数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 19-27

Amalgam, Graph, Subgroup Lattice

東大教養　五味健作 (Gomi Kensaku)
東大　理　田中康彦 (Tanaka Yasuhiko)

有限単純群論における revisionism の目標は、むつかしく，かつ長い単純群の分類証明を解りやすく書き直すことである。ただし、書き直すといっても、今ある証明の整理、統合をするというだけなら，面白くもないし，価値も乏しい。極端な言い方をすれば、時間さえかければ誰にでもできることである．したがって私達の目標（夢）は全く新しい方法、考え方を見出すことである．

単純群の分類の結論は良く知られているように「単純群は交代群、Lie型の群、散在群のいずれかに同形である」という、明解な、極く当り前のものである．しかし、その証明をちょっとでものぞいて見ると、当り前でないことが目につく。たとえば、２という素数は有限群論全体において非常に特殊性を持っていて、そのことを反映して、分類証明もいわゆる標数２型の群の分類と、そうでない群の分類に分けられる。標数２型の定義は以下の話では特に必要ではないが、一応述

べておく．有限群 G が標数2型であるというのは，G のすべての2局所部分群 L が $C_L(O_2(L)) \subseteq O_2(L)$ という条件をみたすことをいう．2局所部分群というのは，自明でない2部分群の正規化群を指す．たとえば，標数2の Lie 型の群は標数2型の群である．逆に，標数2型の単純群の分類の結論は「標数2型ならば標数2の Lie 型の群である」というものである．ただし例外が少しある．

この標数2型の群の分類の最終局面において，持ち上げ (pushing up) なる考え方が浮上して来た．この考え方は非常に有効なので，分類の始めの段階からこれを使って分類証明を書き直すことが提唱され，持ち上げとその応用の研究が開始された．

持ち上げでは次のような情況を問題とする：群 G の有限部分群 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n \geqq 2)$ が共通の部分群 S を持ち，$\bigcap S^{X_i} \neq 1$，$\bigcap S^{\langle X_1, X_2, \cdots, X_n \rangle} = 1$．ただし一般に，$X$，$S$ が群 G の部分群のとき，$\bigcap S^X$ は S の X 共役すべての共通部分を表す．上のような情況のときに X_i, S の構造を決定せよというのが持ち上げの基本問題である．

ただし，これは一番一般的な形で述べたものであって，実際には必要に応じて X_i, S にいろいろの条件を仮定してこの問題を考えることになる．現在のところ，私達が一番重要だ

と考えているのは、次の三条件がみたされている場合である.

(1)　$S \in Syl_2(X_i)$

(2)　X_i は S 既約 i.e. $X_i \neq \langle Y \mid S \subseteq Y \subsetneqq X_i \rangle$

(3)　$C_{X_i}(O_2(X_i)) \subseteq O_2(X_i)$

この場合、$(X_1, \cdots, X_n, S)$ を放物系, n をその階数と呼ぶことにする.

この概念が重要である理由は、まず第一に、標数2、階数 n の Lie 型の群においては、BN 対から n 階の放物系が作られるということ、第二には、標数2型の群においては、ある n に対して階数 n の放物系が存在することである. ただし、第二の点については例外があるが、この例外を処理する良い理論が存在している. したがって放物系の構造を研究し, それを利用して標数2型の群を分類することが、私達には一番自然な考え方に思える.

ところで、標数2の Lie 型の群には BN 対があり、その BN 対には階数がある. この階数に相当する概念が一般の標数2型の群 G に対して、次のように定義される:

$m_p(X)$ = 群 X の p 階数 i.e. X の基本可換 p 部分群の階数の最大値,

$e(G) = \max\{m_p(L) \mid L$ は2局所部分群, p は奇素数$\}$

Gが標数2のLie型の群の場合には、$e(G)$はGのBN対の階数の近似値を与える.

