

## 粘性 Poiseuille 流における過剰反射について

原研 藤村 薫 (Kaoru Fujimura)

1. はじめに

2次元定常平行流に対する流れの線形安定性理論において  
は, normal mode  $\phi(z)e^{i\alpha(x-ct)}$  の仮定の下に線形擾乱方程式が Orr-Sommerfeld 方程式

$$[i\alpha(U-c)S - i\alpha U'' - Re^{-1}S^2]\phi = 0, \quad S \equiv d^2/dz^2 - \alpha^2,$$

に帰着され, その mode に対する流れの安定性は固有値  
 $c = c(\alpha, Re)$  の虚部の符号によつて判別される。ここで  $Re$   
は Reynolds 数である。その結果, slightly supercritical  
state においては, 単1固有値  $c$  に対応する固有関数  $\phi(z)$   
と波数  $\alpha$  が長時間後の擾乱の空間構造を決定する。しかし  
その際,  $\phi(z)$  は  $t$  および  $x$  から変数分離されているので,  
擾乱の増幅機構を物理的に説明することは極めて困難である。

ところで, Orr-Sommerfeld 方程式の  $Re \gg 1$  での漸近的性質としてよく知られているように, 流路中央付近における

$\phi(z)$  の振舞いは振動的であるので,  $Re \gg 1$  における  $\phi(z)$  は壁に向けて入射する波動と, 壁から反射されて来る波動との和の形で, 局所的に表現することが出来る。本稿では, この漸近的性質に基づいて Lindzen と Rambaldi [1] により行われた増幅機構の解釈 - 擾乱は臨界層における  $O_{\mu}$  の増幅機構が有効に作用して過剰反射された結果線形不安定となる - を紹介する。

## 2. 2次元擾乱に対する定式化と WKB 解

平面 Poiseuille 流  $u(z) = z(2-z)$  に加之された擾乱の消長を考えよう。流れ関数  $\psi = \psi(x, z; t)$  を用い通常のように線形擾乱方程式

$$\left(\partial/\partial t + u \partial/\partial x\right) \Delta \hat{\psi} - u'' \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial x} - Re^{-1} \Delta^2 \hat{\psi} = 0, \quad (2.1)$$

を導く。ここで,  $\hat{\psi}$  は擾乱成分を表わし, フライムは  $z$  についての微分を意味する。線形増幅段階を考えているので,

normal mode analysis を適用する:

$$\hat{\psi}(x, z; t) = \phi(z) e^{ik(x-ct)}. \quad (2.2)$$

さて,  $\varepsilon \equiv i/(kRe)$  を用いると,  $\phi(z)$  に対する  $O_{\mu}$ -Sommerfeld 方程式が

$$\varepsilon \frac{d^4 \phi}{dz^4} + [(u-c) - 2\varepsilon k^2] \frac{d^2 \phi}{dz^2} - [u'' + k^2(u-c) - \varepsilon k^4] \phi = 0, \quad (2.3)$$

の形で得られる。ここで単純に  $\varepsilon \rightarrow 0$  の極限 (非粘性極限) をとると Rayleigh 方程式

$$\frac{d^2\phi}{dz^2} - \left[ \frac{u''}{u-c} + k^2 \right] \phi = 0, \quad (2.4)$$

が得られるが、流路中央  $z=1$  では  $u=1$  となるので、

$$k^2(1-c) < 2, \quad (2.5)$$

が成り立つとき (2.4) は局所的に振動解をもつ。平面 Poiseuille 流の  $Re > Rec$  ( $Rec$  は臨界 Reynolds 数) における支配的な mode は大まかにいって  $c \approx 0.25$  なるので、 $k^2 < 2/0.75$  となる。従って、平面 Poiseuille 流の中立曲線形状 (Fig. 1) から判断して、 $\phi(z)$  は  $z \approx 1$  で振動的であるといえる。

これに対し粘性 ( $0 < \varepsilon \ll 1$ ) が付加されると、非粘性 mode (粘性による修正を受けると共に、更に新しい 2 つの粘性 mode が現われる。これら 4 mode を流路中央で区別し、反射係数を求め、結果の解釈を行うのが、以下の大まかな筋道である。

さて、 $z = Z/\delta$  によって座標を  $z$  から  $Z$  に変換する。(実は  $\delta \ll 1$  という状況を考えているので、この変換は  $z$ -座標を押し縮めることに相当する。) その結果 Orr-Sommerfeld 方程式 (2.3) は

$$\varepsilon \delta^4 \frac{d^4 \phi}{dz^4} + \delta^2 [B(z) - 2\varepsilon k^2] \frac{d^2 \phi}{dz^2} + [C(z) + \varepsilon k^4] \phi = 0, \quad (2.6)$$

