), Korpela, Gözüm and Baxi (1973), Mizushima and Gotoh (1976), Bergholz (1978), Daniels (1985) 等により詳しく調べられてきた。その結果、次のようなことが知られている。自然対流は定在波攪乱と伝播波攪乱のふたつのタイプの攪乱に対して不安定となる。プラントル数 P がその臨界値 $P_c = 12.454256$ より小さい場合には定在波攪乱に対する臨界グラシヨフ数の方が伝播波攪乱に対する臨界グラシヨフ数よりも小さい、すなわち自然対流は定在波攪乱に対して、より不安定である。逆に、プラントル数が P_c より大きい場合には伝播波攪乱に対して、より不安定である。

一方、非線形安定性は線形安定性ほどまだ詳しく調べられていない。弱非線形安定性の解析や非線形平衡状態の計算などはまだいくつかの特定のパラメータについて行われたにすぎない。Mizushima and Gotoh (1983) は $P = 7.5$ (水), $\alpha = 1.414$ の場合について、この対流の定在波攪乱に対する弱非線形安定性を調べ、攪乱の平衡振幅、ヌッセルト数などを求めた。また、Gotoh and Mizushima (1984) は $P = 7.5$ の場合について、有限長さの鉛直流体層における自然対流中での定在波攪乱と伝播波攪乱の相互作用を弱非線形安定性理論により調べた。Nagata and Busse (1983) は $P \rightarrow 0$ の極限の場合について定在波攪乱の非線形平衡解を求め、さらにその平衡解の 2 次不安定性を調べた。Chait and Korpela (1989) は Nagata and Busse の解析を $P = 0.71$ の場合に拡張した。さらに、彼らは $P = 1000$ の場合に伝播波攪乱の時間発展を長時間にわたって計算した。Nagata and Busse は彼らの論文中で線形不安定であるパラメータ領域中の一部の領域で非線形平衡解が計算できないことを指摘した。これに対して、Mizushima and Saito は非線形平衡解を求める詳しい計算を行いこのパラメータ領域には非線形平衡解が存在しないことを示した。この一見線形安定性から容易に推測できる結果とはかけ離れた結論が得られることについて、Fujimura and Mizushima (1987) は弱非線形安定性理論を用いて調べた。その結果、線形不安定領域において非線形平衡解が存在しないという現象は攪乱の基本波と基本波の 2 倍の波数を持つ高調波との非線形共鳴によるものであることが明らかになった。Fujimura and Mizushima (1988) は数値シミュレーションにより定在波攪乱の時間発展を長時間にわたって計算し、フーリエモード打ち切りによる計算は打ち切り項数により、結果が変わってしまうことがあるということを示した。Riley and Wynne (1988) は壁に温度の完全伝導性からのズレがある場合、 $P < P_c$ のときには不完全なピッチフォーク分岐が、 $P > P_c$ のときには亜臨界ホップ分岐が起こることを示した。

この論文では弱非線形安定性理論と非線形平衡解を求める方法を併用して自然対流の非

線形安定性を準臨界状態を中心に広いプラントル数領域にわたって調べることにする。

定在波攪乱については速度はエルミート対称性を持ち、温度はエルミート反対称性を持っていることが知られている。先に述べたように $P < P_c$ においては定在波攪乱の方がより不安定であり、臨界グラシヨフ数よりも少し大きいグラシヨフ数では定在波攪乱に対する第一固有値のみが正の虚数部を持つ。従って、対応する固有モードは自分自身との相互作用によりつくられた高調波とのみ非線形相互作用を行うので従来のランダウ方程式で記述される時間発展を行うことになる。

$P > P_c$ のときには、臨界グラシヨフ数よりも少し大きいグラシヨフ数では反対方向に同一の位相速度ですり抜けていく1対の伝播波が不安定である。各々の伝播波は空間的な対称性を持たず、互いに直接非線形相互作用を行うことはないが、他方から主流の変形を通じて間接的に相互作用を行う。このため、単独に1方向に伝わる伝播波攪乱があるときとは異なった時間発展を行う。この場合には攪乱の時間発展は連立のランダウ方程式で記述されることになる。

$P \simeq P_c$ のときには定在波攪乱と1対の伝播波攪乱が主流の変形を通じて非線形相互作用するため、事情はもう少し複雑になる。この場合にも攪乱の時間発展は連立のランダウ方程式で記述されることになる。

第2節では問題の定式化を行い、広い範囲のプラントル数に対して、自然対流の線形安定性を詳しく調べる。第3節では弱非線形安定性理論に基づいてランダウ方程式及び連立ランダウ方程式を導く。第4節で広い範囲のプラントル数に対してそれらの方程式の解が持つ性質を議論し、同時にフーリエ・チェビシェフ展開に基づく非線形平衡解の直接計算により、弱非線形安定性理論の妥当性を詳しく調べる。

2. 問題の定式化と線形安定性

温度の異なる2枚の鉛直平板間に満たされている流体中に発生する流体運動を調べる。

2枚の無限に長い鉛直平板は座標 $x = \pm L$ のところに置かれているとし、それぞれの平板の温度は $T_0 \pm \delta T$ に保たれているものとする。ここで、 T_0 は基準となる温度で、流体層の中間点 $x = 0$ での流体の温度であり、 $\delta T > 0$ である。 z 座標を鉛直上向きにとり、 y 座標を z 軸と x 軸に直角にとる。この論文では T_0 と δT は一定であるとするが、鉛直方向に一定の温度勾配が課せられている場合への拡張は容易である。

代表的な長さとして L 、代表的な温度として δT 、代表的な速度として $\gamma g L^2 \delta T / \nu$ をとり、すべての変数を無次元化すると、流体の運動を支配する方程式には2つの無次元量 P と G がパラメータとして含まれることになる。 P はプラントル数であり、 $P = \nu / \kappa$ で定義される。また、 G はグラシヨフ数であり、 $G = \gamma g L^3 \delta T / \nu^2$ で定義される。ここで、 γ は流体の熱膨張係数、 ν は動粘性係数、 κ は熱拡散係数であり、 g は重力加速度である。

流れを2次元流に限定し、ブシネスク近似を用いると流体運動を支配する方程式は次のように書ける。

$$\frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} - J(\psi, \Delta \psi) - G^{-1} \Delta^2 \psi + G^{-1} \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} - J(\psi, T) - (PG)^{-1} \Delta T = 0, \quad (2.2)$$

ここで、 ψ は (x, z) 平面における流れ関数であり、 T は温度、 t は時間を表す。また、 $J(f, g)$ は次式で定義されるヤコビアンであり、

$$J(f, g) \equiv \frac{\partial(f, g)}{\partial(x, z)},$$

Δ は次式で定義される 2次元ラプラシアンである。

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

壁面での ψ と T に対する境界条件は次のように書ける。

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z} = 0, \quad T = \pm 1 \quad \text{at } x = \pm 1. \quad (2.3)$$

流れ場 ψ と T を基本場と攪乱に分けて次のように書き表す。

$$\psi = \bar{\psi}(x) + \hat{\psi}(x, z; t), \quad T = \bar{T}(x) + \hat{T}(x, z; t). \quad (2.4)$$

よく知られているように、基本場 $\bar{\psi}$ と \bar{T} は方程式 (2.1)-(2.3) の厳密解として次のように得られる。

$$-\frac{\partial\bar{\psi}}{\partial x} \equiv W(x) = x(1-x^2)/6, \quad \bar{T} = x. \quad (2.5)$$

(2.4) 式を (2.1)-(2.3) 式に代入し、基本場 $\bar{\psi}$ と \bar{T} に対する方程式を差し引くと $\hat{\psi}$ と \hat{T} に対する方程式が次のように得られる。

$$\frac{\partial\Delta\hat{\psi}}{\partial t} + W\frac{\partial\Delta\hat{\psi}}{\partial z} - W''\frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z} - G^{-1}\Delta^2\hat{\psi} + G^{-1}\frac{\partial\hat{T}}{\partial x} = J(\hat{\psi}, \Delta\hat{\psi}), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial\hat{T}}{\partial t} + W\frac{\partial\hat{T}}{\partial z} - (PG)^{-1}\Delta\hat{T} - \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial z} = J(\hat{\psi}, \hat{T}), \quad (2.7)$$

