数理解析研究所講究録
第 735 巻 1990 年 43-60

Association scheme の指標表のいくつかの具体的な計算例

九大・理　坂内英一
(Eiichi Bannai)

序.

筆者はここ数年間、何人もの数学者の協力を得て、association scheme の指標表 (character table) について色々と調べてきた。これらの仕事については、既に色々な機会に発表したものがあるので、ここではくり返さない。参考文献にあげた [2−12] 等を参照されたい。この中で [2, 3, 4, 5] は総合報告的な論文であり、専門外の人でも取り付き易いと思います。また更に詳しい文献はそれらの (特に[4]の) 末尾の参考文献を参照して下さい。

この方向の研究は、川中宣明氏の最近の仕事により、様相が一変しつつあります。それらの目ざましい仕事については川中 [19, 20] 等を参照して下さい。更にこれらのことは、川中氏自身によりもっと目ざましい形で、すなわち、一般に有限古典群 (又は Chevalley 群) の"良い"等質空間の球函数の決定 (= Hecke ring の表現の決定、Hecke ring

が可換な場合は association scheme の指標表の決定に対応する）が reductive な代数群の表現論と類似した形で得られるという形で、進展中と思われます。これらの代数群的な仕事は既に私の理解出来るレベルをはるかに越えていますが、association scheme の指標表を見るという（すなわち球函数の全部を一まとめのものとして見る）立場が、その最初の motivation の一部として役に立ったことはうれしいことと思います。

この講演では、もっと初等的なレベルでの、association schemes の具体的ないくつかの指標表についての実験的な結果（観察）を主に問題提起という形で紹介します。

以下の話で使うための notation を固定します。association scheme およびその指標表についての一般論は、[1], [4] 等を参照して下さい。

$\mathcal{X}=(X,\{R_i\}_{0\le i\le d})$ をクラス d の可換な association scheme とする。A_i を関係 R_i に対する隣接行列、$\mathfrak{A}=\langle A_0,A_1,\cdots,A_d\rangle$ を Bose-Mesner algebra (=Hecke algebra) とする。この時 $A_iA_j=\sum_{k=0}^{d}p_{ij}^{k}A_k\ (=A_jA_i)$ をみたす。$E_0\left(=\frac{1}{|X|}J\right), E_1,\cdots,E_d$ を algebra $\mathfrak{A}$ の原始巾等元全体とする。$\mathfrak{A}$ の2つの bases $(A_0,A_1,\cdots,A_d)$

と $(E_0, E_1, \cdots, E_d)$ の間の変換行列 P を可換な association scheme $\mathfrak{X}$ の指標表とよぶ。すなわち

$$(A_0, A_1, \cdots, A_d) = (E_0, E_1, \cdots, E_d) \cdot P$$

が成りたつ。この時、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & k_1 & k_2 & \cdots & k_d \\ 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix}$$

の形をしている。

[注: 可換な association scheme の多くの例は、multiplicity-free な (i.e., 1_H^G が multiplicity-free な、ここで H は一点の固定群) 可移置換群 G から得られる。詳しくは [1], [4] 等を参照されたい。]

§1. Ennola-type dualities in the character tables of some association schemes.

有限一般ユニタリー群 $GU(n, q^2)$ の (通常の群論の意味での) 指標表が一般線型群 $GL(n, q)$ の指標表から、essential には q を $-q$ に置き換えて得られるということ

とは、Ennola [15] (1963) により予想され、証明が比較的最近 Hotta-Springer [18] (1977), Kawanaka [21] (1985) により完成されたことは良く知られている。

ここではいくつかの association schemes の指標表の間に q を $-q$ に置き換え（かつ必要な modification を行なうと）一方から他方が得られるという例をいくつか述べる。[もともとの Ennola duality とよぶ $GU(n,q^2)$ と $GL(n,q)$ の2つの指標表の間の関係は q を $-q$ に変えるだけでなく、1の $q+1$ 乗根と $q-1$ 乗根を置き換えることも同時におこなうので、以下で述べる例とは異質な所もあります。] この節の内容は Bannai-Kwok-Song [9] にもとづいています。きちんと定義されていない記号等は [9] を参照して下さい。