と仮定する。  $T = T(z)$ ,  $B(z) \equiv u - c$ ,  $C(z) \equiv -u'' - k^2(u - c)$ .  $\varepsilon \ll 1$ ,  $\delta \ll 1$  かつ  $|B| \sim 1$ ,  $|C| \sim 1$  という状況を考えると, (2.6) の WKB 解が

$$\phi(z) = \exp[D(z)],$$

$$D(z) = \Delta^{-1} (E_0 + \Delta E_1 + \Delta^2 E_2 + \dots), \quad (2.7)$$

の形に求められる。(2.7) を (2.6) に代入すると, 結局 *Orn-Sommerfeld* 方程式の WKB 解として

$$\begin{aligned} \varepsilon \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^4 [ \dot{E}_0^4 + \Delta (4 \dot{E}_0^3 \dot{E}_1 + 6 \dot{E}_0^2 \ddot{E}_0) ] \\ + (B - 2\varepsilon k^2) \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 [ \dot{E}_0^2 + \Delta (2 \dot{E}_0 \dot{E}_1 + \ddot{E}_0) ] + (C + \varepsilon k^4) = 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

の解  $E_0, E_1, \dots$  を求めればよいことがわかる。

(2.8) 式における支配的項のみを書くと,

$$\varepsilon \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^4 \dot{E}_0^4 + B \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^2 \dot{E}_0^2 + C = 0, \quad (2.9)$$

と仮定する, この式から次の2種の balance が可能である:

$$\textcircled{1} \quad \Delta = \delta, \quad \textcircled{2} \quad |\varepsilon| \delta^2 = \Delta^2. \quad (2.10)$$

[  $\varepsilon \left(\frac{\delta}{\Delta}\right)^4 \sim 1$  の場合, (2.9) の2項のみ支配的と仮定して,

ここではこの場合は考えない。 ]

①  $\Delta = \delta$  の場合, (2.8) 式より

$$\dot{E}_0 = \pm i \left(\frac{C}{B}\right)^{1/2}, \quad \dot{E}_1 = -\frac{\ddot{E}_0}{2\dot{E}_0} - \varepsilon \frac{(C/B + k^2)^2}{2\Delta B \dot{E}_0}, \quad (2.11)$$

又は元に戻して,

$$\frac{d}{dz} D_{\pm}(z) = \pm i \left(\frac{C}{B}\right)^{1/2} + \frac{d}{dz} \ln \dot{E}_0^{-1/2} - \frac{(\pm k \operatorname{Re})^{-1} (C + k^2 B)^2}{2B^{5/2} C^{1/2}}. \quad (2.12)$$

(2.12) 式右辺第1項は位相変化, 第2項は屈折率変化による振幅の変化, 第3項は粘性散逸によるわずかな増幅もしくは減衰を表す。物理的には, 粘性散逸(下流(波の伝播方向)に振幅を減衰させる)で, (2.12) 式“-”記号として  $z \rightarrow 0$  で減衰する mode  $[F_1(z)]$ , “+”符号として  $z \rightarrow 2$  で減衰する mode  $[F_2(z)]$  を対応させる。

②  $|\varepsilon| \delta^2 = \Delta^2$  のとき同様に

$$\dot{E}_0 = \pm (iB)^{1/2}, \quad \dot{E}_1 = -\frac{5\ddot{E}_0}{2\dot{E}_0} + \varepsilon \frac{(C + 2k^2 B)}{2\Delta B \dot{E}_0}, \quad (2.13)$$

又は元に戻して,

$$\frac{d}{dz} D_{\pm}(z) = \pm (ik \operatorname{Re} B)^{1/2} + \frac{d}{dz} \ln \dot{E}_0^{-5/2} \pm (ik \operatorname{Re})^{-1/2} \frac{C + 2k^2 B}{(2B)^{3/2}}. \quad (2.14)$$

さて, (2.14) 式右辺第1項は強い指数関数的増幅もしくは減衰を示す。 $z \in [0, 1]$  では  $z=1$  から眺めるとき, “+”符号は入射波  $[F_3(z)]$ , “-”符号は反射波  $[F_4(z)]$  に対応する。

以上4つの波のうち, 非粘性入射波  $F_1(z)$  を入射させ, 非粘性, 粘性の反射波  $F_2(z)$ ,  $F_4(z)$  の大きさを評価する。その

結果、過剰反射が生じていけば擾乱は増幅されることになり。

Lindzen と Rambaldi はこの評価を、数値計算を用いて行、  
た。(2.6)式の数値積分は次のBCsの下に行われる:

$$z=0 \text{ で } \phi = d\phi/dz = 0,$$

$$z=1 \text{ で } \phi = IF_1(z) + RF_2(z) + I_v F_3(z) + R_v F_4(z),$$

$$I=1, \quad I_v=0. \quad (2.15)$$

### 3. 非粘性領域における群速度

非粘性領域における群速度は次のように定義される。まず

$$\hat{\psi}(x, z, t) = \varphi e^{i(kx + mz - \omega t)}, \quad (3.1)$$

と書くと、局所的な分散関係として

$$\omega = kU(z) - \frac{2k}{k^2 + m^2}, \quad (3.2)$$

が得られる。z-方向における群速度成分は従って

$$C_{zq} = \frac{\partial \omega}{\partial m} = \frac{4km}{(k^2 + m^2)}, \quad (3.3)$$