ここで、 W'' は $\partial^2 W/\partial x^2$ を表すものとする。 $\hat{\psi}$ と \hat{T} に対する境界条件は次のようになる。

$$\hat{\psi} = \frac{\partial\hat{\psi}}{\partial x} = \hat{T} = 0 \quad \text{at } x = \pm 1. \quad (2.8)$$

先に述べたように自然対流の線形安定性はかなり詳しく調べられているが、ここではさらに詳しく広い範囲のプラントル数に対して線形安定性を調べることにする。ただし、ここではある場所の一部だけに局所的に存在するような波束形の攪乱は考えず、攪乱は $-\infty < z < \infty$ に無限に広がっているものとする。このときには通常行われているようにモード分解が可能で、 $\hat{\psi}$ と \hat{T} を次のようにおくことができる。

$$\hat{\psi} = \phi(x) e^{i\alpha(z-ct)}, \quad \hat{T} = \theta(x) e^{i\alpha(z-ct)}. \quad (2.9)$$

(2.9) 式を (2.6) および (2.7) 式に代入し、線形化して次式を得る。

$$[i\alpha(W - c)S - i\alpha W'' - G^{-1}S^2]\phi + G^{-1}D\theta = 0, \quad (2.10)$$

$$i\alpha\phi + [i\alpha(W - c) - (PG)^{-1}S]\theta = 0, \quad (2.11)$$

ここで、 $S \equiv D^2 - \alpha^2$ であり、 $D \equiv d/dx$ である。 ϕ と θ に対する境界条件は次のように書ける。

$$\phi = D\phi = \theta = 0 \text{ at } x = \pm 1. \quad (2.12)$$

ϕ と θ を次のようにチェビシェフ多項式で展開する。

$$\phi = \sum_{n=0}^N \phi_{(n)}(1-x^2)^2 T_n(x), \quad \theta = \sum_{n=0}^N \theta_{(n)}(1-x^2) T_n(x), \quad (2.13)$$

ここで、 $T_n(x)$ は n 次のチェビシェフ多項式である。また、 $(1-x^2)^2$ と $(1-x^2)$ は ϕ と θ が境界条件 (2.12) を満たすように掛けてある。コロケーション法を用いて方程式 (2.10) と (2.11) を次の形の代数方程式に帰着することができる。

$$Ax = cBx, \quad (2.14)$$

ここで、 \mathbf{x} は $2(N+1)$ 次のベクトル、すなわち $\mathbf{x} = [\phi_{(0)}, \phi_{(1)}, \dots, \phi_{(N)}, \theta_{(0)}, \theta_{(1)}, \dots, \theta_{(N)}]^T$ であり、 A と B は $(2N+2)$ 次の正方行列である。

上で述べた方法は複素位相速度 c を求めるのには効率的な方法であるが、線形中立曲線を求めるのには効率的とはいえない。臨界グラシヨフ数を効率的に求めるため、ここでは次のような方法を用いた。方程式として、(2.10) と (2.11) 式及び (2.10) と (2.11) 式を α 微分した式を用いる。これらの式で、 $\text{Im } c = 0$ 及び $dG/d\alpha = 0$ と置く。得られた式に (2.13) 式で表される ϕ と θ のチェビシェフ多項式展開を代入する。コロケーション法を用いて、展開係数に対する代数方程式をニュートン・ラフソンの方法で解く。詳しくは Fujimura (1990) を参照していただきたい。

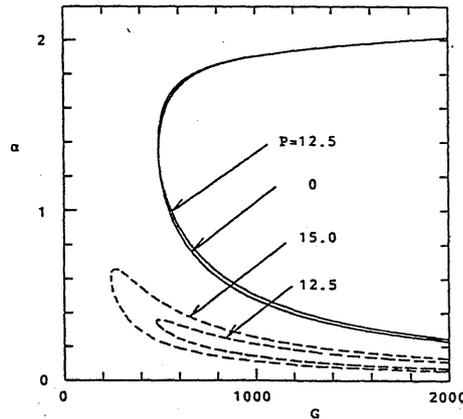


図 1. 線形中立曲線。 $P = 0, 12.5, 15.0$. 実線は定在波攪乱、波線は伝播波攪乱に対する線形中立曲線。

図 1 にプラントル数 $P = 0, 12.5, 15$ に対する線形中立曲線を示す。この図から明ら

かなように、定在波攪乱に対する中立曲線はプラントル数が異なってもほとんど変化をしないが、伝播波攪乱に対する中立曲線はプラントル数に依存して大きく変化する。プラントル数 $P = P_c = 12.45425644$ のときには定在波攪乱も伝播波攪乱も同じ臨界グラシヨフ数を持つ。しかし、2つの攪乱が直接に非線形共鳴をする事はない。

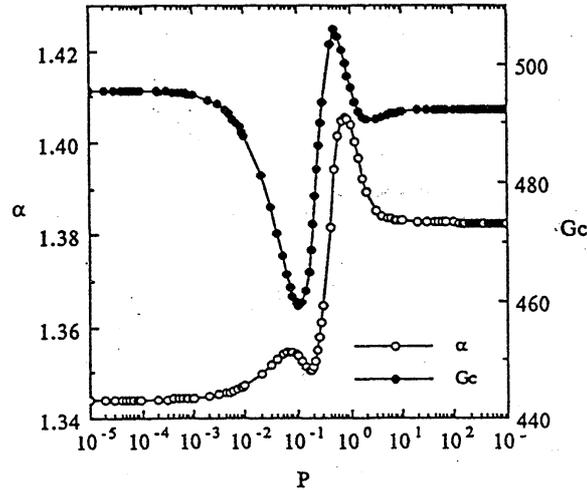


図2. 定在波攪乱に対する臨界条件.

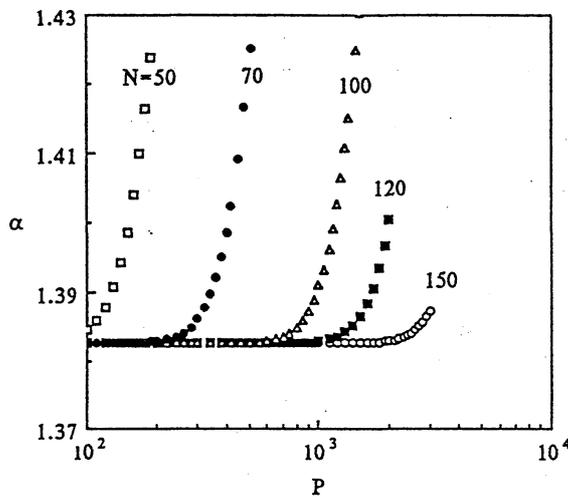


図3. 定在波攪乱に対する臨界波数のチェビシエフ展開の収束性.