例1. 3次直交群 $O_3(q)$ $\left(=P\Omega_3(q)\right)$ が negative type の non-isotropic (projective) points の集合 Ω_2 の上に transitive に働らく作用から出来る可換な association scheme

$$\mathfrak{X}(O_3(q),\Omega_2) \cong \mathfrak{X}\left(PGL(2,q),\ PGL(2,q)/D_{2(q+1)}\right)$$

を考える。ただし以下 q = 奇素数巾を仮定する。この association scheme のクラスは $d=\frac{1}{2}(q-1)$ であり、

その指標表は、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q+1 & q+1 & & q+1 & \frac{1}{2}(q+1) \\ 1 & & & & & \\ \vdots & & \psi_{ij} & \begin{smallmatrix} 1 \le i \le \frac{1}{2}(q-1) \\ 1 \le j \le \frac{1}{2}(q-1) \end{smallmatrix} & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

$\left(\text{size } \frac{q+1}{2} \times \frac{q+1}{2}\right)$

である。ただし $\psi_{ij} \in Q(\theta) \cup Q(\rho)$,

$\theta = e^{2\pi i/(q+1)}$, $\rho = e^{2\pi i/(q-1)}$ である。

[ψ_{ij} の値は具体的に書き下すことは可能ではあるが非常に複雑である。Kwok [23] を用いると計算可能となる。]

この行列 P に対して次の操作をほどこす。

(1) q を $-q$ に変える(各 ψ_{ij} はそのままとする)。

(2) この時第一行は $1, -q+1, -q+1, \cdots, -q+1, \frac{1}{2}(-q+1)$ となるので、それを全て正にするために、2列以後に -1 をかける。

このようにして出来た行列を、

$$P' = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & q-1 & \cdots & q-1 & \frac{1}{2}(q-1) \\ 1 & & & & & \\ \vdots & & & -(\psi_{ij}) & & \\ 1 & & & & & \end{pmatrix}$$

$\left(\text{size } \frac{q+1}{2} \times \frac{q+1}{2}\right)$

とする。[P' 自身は association scheme の指標表が満たすべき直交関係 [1, p.63 参照] をみたさない。]

(3) P' に行と列を一つづつ加えて

$$\bar{P} = \left(\begin{array}{ccccc|c} & & & & & b_0 \\ & & P' & & & b_1 \\ & & & & & \vdots \\ & & & & & b_{\frac{1}{2}(q-1)} \\ \hline 1 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{\frac{1}{2}(q-1)} & c \end{array}\right)$$

$\left(\text{size } \frac{q+3}{2} \times \frac{q+3}{2}\right)$

とおき、a_i, b_i, c を $\bar{P}$ が association scheme の指標表がみたすべき直交関係をみたすように決める。(a_i, b_i, c 達は一意的に定まる。) この時 $\bar{P}$ は次のようになる。

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & \cdots & q-1 & \frac{1}{2}(q-1) & 2(q-1) \\ 1 & & & & & -2 \\ \vdots & & -\psi_{ij} & & & \vdots \\ 1 & & & & & -2 \\ 1 & -2 & \cdots & -2 & -1 & q-3 \end{pmatrix}.$$

$\left(\text{size } \frac{q+3}{2} \times \frac{q+3}{2}\right)$

この時、$\overline{P}$ は $O_3(q)$ が positive-type の non-isotropic (projective) points の全体 Ω_1 に働らいて出来る可換な association scheme

$$\mathfrak{X}(O_3(q), \Omega_1) \cong \mathfrak{X}(PGL(2,q), PGL(2,q)/D_{2(q-1)})$$