標数2型の群Gの分類は $e(G) \leqq 2$ の場合と $e(G) \geqq 3$ の場合とに分かれる. このように場合分けしなければならない理由は次のように解釈することができる. 前に述べたように分類の目標はGが標数2のLie型の群G^*に同型であることを示すことである. そのためには、Gの中にG^*のと同様のBN対を構成しなくてはならない. ところがBN対についてのJ. Tits達の仕事を見ればわかるように、BN対はその階数が2以下の場合と3以上の場合とでは、扱い方を全く変える必要がある. $e(G) \geqq 3$ と $e(G) \leqq 2$ とに分けなくてはならないのは、このような事情を反映したものと解釈できる. もっとも実際には signalizer に関する技術的理由が大きいのであろう. いずれにしても、この場合分けは自然なものに思われる.

現在のところ、私達は $e(G) \leqq 2$ の場合を更に次の二つの場合に分けている:

(1) 2局所部分群はすべて可解.

(2) そうでない.

このような場合分けは、実例を観察して見ると、自然なものとは思われないが, 現状では技術的な理由で止むを得ない.

最近（1）の場合の分類が持ち上げの考え方により出来るようになった（愛教大の林誠氏との共同研究）．このことについて，やや詳しく述べる．まず，うまく処理できる例外を除いて，Gの中に階数2の放物系（X_1, X_2, S）で$S \in Syl_2(G)$なるものが存在する．$e(G)$と放物系の階数との関係については，一般には何もわからないが，（1）の場合には両者は等しい．もしもX_1, X_2, Sの構造が決まれば，単純群の2-Sylow群による特徴づけ等を使ってGを決定することができる．すなわち，X_1, X_2, Sについての持ち上げ問題を解けば良いことになる．しかしこの問題はむつかしいので次のような方法を用いた．Gの中の放物系達の間にある順序$\leqq$を定義し，この順序に関し（Y_1, Y_2, T）$\leqq$（X_1, X_2, S）かつ（Y_1, Y_2, T）は極小なるものを考える．このとき，（Y_1, Y_2, T）が決まれば（X_1, X_2, S）も決まる．したがって（Y_1, Y_2, T）に対して持ち上げを考えれば良いことになる．そして実際，極小性を用いてこの問題を解くことが出来て，所期の目標を達成することができた．

この種の持ち上げ問題を扱うための一般論はGoldschmidtにより得られた．持ち上げ問題において$n=2$とすれば次のようになる：群Gの有限部分群X, Yが共通の部分群Sを持ち，

① $\cap S^X \neq 1 \neq \cap S^Y$

② $\cap S^{\langle X,Y\rangle} = 1$.

我々の目標は X, Y, S の構造の決定なので G を $\langle X,Y\rangle$ で置きかえることにより

③ $G = \langle X, Y\rangle$

と仮定して良い．さらに X, Y の S 上の amalgam F の中に G を埋め込み、G を F で置きかえることにより

④ $X \cap Y = S$，G は X, Y の S 上の amalgam.

と仮定して良い．

①～④ のもとで X, Y の coset graph Γ を作る．$V(\Gamma)$ は X あるいは Y の左剰余類から成り、$E(\Gamma)$ は $\alpha \cap \beta \neq \phi$ なる点 α, β の組から成る．直ちに次のことがわかる．

⑤ Γ は bipartite graph で、$\{Xx, Yy\} \in E(\Gamma)$ なるためには $Xx = Xz$, $Yy = Yz$ なる $z \in G$ が存在することが必要かつ十分.

これから次のことがわかる.

⑥ Γ は連結 tree.

⑦ G は Γ 上に忠実、辺上可移に作用する．しかし点上には可移ではない．

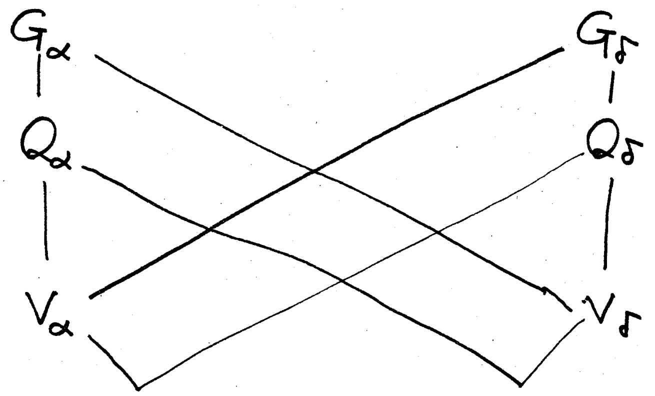
このように amalgam を用いて持ち上げ問題を graph のことに翻訳することができる．Goldschmidt が扱った場