広い範囲のプラントル数にわたって、定在波攪乱に対する臨界グラシヨフ数 G_c と臨界波数 α_c を詳しく調べた結果を図2に示す。 $P \rightarrow 0$ において α_c と G_c はそれぞれ一定の値 1.344147 と 495.6284 に漸近的に近づく。大きいプラントル数に対する臨界グラシヨフ数と臨界波数の計算には (2.13) のチェビシエフ多項式展開において打ち切り項数を大きくとる必要がある。大きいプラントル数に対して打ち切り項数 N が臨界波数の計算にどのように影響するかを図3に示す。

同様に臨界グラスヨフ数に対する打ち切り項数 N の影響を図 4 に示す。打ち切り項数 N を十分に大きくとれば $P \rightarrow \infty$ のとき、臨界グラスヨフ数 G_c は一定の値 492.450 に、臨界波数 α_c は 1.3827 に近づいていることがわかる。ただし、 $P > P_c$ では伝播波攪乱の臨界グラスヨフ数は 492.450 よりも小さいので定在波攪乱に対するこのように大きいプラントル数のときの臨界グラスヨフ数には現実的な意味はあまりないことに注意する必要がある。

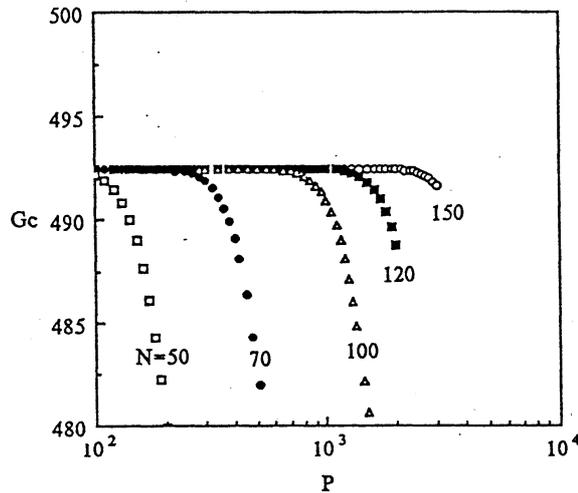


図 4. 定在波攪乱に対する臨界グラスヨフ数のチェビシェフ展開の収束性。

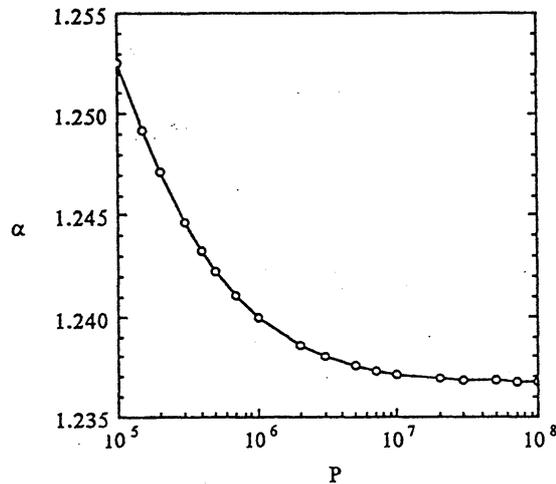


図 5. 大きいプラントル数の場合の伝播波攪乱に対する臨界波数。

伝播波攪乱に対する臨界条件については Gill and Kirkham (1970) が $P \rightarrow \infty$ のときの漸近的な性質を導き出しており、 $\alpha_c \rightarrow 1.25$ および $G_c \sim 587.5P^{-1/2}$ の結果を得ている。彼らはこの漸近形を $P \leq 400$ での数値データから求めたが、もっと詳しい計算を行うと図 5 に示すように α_c は $P \geq 5 \times 10^7$ のとき漸近的な値 1.2367 に近づいていることがわかる。

$12 \leq P \leq 10^8$ における臨界状態での攪乱の位相速度 c_r を図 6 に示す。この図から $P \rightarrow \infty$ における位相速度の漸近形は $c_r \rightarrow \pm 6.7987 \times 10^{-2}$ となることがわかる。

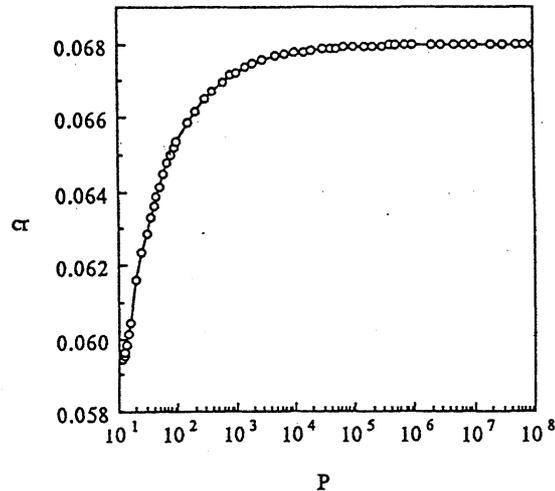


図 6. 伝播波攪乱の臨界位相速度.

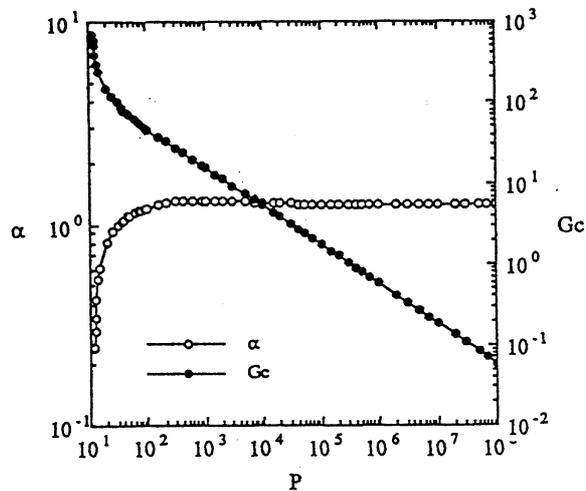


図 7. 伝播波攪乱の臨界条件.

P の関数として α_c と G_c の変化を図 7 に示す。 $P \rightarrow \infty$ での臨界波数と臨界グラシヨフ数の漸近形を $P = 10^8$ から求めると $\alpha_c \rightarrow 1.2367$ および $G_c \sim 589.1264P^{-0.499485}$ となる。Gill and Kirkham はあまりにも小さいプラントル数での計算結果から $P \rightarrow \infty$ における臨界条件の漸近形を評価してしましたが、偶然にも彼らが求めた漸近形 $\alpha \rightarrow 1.25$ および $G_c \sim 587.5P^{-1/2}$ はわれわれの求めた正確な結果をよく一致している。

3. 振幅方程式の導出

この節では臨界状態近傍における攪乱の時間発展を記述する振幅方程式を導く。 $P < P_c$ に対しては定在波攪乱の発展を支配する方程式を導出し、 $P > P_c$ に対しては1対の伝播波攪乱の発展を支配する方程式を導く。また、 $P \simeq P_c$ に対しては1対の伝播波攪乱と定在波攪乱の非線形相互作用を支配する発展方程式を導く。このことは無限自由度を持つ力学系の方程式を通常の弱非線形安定性理論の常套手段である多重尺度展開により、少数自由度（具体的には1、2、3自由度）の力学系の方程式に帰着することに対応している。導出の方法は一般によく知られているのでここではその概略を述べるにとどめることとし、3つのうちで最も一般的な場合である1対の伝播波攪乱と定在波攪乱の非線形相互作用を支配する発展方程式を導出する方法について説明を行う。他の2つの振幅方程式はこの一般的な発展方程式の特別な場合となっている。

あるグラシヨフ数 G における攪乱の時間発展を調べるために臨界グラシヨフ数 G_c との逆数の差を $\epsilon = G_c^{-1} - G^{-1}$ と置き、 ϵ を用いて $\hat{\psi}$ と \hat{T} を次のように展開する。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{T} \end{pmatrix} &= \sum_{j=1}^3 [|\epsilon|^{1/2} \Psi_{j1} + |\epsilon|^{3/2} \Psi_{j3} + \dots] E_j + \text{c.c.} + \sum_{j=1}^3 [|\epsilon| \Psi_{j2} + \dots] E_j^2 + \text{c.c.} \\ &\quad + \sum_{j=1}^3 [|\epsilon| \Psi_{j0} + \dots] + \dots, \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、

$$E_1 = e^{i\alpha_1(z-c_1t)}, \quad E_2 = e^{i\alpha_2(z-c_2t)} = e^{i\alpha_1(z+c_1t)}, \quad E_3 = e^{i\alpha_3(z-c_3t)} = e^{i\alpha_3 z},$$