の指標表そのものになっている。(このことは両方の association schemes の構造定数 p_{ij}^k 達を見ることにより、ψ_{ij} の値を具体的に知ることなしに示される。)

例2. 例1と同様な関係が、群 $O_2^-(q)\,(=GO_2^-(q) \cong D_{2(q+1)})$ の GF(q) 上の2次元 vector space V_2 の作用から出来る可換な association scheme $\mathfrak{X}(O_2^-(q), V_2)$ ともう一つの association scheme $\mathfrak{X}(O_2^+(q), V_2)$ の指標表の間にも成り立つ。すなわち、P を $\mathfrak{X}(O_2^-(q), V_2)$ の指標表とすれば、

$$P = \begin{pmatrix} 1 & q+1 & q+1 & \cdots & q+1 \\ 1 & & & & \\ \vdots & & (\psi_{ij})_{\substack{1\le i\le q-1 \\ 1\le j\le q-1}} & & \\ 1 & & & & \end{pmatrix} \quad (\text{size } q\times q)$$

であり、例1と同様の操作で、

$$\overline{P} = \begin{pmatrix} 1 & q-1 & q-1 & \cdots & q-1 & 2(q-1) \\ 1 & & & & & -2 \\ \vdots & & (-\psi_{ij})_{\substack{1\le i\le q-1 \\ 1\le j\le q-1}} & & & \vdots \\ 1 & & & & & -2 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & q-2 \end{pmatrix}$$

$$(\text{size } (q+1)\times(q+1))$$

となり、これは $\mathfrak{X}(O_2^+(q), V_2)$ の指標表そのものになる。

Remarks ① 例1、例2以外にも似たようなことが成りたつ例がいくつかある（[9]参照）。群のレベルでよりも、association scheme のレベルで、何故この種のことが成りたつかを intrinsic に理解することは（理解出来るならば）興味深いと思われる。

② 一般に、association scheme の指標表から、別の association scheme の指標表を作り出す systematic な操作が色々と見つか

っていればおもしろいと思います。実際に対応する association scheme が必ずしも存在しなくても（もっと正確にいうと、association scheme の指標表のみたすような代数的条件（e.g. 直交関係等）をみたすような正方行列）指標表から指標表を作り出す操作が見つかればおもしろいと思います。（[11] の $Sp(4,q)/Sz(q)$ の character table の候補者を $Sz(q)$ の指標表から作り出す操作は依然予想の段階です。

③ Ennola-type duality のことと離れて、一般に一つの指標表からその一部を変えることにより別の指標表（の候補者）を見つけようとすること。（例えば、1つの行と1つの列だけを2つに split して出来るものが何かを考えること。これは置換群では、multiplicity-free な可移置換群の multiplicity-free な可移部分群でその rank が1つだけ増えるものがある時にその association scheme としての指標表がもとの指標表からどう出来るかということに対応している）なども、おもしろい問題と思います。例えば、$O_7(q) \to \Omega_1 = O_7(q)/O_6^+(q)$ の subgroup $G_2(q) \subset O_7(q)$ は Ω_1 の上に可移かつ multiplicity-free に（クラスは1つだけ増えて）作用し、その一点の固定群は $SL(3,q)\cdot 2$ となるが、その時の association scheme の character table は計算出来る。具体的な具は現在計算中（Bannai-Song）。

§2. "Gauss和とLegendre多項式"とassociation scheme

spherical harmonics（ユークリッド空間の単位球上の調和解析）とcyclotomic association schemeの間の類似は良く知られている。ここでcyclotomic association schemeとは、$q=ef+1$とし、Hを（GF(q)の乗法群）$GF(q)^*$のindex eの部分群とし、$(GF(q),+)\cdot H$を$(GF(q),+)$（$=GF(q)$の加法群）の上に働かして出来るクラスfの（可換な）association schemeのことをいう。これらの類似については、例えば、Yamamoto [27]，小野 [25] 等を参照。