のように与えられる。ただし、

$$m^2 = -k^2 + \frac{2}{u-c}.$$

とくに、

$$u \rightarrow c \text{ のとき } C_{zq} \rightarrow 2^{1/2} k(u-c)^{3/2}, \quad (3.4)$$

となつたで、 $C_{zq}$  は臨界層に接近すると zero に tend する。

(3.3)式は次節 4.2 で用いられる。

また、境界層厚さとして次の2つが定義される。

① 壁面境界層：

$$\frac{d^4\phi}{dz^4} \sim ikRe(u-c) \frac{d^2\phi}{dz^2},$$

から

$$\delta_w = (kcRe)^{-1/2}. \quad (3.5)$$

② 臨界層：

$$\frac{d^4\phi}{dz^4} \sim ikRe u'' \phi \quad \text{at } z=z_c, \quad (\text{とくに臨界level } \tau)$$

から

$$\delta_c = |kRe u''|^{-1/4}. \quad (3.6)$$

[通常は臨界層は薄くて

$$\frac{d^4\phi}{dz^4} \sim ikRe \frac{dU_c}{dz} (z-z_c) \frac{d^2\phi}{dz^2},$$

から

$$\delta_c = (ikRe U_c')^{-1/3}. \quad (3.7)$$

が導かれるが、Lindzen と Rambaldi の  $\delta_c$  ( $Re \gg 1$ ) において通常の  $\delta_c$  よりもかなり厚い。]

#### 4. 計算結果の解釈

ここで  $\alpha=1$ ,  $Re=10^4$  に対して得られた  $T$ : Lindzen と

Rambaldi の結果を要約する。まず、参考のため、 $\alpha=1$ ,  $Re=10^4$  に対する固有値, 固有関数, さらには Reynolds stress の分布を Figs. 2-4 に示した。[2]

この  $(\alpha, Re)=(1, 10^4)$  に対する反射係数  $R$  の絶対値と位相を, 位相速度  $c_r$  を変化させて描いたものが Fig. 5 である。 $c_r=0.237$  付近でのみ  $|R| \geq 1$  が得られており, 過剰反射はこの  $c_r=0.237$  を中心とした狭い位相速度の範囲に対してのみ生ずることになる。また, 大きさ  $12^\circ$  について, この  $c_r$  に対して位相は zero を横切る。

さて,  $u'' \partial_x \phi$ ,  $(\partial_t + u \partial_x) \Delta \phi$ , 及び  $u'' Re^{-1} \Delta^2 \phi$  を各々  $T_1, T_2, T_3$  として,  $c_r=0.1, 0.2375, 0.4, 0.8$  について示したものが Figs. 6-9 である。  $T_1 \sim T_2$  [ $u'' \partial_x \phi \sim (\partial_t + u \partial_x) \Delta \phi$ ] とする領域が非粘性領域,  $T_1 \sim T_3$  [ $u'' \partial_x \phi \sim Re^{-1} \Delta^2 \phi$ ] とする領域が臨界層 (当然のことから粘性臨界層),  $T_2 \sim T_3$  [ $(\partial_t + u \partial_x) \Delta \phi \sim Re^{-1} \Delta^2 \phi$ ] が壁面境界層に対応する。従ってこれら  $T_1, T_2, T_3$  の釣り合いから, これら3者の場所から  $u$  に厚さを推定できる。その結果,  $c_r=0.1$  のとき臨界層は壁面境界層に完全に埋め込まれていること,  $0.2375$  のとき臨界層と壁境界層は若干重なり合っていること,  $0.4$  と  $0.8$  ではこれらが大きく離れていることわかる。従って, 擾乱の増幅 (過剰反射が生ずるため) には, 臨界層と壁面境界層

とが接している, もしくはわずかに重なり合っていることが必要であるといえる。

#### 4.1. $Om$ の増幅機構と Reynolds stress

以下の議論のため, ここに  $Om$  の増幅機構と Reynolds stress について補足しておく。

まず, 臨界層近傍の等渦度線が初期時刻において主流のせん断方向とは逆向きに傾いた平面波成分をもつとしよう。するとせん断力は等渦度線をせん断方向に回転させるように作用し, 最終的には等渦度線がせん断方向に傾く。さて, 等渦度線は垂直(主流方向に対して)に作るまでの間, 最大渦度の中心は次第に大きく離れてゆく。渦度は保存されなければならぬので, 結局攪乱の energy が増大することになる。しかしそれ以後再び渦度最大の点同士接近してゆくので, energy は最終的には減衰する。この一時的な増幅機構が  $Om$  の増幅機構であるが, 詳細は [3, 4] を参照されたい。

次に, Reynolds stress は乱流理論において大変よく用いられる量であるが, 攪乱の運動 energy を空間内で

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) dx dy \\ &= \iint (-u'v') \frac{d\alpha}{dy} dx dy - Re^{-1} \iint \left( \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.1) \end{aligned}$$

のように積分する際現われ,

$$\tau = -\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} u'v'dx, \quad (4.2)$$

のように定義される。今

$$\hat{\psi} = \frac{1}{2} [\phi e^{i\alpha(x-ct)} + \text{c.c.}],$$

とすると,

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{4} i\alpha (\phi\phi''^* - \phi''\phi^*) e^{2\alpha c_i t}, \quad (4.3)$$