であり、c.c. は前項の複素共役を表す。 α_1 は伝播波攪乱の臨界波数であり、 α_3 定在波攪乱の臨界波数である。

次の多重時間スケールを導入し、

$$t_n \equiv \epsilon^n t, \quad (3.2)$$

時間微分 $\partial/\partial t$ を次式で置き換える。

$$\sum_{n=0} \epsilon^n \frac{\partial}{\partial t_n}.$$

以下の議論で式を簡潔に表現するため次の作用素を定義する。

$$\begin{aligned} S_{nj} &= \begin{pmatrix} S_{nj} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad S_{nj}^2 = \begin{pmatrix} S_{nj}^2 & -D \\ 0 & P^{-1} S_{nj} \end{pmatrix}, \\ \mathcal{L}_{nj} &= \begin{pmatrix} in\alpha_j W S_{nj} - in\alpha_j W'' & 0 \\ in\alpha_j & in\alpha_j W \end{pmatrix}, \quad S_{(P)}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P^{-1} S_{nj} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで、 $S_{nj} \equiv D^2 - n^2 \alpha_j^2$ である。

(3.1)、(3.2) 式を (2.6)、(2.7) 式に代入し、 $|\epsilon|^{1/2} E_j$ に比例する項を等しいと置くと、次の式を得る。

$$[i\alpha_j c_j \mathcal{S}_{1j} + \mathcal{L}_{1j} - G_0^{-1} \mathcal{S}_{1j}^2] \Psi_{j1} = 0, \quad (3.4)$$

ここで、 j は 1, 2, 3 を表す。また、 Ψ_{j1} を線形固有関数 $\Phi_{j1}(\mathbf{x})$ を用いて次のように置く。

$$\Psi_{j1} = A_j(t_1, t_2, \dots) \Phi_{j1}(\mathbf{x}).$$

次に、 $|\epsilon|^{3/2} E_j$ に比例する項を等しいと置くと次式を得る。

$$\begin{aligned} [i\alpha_j c_j \mathcal{S}_{1j} + \mathcal{L}_{1j} - G_0^{-1} \mathcal{S}_{1j}^2] \Psi_{j3} = & -\frac{\partial A_j}{\partial t_1} \mathcal{S}_{1j} \Phi_{j1} - A_j \mathcal{S}_{1j}^2 \Phi_{j1} \\ & + \sum_{k=1}^3 |A_k|^2 A_j \mathbf{n}_{-kkj}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

ここで、 \mathbf{n}_{-kkj} は非線形項を表す。その具体的な形についてはここでは省略する。(3.5) 式の左辺の作用素は (3.4) 式の左辺の作用素と完全に同じであり、しかも Ψ_{j1} と Ψ_{j3} に対する $\mathbf{x} = \pm 1$ における境界条件は同一であるため、 Ψ_{j3} が解を持つためには可解条件が必要である。 Ψ_{j3} に対する可解条件から振幅 A_j に対する次の発展方程式を得る。

$$\frac{\partial A_j}{\partial t_1} = \langle -\mathcal{S}_{1j}^2 \Phi_{j1} \rangle_j A_j + \sum_{k=1}^3 \langle \mathbf{n}_{-kkj} \rangle_j |A_k|^2 A_j, \quad (3.6)$$

ここで、 $\langle \rangle_j$ は任意の $\mathbf{Q}(\mathbf{x})$ に対して次式で定義されている。

$$\langle \mathbf{Q}(\mathbf{x}) \rangle_j \equiv \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_j \mathbf{Q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} / \int_{-1}^1 \tilde{\Phi}_j \mathcal{S}_{1j} \Phi_{j1} d\mathbf{x},$$

さらに、 $\tilde{\Phi}_j(\mathbf{x})$ は $\Phi_{j1}(\mathbf{x})$ の随伴固有関数であり、次式で定義される。

$$\begin{aligned} [i\alpha_j c_j \mathcal{S}_{1j} + \tilde{\mathcal{L}}_{1j} - G_0^{-1} \tilde{\mathcal{S}}_{1j}^2] \tilde{\Phi}_j = 0, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{nj} = \begin{pmatrix} ni\alpha_j (W S_{nj} + 2W' D) & ni\alpha_j \\ 0 & ni\alpha_j W \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathcal{S}}_{nj}^2 = \begin{pmatrix} S_{nj}^2 & 0 \\ D & P^{-1} S_{nj} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

この展開をさらに高次まで取ることは容易であるがこの論文では3次までとしておこう。4.4 節でプラントル数 P による解の分岐を調べるため P を $P^{-1} = P_c^{-1} - \epsilon \delta$ と置き、 δ による摂動を考える。ただし、ここでは $\delta \sim 1$ であるとする。 δ による摂動を考慮すると、(3.6) 式の線形項の係数

$$\langle -\mathcal{S}_{1j}^2 \Phi_{j1} \rangle_j$$

は次のように修正される。

$$\langle -\mathcal{S}_{1j}^2 \Phi_{j1} + \delta \mathcal{S}_{(P)}^2 \Phi_{j1} \rangle_j.$$

4.4節では ϵ と δ を分岐パラメータに選び、解の分岐を議論する。

4. 解の分岐

(3.6) 式を次のように書き表すことにする。

$$\frac{dA_j}{dt} = \lambda_j A_j + \sum_{k=m}^n \lambda_{-kkj} |A_k|^2 A_j, \quad (4.1)$$

ここで、 A_1 と A_2 は1対の伝播波攪乱の振幅であり、 A_3 は定在波攪乱の振幅である。 $P < P_c$ に対しては $j=3, m=3, n=3$ と置き、 $P \simeq P_c$ に対しては $j=1, 2, 3, m=1, n=3$ 、 $P > P_c$ に対しては $j=1, 2, m=1, n=2$ ととる。 $\lambda_j = \epsilon \langle -S_{1j}^2 \Phi_{j1} + \delta S_{(P)}^2 \Phi_{j1} \rangle_j$ および $\lambda_{-kkj} = \langle \mathbf{n}_{-kkj} \rangle_j$ である。 A_j は (3.6) 式での定義と $|\epsilon|^{1/2}$ だけ大きさが異なっていることに注意する必要がある。

4.1. ランダウ方程式 — $P < P_c$ —

$P < P_c$ に対しては定在波とその高調波のみが卓越し、発展方程式 (4.1) は次のランダウ方程式に帰着される。

$$\frac{dA_3}{dt} = \lambda_3 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3. \quad (4.2)$$

固有関数をチェビシェフ多項式で展開し、コロケーション法を用いて方程式 (4.2) の係数 λ_3 と λ_{-333} の評価を行った。

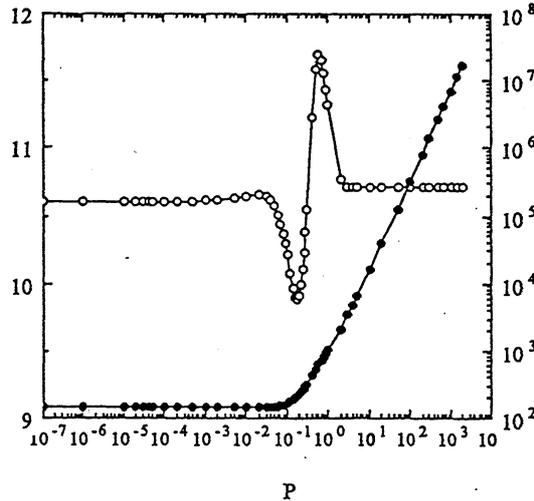


図8. 臨界点での定在波攪乱に対するランダウ方程式の係数. —○—: λ_3/ϵ , —●—: $-\lambda_{-333}$.