Gauss和 $\longleftrightarrow$ Γ-函数

Jacobi和 $\longleftrightarrow$ ベーター函数

等の対応関係が見られる。

spherical harmonicsとassociation schemeの表現論の類似は、またDelsarte等による代数的組合せ論の立場からも良く知られている。（[13]，[14]，[1] 等を参照）

spherical harmonicsのaddition formula（加法公式）はLegendre多項式（$d\geq 3$の時はGegenbauer多項式）$Q_k(x)$に対して、Harm(k)の任意の正規直交底$\{f_{k1},\cdots,f_{kN_k}\}$に対して

$$\sum_{j=1}^{N_k} f_{kj}(\vec{x})\,f_{kj}(\vec{y}) = (\text{const})\cdot Q_k((\vec{x},\vec{y}))$$

for $\forall \vec{x}, \vec{y} \in S^d$. ただし (x, y) は $\mathbb{R}^{d+1}$ の通常の内積、となることとして知られている。

この解釈が当っているかは異論があるかもしれないが、小野[25]で目的としていることは、Gauss 和を用いて、spherical harmonics の addition formula の類似を、cyclotomic association scheme に対して求めようとしている、と私は理解している。(小野[25]で求めようとしている formula とは異なるかもしれないが)、一般の(可換な) association scheme において次のような addition formula が一般的に(従って cyclotomic association scheme の場合も)成り立つことが知られている。(ここでは簡単のため symmetric な association scheme に対して述べる。必要な記号などについては[1]を参照されたい。)

symmetric association scheme $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \le i \le d})$ の指標表 P に対して、$Q = |X| \cdot P^{-1}$ となる行列の (i, j)-成分を $q_j(i)$ であらわす。(Q は Delsarte により 2nd eigenmatrix とよばれているものであり、

$$(E_0, E_1, \cdots, E_d) = \frac{1}{|X|} (A_0, A_1, \cdots, A_d) \cdot Q$$

となる。P は 1st eigenmatrix ともよばれている。)

$$V = V_0 \perp V_1 \perp \cdots \perp V_d$$

を $L^2(X)$ の自然な直交分解(この時 $\dim V_i = \operatorname{rank} E_i = m_i$)

とし、V_i の任意の正規直交基底を $\{f_{h1}, \cdots, f_{hm_h}\}$ とすると、

$$\sum_{j=1}^{m_h} f_{hj}(x) f_{hj}(y) = (\mathrm{const}) \cdot q_h(i)$$

for $^\forall x, y \in X$ となる。ただし $i = i(x,y)$ は $(x,y) \in R_i$ となる x, y により決まる数 $(0 \le i \le d)$ である。

Cyclotomic association scheme の時、$q_h(i)$ は実は <u>Gauss periods</u> と呼ばれるものであり、これらは Gauss 和の線型一次結合として得られるものである。（詳しくは [23], [24] 等を参照。）［小野 [25] では i に対応するものを x と y の有限体上の vector 空間の通常の内積であるという判点があったが、上で与えた cyclotomic association scheme の $i(x,y)$ は x と y の間の内積とはなっていない。ただし次の例ではこのこともうまく行っている。］

spherical harmonics の類似を association scheme の表現論に求めるのに、cyclotomic association scheme のかわりに、association scheme $\mathfrak{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ を考えるのも自然であると思われる。（一つの理由は、$\Omega_2 = O_3(q)/O_2^-(q)$ が $GF(q)$ 上の 3 次元 vector space の単位球と考えられるからである。（ここで $O_3(q)$ は $GO_3(q)$、$O_2^-(q)$ は $GO_2^-(q)$ のいみに、前節とは違って、使っている。））この場合の一つの難点は $q_j(i)$ が非常に複雑になってしまうことである。