と書けるので,  $Re \rightarrow \infty$  の極限では

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{1}{2} \alpha c_i \frac{u''}{|u-c|^2} |\phi|^2 e^{2\alpha c_i t}, \quad (4.4)$$

となるが, 擾乱が増幅, すなわち  $c_i > 0$  のためには  $u'' < 0$  であることが必要

$$d\tau/dy < 0, \quad (4.5)$$

が必要十分条件となる。ただし, 添字  $i$  は虚部を示し, c.c. はその直前の項の複素共役を意味する。

#### 4.2. Further discussions

以上の2つの道具を用いて Figs. 10-13 を眺めよう。これは図1は入射波+反射波の絶対値と位相,  $\frac{d\tau}{dy}$  と  $c_r = 0.1, 0.2375, 0.4, 0.8$  の場合について対してプロットしてある。

まず, Fig. 10 では,  $z_c = 0.0513$  にある臨界層は壁面境界

層に埋め込まれているが、壁面境界層で吸収されてしまうため過剰反射は起らない。(phase tilt は Orr 機構が起ることを示しているが、壁での吸収が強すぎるために増幅機構は実質的には作用できない。)

Fig. 11 の場合には、phase tilt が臨界層での Orr 機構に肯定的にマッパしている。その結果、Reynolds stress の convergence ( $\frac{dT}{dy} > 0$  の部分) が divergence ( $\frac{dT}{dy} < 0$  の部分) を下まわっており、効率よく波の増幅が行われる。

Figs. 12 と 13 では phase tilt が Orr 機構が作用しない方向を臨界層内にとっており、その結果、臨界層内で波の吸収が生じる。

最後に、以上のようにして得られた定量的ならびに定性的結果が、従来の固有値問題の解とどのように関連付けられるのかを明らかにするため、

$$\exp[\alpha c_i T] = R, \quad (4.6)$$

によって定義される travel time  $T$  を評価する。 $\alpha = 1, Re = 10^4$  での線形増幅率  $\alpha c_i (= 0.0037)$  と反射係数  $R (= 1.042)$  から、travel time  $T$  が直ちに  $T = 11.12$  と勘定できる。ところで、 $z = 2$  から  $z = 1$  で energy が移動するに要する travel time は

$$T(z) = 2 \int_1^z (Cz g)^{-1} dz, \quad (4.7)$$

で定義できる。(4.7) を用いれば  $T=11.12$  という時間内に波かどの位置まで入射した後反射したのかを明らかにできるだろう。結果は, Fig. 14 に示されているように,  $T=11.12/2 = 5.56$  に対応する  $z=0.140$  の位置まで波の energy が運ばれたことにはなるが,  $c_r=0.2375$  に対する臨界レベルは  $z_c=0.127$  であるから臨界レベルより  $0.013$  だけ流路中央側まで到達していることがわかる。この場合の臨界層厚さは  $\delta_c=0.08$  であるので, 臨界層の中にまで入射した後, 臨界層内での  $O_{22}$  増幅機構によって過剰反射されたことが明らかになった。

## 5. おわりに

以上, Lindzen と Rambaldi の論文内容を紹介したが, 平面 Poiseuille 流における擾乱増幅の機構は臨界層内での  $O_{22}$  の増幅機構による過剰反射によって説明されることが示された。この論文で得られた事項は,  $z$ -方向のみで常微分方程式 ( $O_{22}$ -Sommerfeld 方程式) を解くことにより行われたが, 元々の線形擾乱方程式 (2.1) を初期値問題として扱えば, 過剰反射を含んだ増幅機構の描像がより明確になると予想される。

最後に, 本紹介にあたり, 有益な議論を頂いた水島二郎博士に感謝致します。

References

- [1] R.S. Lindzen & S. Rambaldi : J.Fluid Mech. 165 (1986) 355
- [2] P.G. Drazin & W.H. Reid : Hydrodynamic Stability (Cambridge, 1981)
- [3] J.P. Boyd : J.Atmos.Sci. 40 (1983) 2304
- [4] R.S. Lindzen & J.W. Barker : J.Fluid Mech. 151 (1985) 189

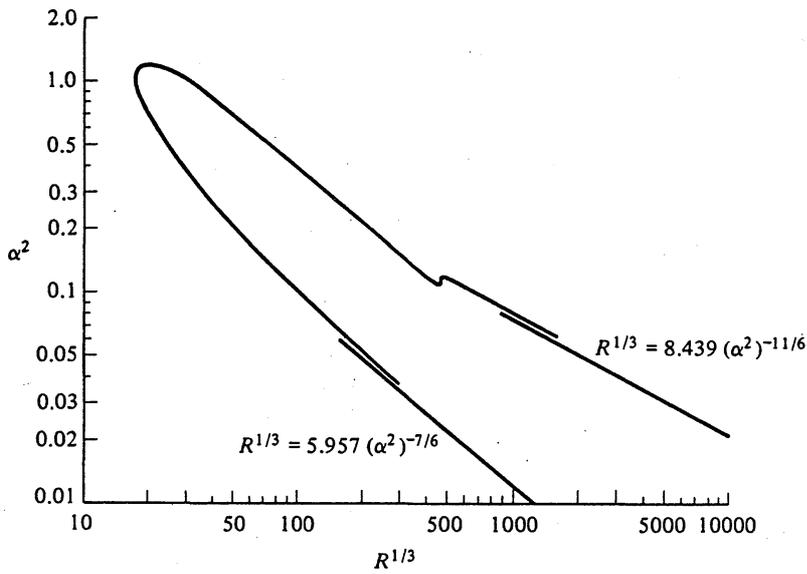


Fig. 1  
 平面 Poiseuille 流  
 に対する線形中立  
 安定曲線 [2]