$10^{-7} \leq P \leq 10^3$ に対する計算結果を図8に示す。 λ_3 と λ_{-333} の $P \rightarrow 0$ における漸近形は $\lambda_3/\epsilon \rightarrow 10.6064$ および $\lambda_{-333} \rightarrow -145.058$ のように得られた。また、 $P \rightarrow \infty$ にお

ける漸近形は $\lambda_3/\epsilon \rightarrow 10.709$ および $\lambda_{-333} \rightarrow -720.0P^{1.325}$ と得られる。臨界点近傍においてはここで取り扱ったプラントル数の全範囲にわたって超臨界（ピッチフォーク）分岐が起こることがわかった。この結果は Riley and Wynne (1988) の弱非線形安定性理論による結果および Nagata and Busse (1983), Mizushima and Saito (1987), Chait and Korpela (1989), Mizushima (1990) の結果とも良く合っている。方程式 (4.2) の平衡解は簡単に $|A_3|^2 = -\lambda_3/\lambda_{-333}$ で与えられる。

4.2. 連立ランダウ方程式 — $P > P_c$ —

$P > P_c$ においては 1 対の伝播波攪乱は平均流の変形を通してお互いに相互作用を行う。

各々の成分の時間発展を支配する方程式は (4.1) 式で $j = 1, 2, m = 1, n = 2$ と置くことにより、次のように得られる。

$$\begin{aligned}\frac{dA_1}{dt} &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111}|A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221}|A_2|^2 A_1, \\ \frac{dA_2}{dt} &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-112}|A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222}|A_2|^2 A_2.\end{aligned}\quad (4.3)$$

ここで、次の関係がある。

$$\lambda_2 = \lambda_1^*, \quad \lambda_{-112} = \lambda_{-221}^*, \quad \text{and} \quad \lambda_{-222} = \lambda_{-111}^*.$$

方程式 (4.3) の平衡解として可能な解の分類を行おう。そのため、 $A_j = a_j(t) e^{i\vartheta_j(t)}$ 、 $\Theta = \vartheta_1 + \vartheta_2$ と置く。ここで、 $j = 1$ または 2 である。これを方程式 (4.3) に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dt} &= c_1 a_1 + a_1(c_2 a_1^2 + c_3 a_2^2), \\ \frac{da_2}{dt} &= c_1 a_2 + a_2(c_3 a_1^2 + c_2 a_2^2), \\ \frac{d\Theta}{dt} &= c_4(a_1^2 - a_2^2).\end{aligned}\quad (4.4)$$

方程式 (4.4) に現れる係数はすべて実数である。この方程式の平衡解は $da_1/dt = da_2/dt = d\Theta/dt = 0$ と置くことにより、

$$a_1 = a_2 = -\frac{c_1}{c_2 + c_3}, \quad (4.5)$$

または

$$a_1 = 0, \quad a_2^2 = -c_1/c_2 \quad \text{or} \quad a_1^2 = -c_1/c_2, \quad a_2 = 0 \quad (4.6)$$

のように得られる。解 (4.5) は $\pm z$ 方向に伝播する 1 対の伝播波攪乱（今後この攪乱を TBD と呼ぶことにする）を表している。一方、解 (4.6) は $+z$ または $-z$ の 1 方向に伝わる伝播波攪乱（今後この攪乱を TUD と呼ぶ）を表している。TBD は流体層の中心点 $\mathbf{x} = 0$ に対して回転対称な空間構造を持っているが、TUD は空間対称性を持っていないことに注意して置こう。平衡解 (4.5) が安定である条件は容易に求められて、

$$|c_2| > |c_3| \quad \text{and} \quad c_2 < 0, \quad (4.7)$$

と書け、解 (4.6) が安定に存在する条件は

$$c_1 > 0 \text{ and } c_3/c_2 \geq 1, \quad (4.8)$$

と書き表せる。

方程式 (4.3) の係数もまた、チェビシェフ展開とコロケーション法を用いて具体的に計算を行った。 $12 \leq P \leq 10^8$ に対する計算結果を図 9 に示す。

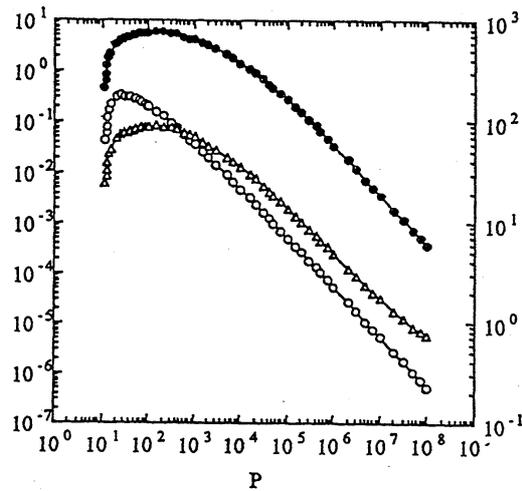


図 9. 臨界点での伝播波攪乱に対する連立ランダウ方程式の係数. —○—: λ_{1r}/ϵ , —●—: $-\lambda_{-111r}$, —△—: λ_{-221r} .

$\lambda's$	real part	imaginary part
λ_1	7.84072×10^{-2}	7.11462×10^{-1}
λ_{-111}	-2.91750×10^2	2.13535×10^2
λ_{-221}	3.28426×10^1	-1.87620×10^1
λ_{-331}	1.03879×10^3	2.42900×10^3
λ_2	7.84072×10^{-2}	-7.11462×10^{-1}
λ_{-112}	3.28426×10^1	1.87620×10^1
λ_{-222}	-2.91750×10^2	-2.13535×10^2
λ_{-332}	1.03879×10^3	-2.42900×10^3
λ_3	1.07117×10^1	0
λ_{-113}	4.88246×10^2	5.50537×10^2
λ_{-223}	4.88246×10^2	-5.50537×10^2
λ_{-333}	-2.09765×10^4	0

表 1. $P \simeq P_c$ に対する連立ランダウ方程式の係数.

λ_{-221r} の評価においてはプラントル数が大きくなるとチェビシェフ展開の収束性がしだいに遅くなる。図10にチェビシェフ展開の打ち切り項数 N を変えたときの λ_{-221r} の収束の様子を示す。

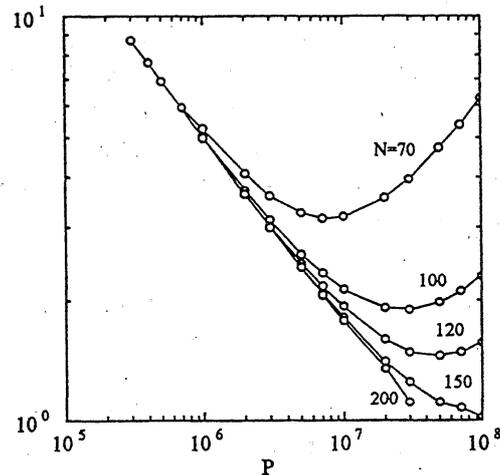


図10. 連立ランダウ方程式の係数 λ_{-221r} のチェビシェフ展開の収束性.