合には $|X:S|=|Y:S|=3$ となっていた．この場合には Γ は connected, trivalent tree になり，$\mathrm{Aut}\,\Gamma$ の辺可移だけれども点可移でない部分群 G を考察することになる．逆に，connected, trivalent tree Γ の辺可移だけれども点可移でない部分群から持ち上げ問題を再現することができる．したがって、Goldschmidt が取り上げた情況では、持ち上げ問題は graph のことに完全に翻訳される．しかし我々の扱ったような、より一般的情況では graph への翻訳の過程で群論的情報が失われて、完全な翻訳ではなくなる．そのような情況では graph は脇役となり，かわりに G の subgroup lattice が主役となる．

$\alpha \in V(\Gamma)$ に対して次のように記号を定める．

$$Q_\alpha := \bigcap_{\beta\sim\alpha} G_{\alpha\beta}, \quad V_\alpha := \langle \Omega_1(Z(G_{\alpha\beta})) \mid \beta\sim\alpha \rangle$$

そして次のような絵を考える：$\alpha \in V(\Gamma)$, $\delta \in V(\Gamma)$, $d(\alpha,\delta)$ は偶数，$V_\alpha \subseteq G_\delta$, $V_\alpha \not\subseteq Q_\delta$, $V_\delta \subseteq G_\alpha$, $V_\alpha \not\subseteq Z(G_\alpha)$．



G_α が2既約であることから $Q_\alpha \in Syl_2(C_{G_\alpha}(V_\alpha))$ がわかり、同様に $Q_\delta \in Syl_2(C_{G_\delta}(V_\delta))$. したがって $[V_\alpha, V_\delta] \neq 1$, 故に $V_\delta \not\leq Q_\alpha$ となる. すなわち条件は α, δ につき全く対称になる. そこで $|V_\alpha : V_\alpha \cap Q_\delta| \leqq |V_\delta : V_\delta \cap Q_\alpha|$ と仮定すると $|V_\alpha : C_{V_\alpha}(V_\delta)| \leqq |V_\delta : C_{V_\delta}(V_\alpha)|$ となる. すなわち、$\overline{G_\alpha} = G_\alpha / C_{G_\alpha}(V_\alpha)$ を V_α に忠実に作用させれば $|V_\alpha : C_{V_\alpha}(\overline{V_\delta})| \leqq |\overline{V_\delta}|$ となる. これは非常に特殊な情況であることが知られている. 実際、$\overline{G_\alpha}$ の正規部分群 $\overline{N_\alpha}$ で $\overline{N_\alpha} \cong GL_2(2)$ 又は $GL_2(2) \times GL_2(2)$ なるものがあり、V_α は $\overline{N_\alpha}$ の自然な表現を与える. これが G_α の構造を決めるための大きな手がかりとなる. もっと複雑ではあるが、本質的にはこれと同様な考え方を押し進めることにより我々の持ち上げ問題が解決された.

今までの有限単純群論はその大きな部分を J. Thompson が N-group paper の中で発明した数々の方法に負うている. 上記の私達の得た結果は N-group paper の大きな部分を異なる（そしてたぶん解りやすい）方法で処理できることを示している. この新しい方法がより広い範囲に使えるかどうかは、まだわからない. 使えない可能性ももちろんあるが, それはこれから試してみないとわからないことである.

N-group paper を理解しようとして, あまりの複雑さと長

さに断念した経験は多くの人がお持ちだろう．かくいう私もその一人で，私にとってThompsonは天の上の人であった．しかし，N-group paperのたとえ一部ではあっても，こうして別証明ができてみると，それ程手の届かぬ人ではないのかもしれない，雲の上ぐらいまでは降りて来てくれたような気もする。いずれにしても、N-group paperのような難物を理解しようと苦労するよりは、自前の証明を考える方が楽しいし生産的だから、もっと多くの人が挑戦してみてほしい．こういうことに私の目を開かせてくれたのは林誠氏であり，この場を借りて心から氏にお礼を申し上げる．（文責　五味）