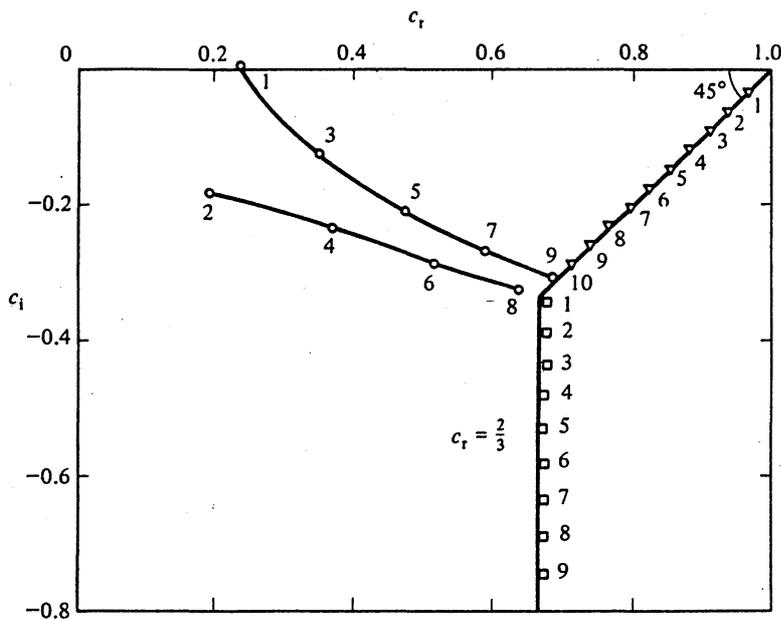


Fig. 2  
 平面 Poiseuille 流  
 の  $\alpha=1, Re=10^4$  に  
 おける固有値分布  
 [2]

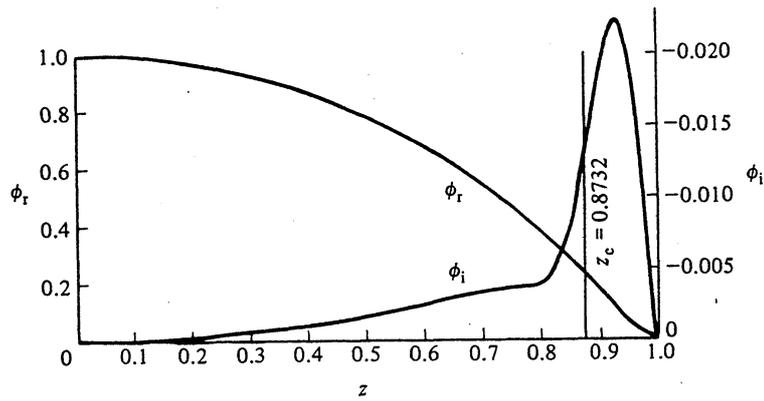


Fig. 3 平面 Poiseuille 流の  $\alpha=1, Re=10^4$  の固有関数分布,  $z \in [-1, 1]$  [2]

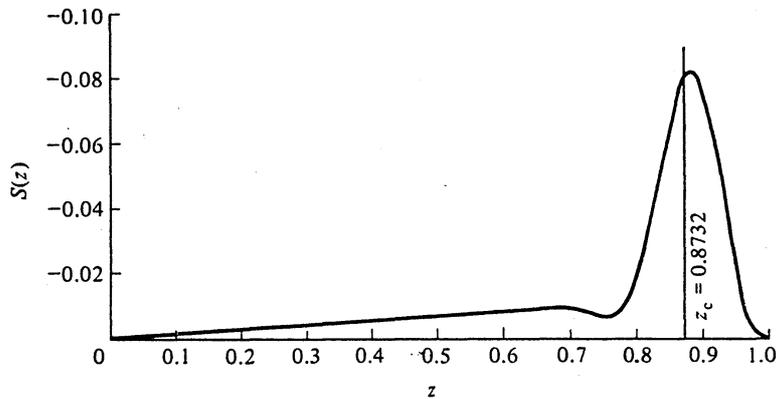


Fig. 4 平面 Poiseuille 流の  $\alpha=1, Re=10^4$  の Reynolds stress  $S(z) = \phi_r \phi_i' - \phi_i \phi_r'$ ,  $z \in [-1, 1]$  [2]