$P = 10^8$ のときには $N = 200$ に取ってもまだ λ_{-221r} の値を正確に評価できないことがわかる。しかし、この図から λ_{-221r} は $10^6 < P < 10^7$ で既に次の漸近形に乗っていることがわかる。

$$\begin{aligned} \lambda_{1r} &\sim 90.580P^{-1.0322}, & \lambda_{-111r} &\sim -58114P^{-0.49833}, \\ \lambda_{-221r} &\sim 1828.9P^{-0.42983} & & \text{as } P \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

図9と $P \rightarrow \infty$ の漸近形での λ_{-111r} の値から、 $P > P_c$ に対しては臨界状態付近では伝播波攪乱は決して亜臨界ホップ分岐を起こすことはないことがわかる。この結果は Riley and Wynne (1988) の結果と真っ向から反対する結果である。Riley and Wynne はグラシヨフ数 G を次のように展開し、

$$G = \sum_{m=0, n=0}^{\infty} \epsilon_{(RW)}^m \delta_{(RW)}^n G_{mn},$$

$P = 20$ に対して G_{mn} を評価した。彼らの計算結果は $G_{00} = 150.91$, $G_{01} = G_{10} = 0$, $G_{02} = 709.06$, $G_{20} = -40.94A_{(RW)}^2$ であった。ここで、 $\epsilon_{(RW)}$ は攪乱振幅のスケールであり、 $\delta_{(RW)}$ は壁における熱の完全伝導性からのズレを表す小さな量、 $A_{(RW)}$ は平衡振幅である。 G_{20} を表す式で $A_{(RW)}^2$ の係数が負であることは臨界点近傍で亜臨界ホップ分岐が起きていることを示している。次の節ではフーリエ打ち切りを用いて平衡解を数値計算で直接に求め、われわれの弱非線形安定性理論の結果が正しいことを証明する。

この小節の最後に平衡解の安定条件 (4.7) と (4.8) について検討を行っておこう。 $c_1 = \lambda_{1r}$, $c_2 = \lambda_{-111r}$, $c_3 = \lambda_{-221r}$ であるから、図9から安定条件 (4.7) は常に成り立つが

(4.8) は決して成り立たないことがわかる。すなわち、 $\pm z$ 方向に伝播する一対の伝播波は安定に存在するが、 $+z$ または $-z$ の 1 方向へ伝わる伝播波は不安定であることがわかった。

4.3. フーリエ打ち切り法 — $P > P_c$ —

弱非線形安定性理論はその適応範囲に限界がある。この小節では弱非線形安定性理論とはまったく別の方法であるフーリエ打ち切りの方法を用いて数値計算を行うことにより 4.2 で得られた結論を確かめる。すなわち、 z 方向にフーリエ展開を行い、 x 方向にはチェビシェフ多項式展開をおこなう。コロケーション法を用いて得られる平衡解を表す係数に対する代数方程式をニュートン・ラフソンの方法で数値的にとぎ、平衡解を直接に求める。まず、攪乱を次のようにフーリエ展開する。

$$\begin{pmatrix} \hat{\psi} \\ \hat{T} \end{pmatrix} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_{1n} \\ \theta_{1n} \end{pmatrix} e^{in\alpha_1(z-ct)} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} \phi_{2n} \\ \theta_{2n} \end{pmatrix} e^{in\alpha_1(z+ct)}. \quad (4.9)$$

(4.9) 式の展開を $n = -N$ から N で打ち切る。非線形平衡解を直接に求めることを考えると、 $+z$ または $-z$ 方向の 1 方向に伝わる TUD の第 n フーリエ係数に対する方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} [in\alpha(W-c)S_n - in\alpha W'' - G^{-1}S_n^2] \phi_{1n} + G^{-1}D\theta_n &= N_{1n}, \\ [in\alpha(W-c) - (PG)^{-1}S_n] \theta_n + in\alpha\phi_n &= N_{2n}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

ここで、 $S_n \equiv D^2 - n^2\alpha^2$ であり、 N_{1n}, N_{2n} は次のように表される。

$$\begin{aligned} N_{1n} &= - \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_{1p}S_qD\phi_{1q} - qD\phi_{1p}S_q\phi_{1q}], \\ N_{2n} &= - \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_{1p}D\theta_{1q} - qD\phi_{1p}\theta_{1q}]. \end{aligned} \quad (4.11)$$

$\pm z$ 方向に伝播する 1 対の伝播波、すなわち TBD に対しては、 $\phi_{2n}(x) = \phi_{1n}^*(x)$ および $\theta_{2n}(x) = -\theta_{1n}^*(x)$ の関係が成り立つ。TBD に対しても方程式 (4.10) の形は変わらないが、(4.11) 式は次のように反対方向に伝わる波の影響が平均流を通して及ぶことになる。

$$\begin{aligned} N_{1n} &= - \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_{1p}S_qD\phi_{1q} - qD\phi_{1p}S_q\phi_{1q}] \\ &\quad - \delta_{0n} \sum_{p+q=0} i\alpha [p\phi_{2p}S_qD\phi_{2q} - qD\phi_{2p}S_q\phi_{2q}], \\ N_{2n} &= - \sum_{p+q=n} i\alpha [p\phi_{1p}D\theta_{1q} - qD\phi_{1p}\theta_{1q}] \\ &\quad - \delta_{0n} \sum_{p+q=0} i\alpha [p\phi_{2p}D\theta_{2q} - qD\phi_{2p}\theta_{2q}]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

さらに、すべてのフーリエ係数を (2.13) と同様、チェビシェフ多項式で展開する。

図 11 と 12 に $P = 20$ のときの TBD と TUD に対する弱非線形安定性理論の結果とフーリエ打ち切り法による結果の比較を示す。これらの図から 4.2 節で得た結論、すなわち、伝播波は超臨界ホップ分岐を行うということが明かである。

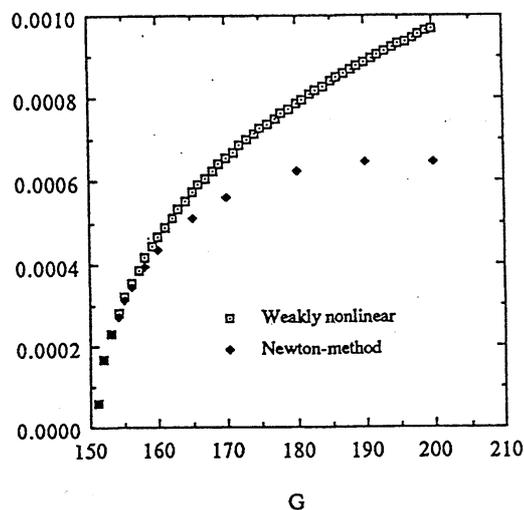


図 11. 1 対の伝播波攪乱 (TBD) の平衡振幅の弱非線形安定性理論の結果とフーリエ打ち切り法との比較. $P = 20$, $\alpha = 0.821082$.

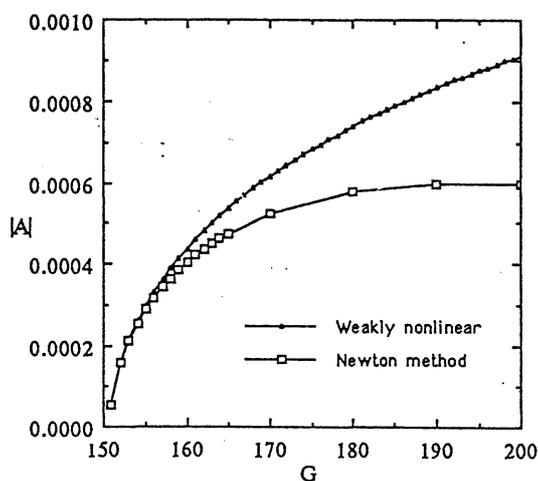


図 12. 1 対の伝播波攪乱 (TUD) の平衡振幅の弱非線形安定性理論の結果とフーリエ打ち切り法との比較. $P = 20$, $\alpha = 0.821082$.

図 13 にフーリエ打ち切り法から得られた $G = 200$ 、 $P = 20$ での平衡振幅の分布を図示しておく。この図からわかるように $P = 20$ においては、 $P < P_c$ の場合に Mizushima and Saito (1987) によって見いだされ、Fujimura and Mizushima (1987) によって説明され

たような平衡振幅曲線のオーバーハングは見られない。

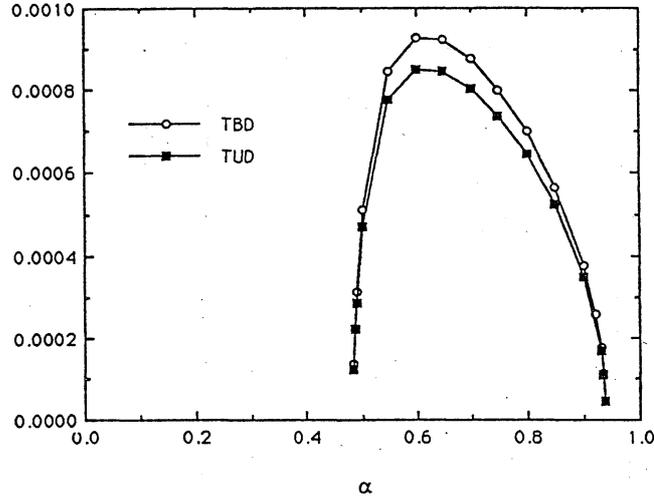


図 13. フーリエ打ち切り法による平衡振幅. $P = 20, G = 200$.

結論として、 $P > P_c$ に対しては鉛直平板間の自然対流においては亜臨界ホップ分岐は起こらないことがわかった。この結論は **Riley and Wynne (1988)** の結果とは相反する結果である。

4.4. 連立ランダウ方程式 — $P \simeq P_c$ —

1 対の伝播波攪乱と定在波攪乱が非線形相互作用をするときには、3 つの振幅に対する連立方程式

$$\begin{aligned}
 \frac{dA_1}{dt} &= \lambda_1 A_1 + \lambda_{-111} |A_1|^2 A_1 + \lambda_{-221} |A_2|^2 A_1 + \lambda_{-331} |A_3|^2 A_1, \\
 \frac{dA_2}{dt} &= \lambda_2 A_2 + \lambda_{-112} |A_1|^2 A_2 + \lambda_{-222} |A_2|^2 A_2 + \lambda_{-332} |A_3|^2 A_2, \\
 \frac{dA_3}{dt} &= \lambda_3 A_3 + \lambda_{-113} |A_1|^2 A_3 + \lambda_{-223} |A_2|^2 A_3 + \lambda_{-333} |A_3|^2 A_3.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

が得られる。(4.13) 式においては係数の間に次の関係式が成り立つ。

$$\begin{aligned}
 \lambda_2 &= \lambda_1^*, & \lambda_{-221} &= \lambda_{-111}^*, & \lambda_{-112} &= \lambda_{-221}^*, \\
 \lambda_{-223} &= \lambda_{-113}^*, & \lambda_{-332} &= \lambda_{-331}^*, & \lambda_{3i} &= \lambda_{-333i} = 0,
 \end{aligned}$$

ここで、添字 i は虚数部を表す。

$j = 1, 2, 3$ に対して $A_j = a_j(t) e^{i\vartheta_j(t)}$ とおき、 $\Theta = \vartheta_3 - \vartheta_1 - \vartheta_2$ とおくと、方程式 (4.13) は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned}\frac{da_1}{dt} &= a_1(c_1 + c_3 a_1^2 + c_4 a_2^2 + c_5 a_3^2), \\ \frac{da_2}{dt} &= a_2(c_1 + c_4 a_1^2 + c_3 a_2^2 + c_5 a_3^2), \\ \frac{da_3}{dt} &= a_3(c_2 + c_6 a_1^2 + c_6 a_2^2 + c_7 a_3^2), \\ \frac{d\Theta}{dt} &= c_8(a_1^2 - a_2^2).\end{aligned}\quad (4.14)$$

(4.14) 式の左辺をゼロと置き、定常解をすべて求めると次のように分類できる。

a) 混合モード解 (M)

$$a_1^2 = a_2^2 = \frac{-c_1 c_7 + c_2 c_5}{c_7(c_3 + c_4) - 2c_5 c_6}, \quad a_3^2 = \frac{-c_1 c_6 + (c_3 + c_4)c_2}{2c_5 c_6 - (c_3 + c_4)c_7}. \quad (4.15)$$

解 (4.15) の安定性は (4.14) 式のヤコビアン行列に対する次の固有値関係式に (4.15) を代入することにより決定される。

$$\begin{aligned}(\sigma - 2c_3 a_1^2)^2 (\sigma - 2c_7 a_3^2) - 4c_4^2 a_1^4 (\sigma - 2c_7 a_3^2) - 8c_5 c_6 a_1^2 a_3^2 (\sigma - 2c_3 a_1^2) \\ + 16c_4 c_5 c_6 a_1^4 a_3^2 = 0, \quad \sigma < 0.\end{aligned}\quad (4.16)$$

(4.16) 式から安定条件の具体的な形を書くのは複雑になりすぎるので、この式を数値的に解くこととした。

b) TBD

$$a_1 = a_2 \neq 0, \quad a_3 = 0. \quad (4.17)$$

この解は (4.5) と同じであるが、定在波攪乱の影響で安定条件が (4.7) とは異なり、次のようになる。

$$c_2 - \frac{2c_1 c_6}{c_3 + c_4} < 0 \quad \text{and} \quad \frac{c_3 - c_4}{c_3 + c_4} > 0. \quad (4.18)$$

c) 純粋定在波モード (PS)

$$a_1 = a_2 = 0, \quad a_3^2 = -c_2/c_7. \quad (4.19)$$

解 (4.19) の安定条件は次式で与えられる。

$$c_2 > 0, \quad c_1 < c_5 c_2 / c_7. \quad (4.20)$$

d) TUD

$$a_1 \neq 0, \quad a_2 = a_3 = 0 \quad \text{or} \quad a_2 \neq 0, \quad a_1 = a_3 = 0. \quad (4.21)$$

この解は (4.6) と同じであるが、安定条件は次式で与えられる。

$$c_1 > 0, \quad c_4/c_3 > 1, \quad c_2 < c_1 c_6 / c_3. \tag{4.22}$$

e) 非対称混合解 (MUD)

$$a_1^2 = \frac{c_2 c_5 - c_1 c_7}{c_3 c_7 - c_5 c_6}, \quad a_2 = 0, \quad a_3^2 = \frac{c_2 c_3 - c_1 c_6}{c_5 c_6 - c_3 c_7},$$

$$\text{or } a_1 = 0, \quad a_2 \neq 0, \quad a_3 \neq 0. \tag{4.23}$$

これらの解の安定条件は次式で与えられる。

$$[\sigma - (c_1 + c_4 a_1^2 + c_5 a_3^2)][\sigma^2 - 2(c_3 a_1^2 + c_7 a_3^2)\sigma + 4c_3 c_7 a_1^2 a_3^2 - 4c_5 c_6 a_1^2 a_3^2] = 0,$$

$$\sigma < 0. \tag{4.24}$$

(4.24) の第1式の左辺第1項から $\sigma = (c_4 - c_3)a_1^2$ となる。表1の数値を代入すると $c_4 - c_3 = \lambda_{-221r} - \lambda_{-111r} > 0$ となり、解 (4.23) は不安定であることがわかる。

$P \simeq P_c$ のときの、可能な全ての定常解とその線形安定性を $\epsilon - \delta$ 平面上で調べ図14に示した。

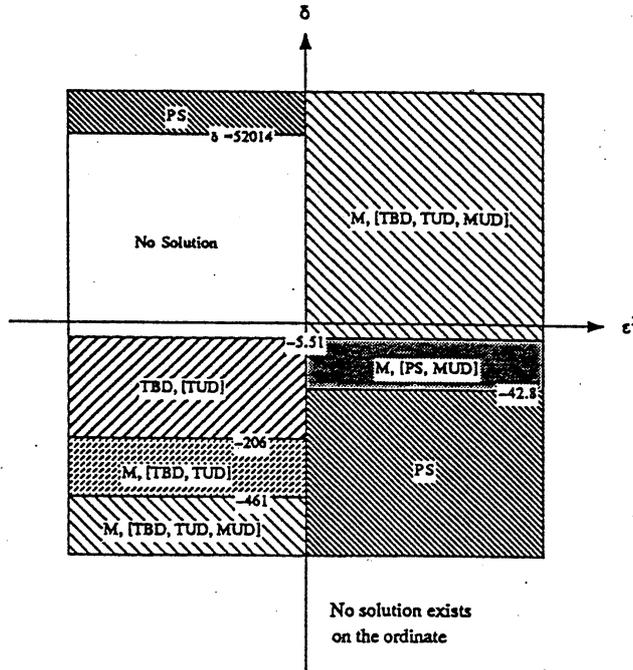


図14. 定常解の分類とその安定性. 括弧で囲ってあるモードは不安定、囲っていないモードは安定な解を表す。

括弧をつけてないで書かれているモードは安定な解であり、括弧をつけて書かれているモードは不安定な解である。 P の値を固定し、 ϵ を変化させることは $\epsilon\delta = const.$ の曲線に沿って調べることと同等である。 ϵ の値を一定に保ったときの分岐のダイアグラムを図15と図16に示す。