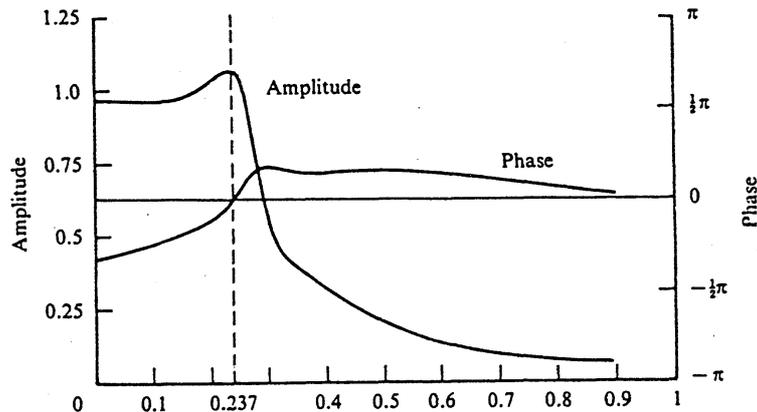


Fig. 5 反射係数  $R$  の位相速度依存性,  $k=1, Re=10^4$ , 横軸:  $Cr$

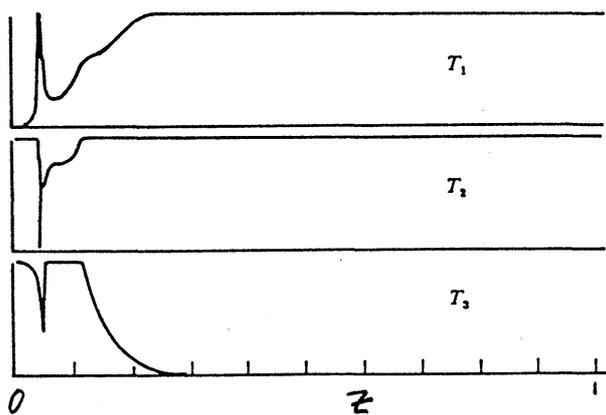


Fig. 6  $T_1 \equiv u'' \partial_x \phi$ ,  
 $T_2 \equiv (\partial_t + u \partial_x) \Delta \phi$ ,  $T_3 \equiv$   
 $Re^{-1} \Delta^2 \phi$  の絶対値の相対  
 関係.  $\max_z |T_j| = 1$  に規格  
 化.  $k=1, Re=10^4, Cr=0.1$

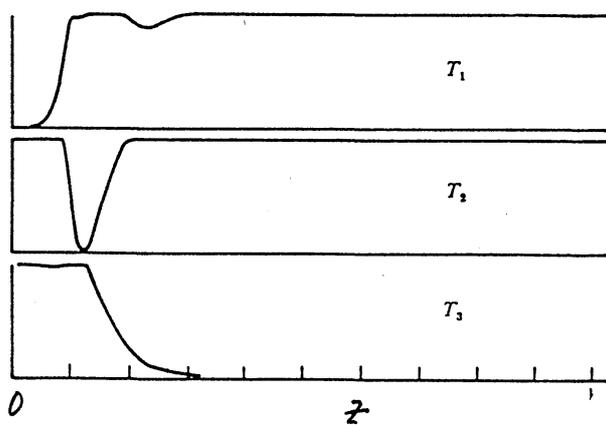


Fig. 7  $Cr=0.2375$

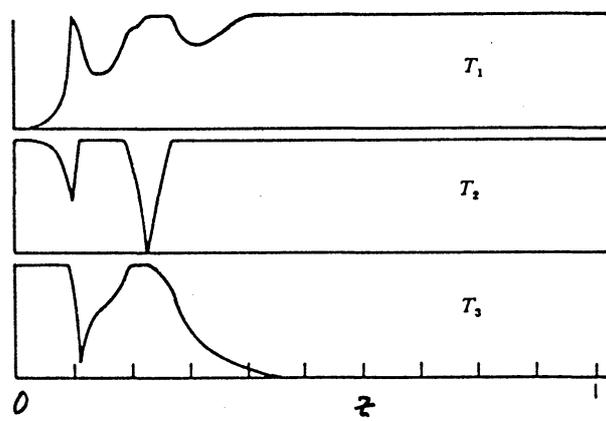


Fig. 8  $Cr=0.4$

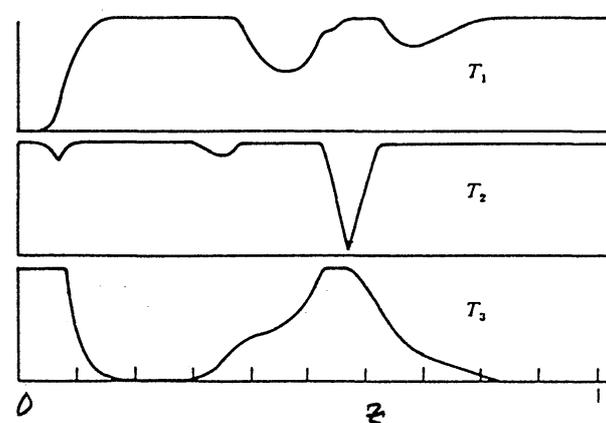


Fig. 9  $Cr=0.8$

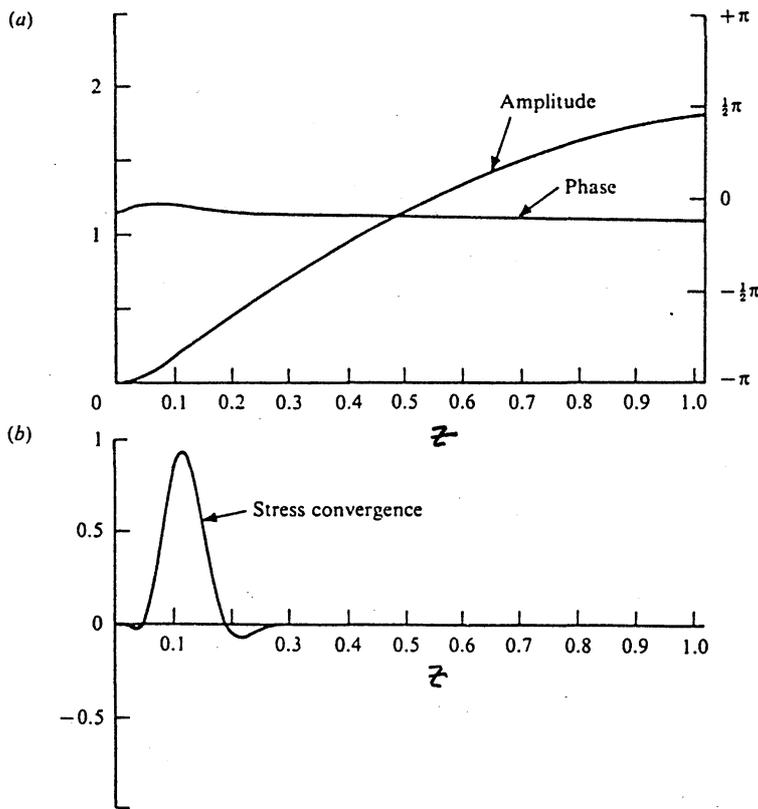


Fig. 10. 入射波 + 反射波の絶対値, 位相及び対応する Stress convergence

$$\frac{d\tau}{dy}$$

$k=1, Re=10^4, Cr=0.1$   
 $= a$  と  $z_c = 0.0513$ .