空間的な対称性を持つ攪乱 (TBD または M) の振幅は対称性を持たない攪乱 (TUD または MUD) よりも大きいというわれわれの推測が正しいことがこれらの図からわかるだろう。もっと具体的に言えば、(4.15) 式の a_1 または a_2 は (4.23) 式のそれらの値よりも大きい。同様のことが (4.17) 式と (4.19) 式についても成り立っている。これは平均流の変形を通して、一つのモードが他のモードから励起されることを示している。Gotoh and Mizushima は定在波と伝播波の 1 成分との非線形相互作用を調べた。彼らは PS : (4.19), TUD : (4.21), MUD : (4.23) の 3 つの解を求めた。図 14 からわかるように PS はあるパラメータ領域で安定でありうるが、TUD と MUD はそれらの解が存在する全領域で不安定である。

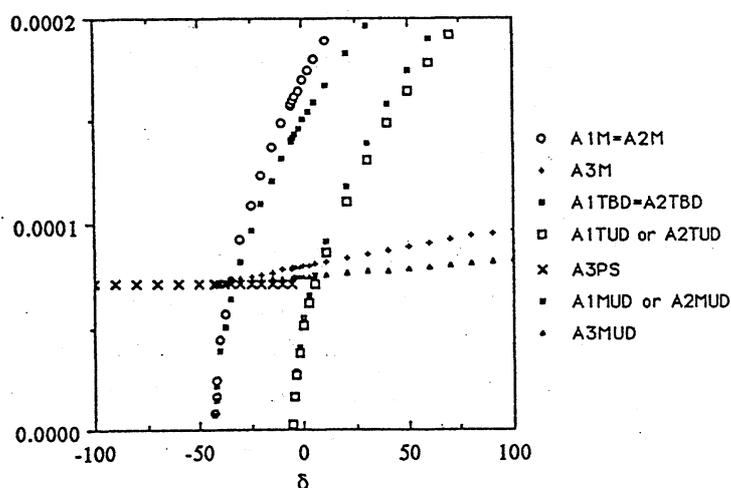


図 15. $\epsilon = 10^{-5}$ のときの可能な定常解.

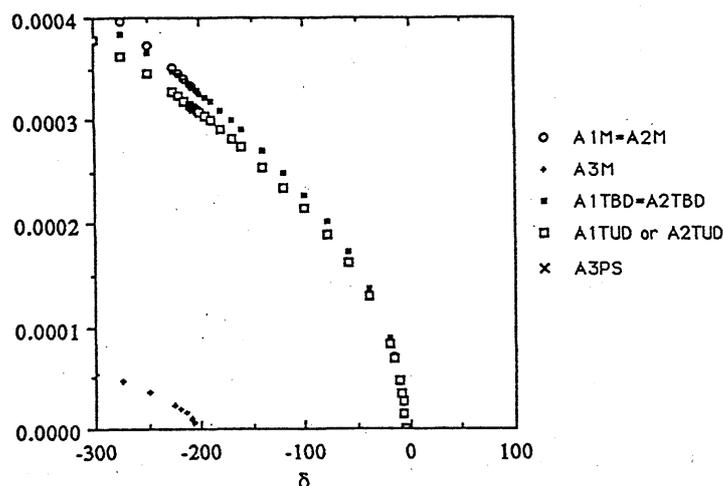


図 16. $\epsilon = -10^{-5}$ のときの可能な定常解.

5. 結論

鉛直流体層での自然対流の線形安定性および臨界点近傍での弱非線形安定性をプラントル数の広い範囲にわたって調べた。線形臨界条件を詳しく調べ、 $P \rightarrow 0$ と $P \rightarrow \infty$ の両極限での臨界条件の漸近形を求めた。 $P > P_c$ の場合については結果的に Gill and Kirkham の漸近形と同じ漸近形を求めた。弱非線形安定性も同様に詳しく調べ、 $P < P_c$ の場合にはランダウ方程式を導き、他の場合については連立ランダウ方程式を導いた。得られた方程式の係数を数値計算により求め、可能な全ての定常解を求めその安定性を調べた。その結果、Riley and Wynne の予測したような亜臨界ホップ分岐は決して起こらず、伝播波攪乱による解の分岐は超臨界ホップとなることがわかった。弱非線形安定性理論により得られた結果はフーリエ打ち切り法による平衡解の直接数値計算により正しいことが確かめられた。 $P \simeq P_c$ に対しては3モード相互作用を調べた。その結果、空間的な対称性 (x 軸の中心を中心とする回転対称性) を持つ攪乱は安定であり、対称性を持たない攪乱は不安定であることがわかった。

参考文献

- [1] G.Z. Gershuni : *Zh. Tech. Fiz.* **23** (1953) pp.1838-1844
- [2] R.N. Rudakov : *Prikl. Mat. Mekh.* **31** (1967) pp.349- 355
- [3] C.M. Vest and V.S. Arpaci : *J. Fluid Mech.* **36** (1969) pp.1-15
- [4] A.E. Gill and C.C. Kirkham : *J. Fluid Mech.* **42** (1970) pp.125-127
- [5] S.A. Korpela, D. Gözüüm and C.B. Baxi : *Int. J. Heat Mass Transfer* **16** (1973) pp.1683-1690
- [6] J. Mizushima and K. Gotoh : *J. Fluid Mech.* **73** (1976) pp.65-75
- [7] R.F. Bergholz : *J. Fluid Mech.* **84** (1978) pp.743-768
- [8] P.G. Daniels : *Proc. R. Soc. Lond.* **A401** (1985) pp.145- 161
- [9] P.G. Daniels : *J. Fluid Mech.* **176** (1987) pp.419-441
- [10] P.G. Daniels : *J. Fluid Mech.* **203** (1989) pp.525-540
- [11] K. Fujimura : *JAERI-M 90-057* (1990)
- [12] J. Mizushima and K. Gotoh : *J. Phys. Soc. Jpn.* **52** (1983) pp.1206-1214
- [13] K. Gotoh and J. Mizushima : in *Proc. IUTAM Symp. Turbulence and Chaotic Phenomena in Fluids* (ed. by T. Tatsumi) (North-Holland, 1984) pp.47-52
- [14] M. Nagata and F.H. Busse : *J. Fluid Mech.* **135** (1983) pp.1-26
- [15] A. Chait and S.A. Korpela : *J. Fluid Mech.* **200** (1989) pp.189-216
- [16] J. Mizushima and Y. Saito : *Fluid Dynamics Research* **2** (1987) pp.183-191
- [17] K. Fujimura and J. Mizushima : in *Nonlinear Wave Interactions in Fluids* (ed. by R.W. Miksad, T.R. Akylas and T. Herbert) (AMD- vol.87, ASME, 1987) pp.123-130
- [18] K. Fujimura and J. Mizushima : *Phys. Fluids* **31** (1988) pp.2398-2400
- [19] D.S. Riley and M.C. Wynne : *Proc. R. Soc. Lond.* **A420** (1988) pp.419-443
- [20] J. Mizushima : *Fluid Dynamics Research* **5** (1990) pp.289-299