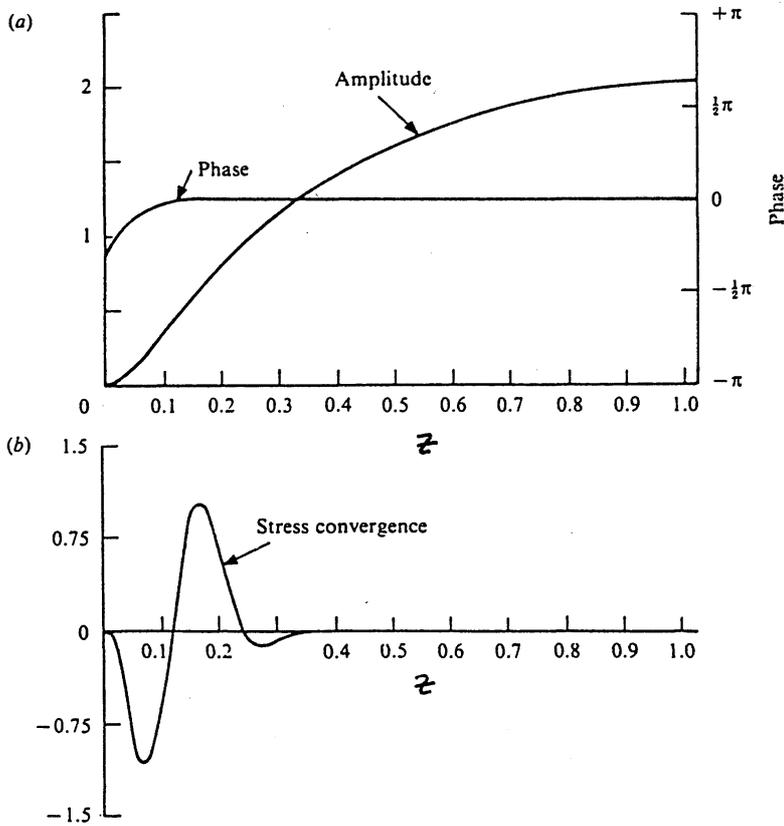


Fig. 11  $Cr=0.2375$

$$z_c = 0.1268$$

$z < z_c$  で位相が遅れているため On 機構が作用する。

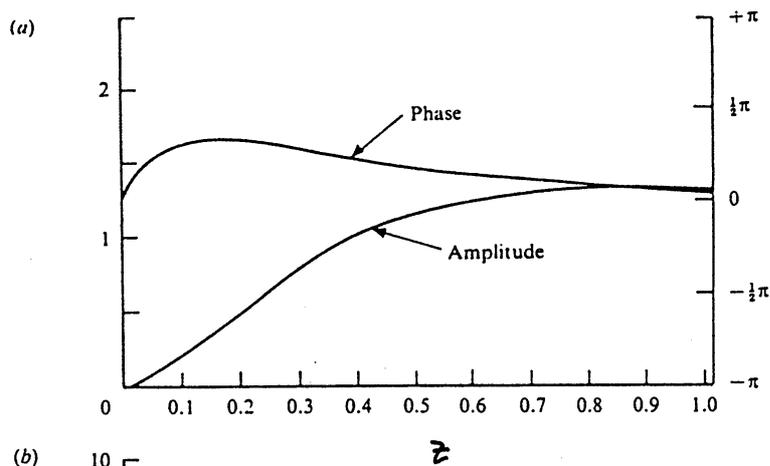


Fig. 12  $C_r = 0.4$

$z_c = 0.2254$

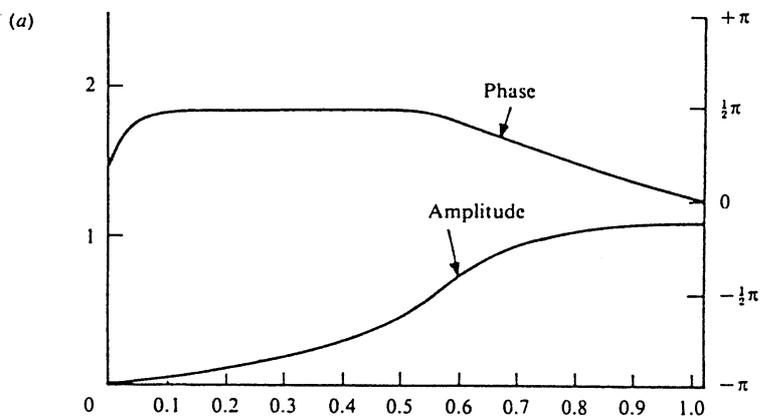
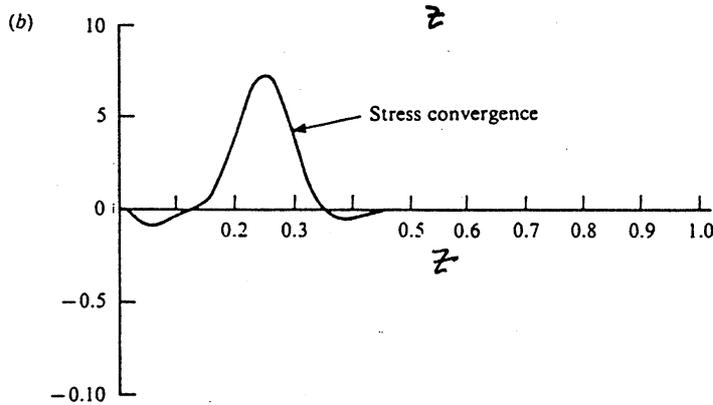
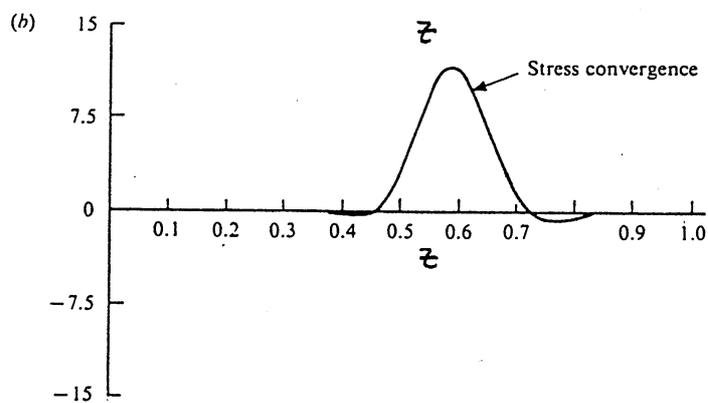


Fig. 13  $C_r = 0.8$

$z_c = 0.5528$



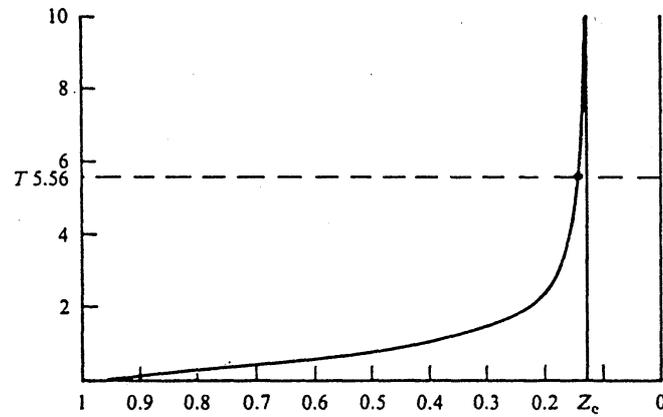


Fig. 14 Travel time  $\alpha$  半値  
と壁から  $\alpha$  距離  $\alpha$  関係.

$$k=1, Re=10^4, Cr=0.2375.$$

$$\alpha \text{ と } z_c = 0.1268, \delta_c = 0.08.$$