[$g_j(i)$ は Kwok [23] により計算されている。ただし Kwok [23] の計算でもその値が完全に explicit に与えられているとは言えない部分がある。] この $g_j(i)$ は、i が有限体 $GF(q)$ の上を動くと考えられなくこともないので)、Legendre 多項式の有限体上版とも言えるものであろう。この $g_j(i)$ を関数として、もっと intrinsic な形で理解することは、重要な問題であると私は思います。

一方、既に、Legendre 多項式の有限体上版として考えられているものが(それが最善かどうかは未定としても)全然別の方向から知られています。これについて簡単に記し、上の $g_j(i)$ との関連を何らかの形で求めることを問題提起として提出したいと思います。

(i) (Evans [16]) Legendre 多項式の積分表示

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C (1-2xu+u^2)^{-\frac{1}{2}} u^{-n} \frac{du}{u}$$

をまねて、

$$P_N(x) = \frac{1}{q} \sum_u N(u)\, \phi(1-2xu+u^2).$$

ただし N は $GF(q)$ の multiplicative character で、ϕ は $\phi^2 = \varepsilon (= id)$ となる mult. character $(\neq \varepsilon)$ とする。$P_N(x)$ は $GF(q)$ の上で定義された複素数の値をとる函数である。

(ii) (Greene [17]) 有限体上の($\mathbb{C}$の値をとる)超幾何級数を次のように定義する。

$$
{}_2F_1\left[\begin{matrix}A,\ B\\ C\end{matrix}\,\middle|\, x\right] = \varepsilon(x)\,\frac{BC(-1)}{q}\sum_{y} B(y)\overline{B}C(1-y)\overline{A}(1-xy)
$$

$$
= \frac{BC(-1)}{q(q-1)}\sum_{\chi} J(\overline{A},\overline{\chi})\,J(\overline{B}C, B\overline{\chi})\,\chi(x)
$$

と定義する。ただし A, B, C, χ 等は $GF(q)$ の multiplicative characters で $\overline{}$ は複素共役指標を表わす。(最後の式では $x \neq 0, 1$ とする。) J は Jacobi 和をあらわす [もっと一般に ${}_rF_s$ が定義され、これを用いて classical orthogonal polynomials の有限体上版の類似が色々と定義される。]

(iii) (Sawabe [26]) $P_N(x)$ は(有限体上の)超幾何級数 ${}_2F_1$ を用いて(その essential part を)記述出来る。(従って補正項が必要)。

<u>問題</u> 先に述べた association scheme $\mathfrak{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ の $q_j(i)$ と有限体上の Legendre 多項式 $P_N(x)$ を何らかの意味で関連付けられないか?

Remarks

(a) $\mathcal{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ は symmetric association scheme であり，$q_j(i)$ は常に実数値をとる。大雑把に言うと，約半分の j に対して $q_j(i)$ は $Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入り，他の約半分の j に対しては $Q(e^{\frac{2\pi i}{q+1}})$ に入る。また $P_N(x)$ は一般に複素数値をとり，$Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入る。従って，$Q(e^{\frac{2\pi i}{q-1}})$ に入る j に対する $q_j(i)$ と実数値をとる $P_N(x)+P_{\bar{N}}(x)$ の間に何らかの関係をつけたいわけである。

(b) 我々の目的はあくまで $\mathcal{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ の $q_j(i)$ を intrinsic に理解したいことにある。上にのべた Legendre 多項式の有限体上版は，たまたま手近に候補者があったというわけで，それとの関係があればもちろん非常に望ましいが，そうでなくとも全然かまわないわけである。（逆に何が Legendre 多項式の有限版としてもっともふさわしいかを，この $q_j(i)$ を通して見つけたいのである。）

(c) Kwok [23] の計算は $\mathcal{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^+(q))$ であるが，$\mathcal{X}(O_3(q), O_3(q)/O_2^-(q))$ との間に§1 で述べたのと類似の Ennola-type duality が成りたつ。（[9], Remark 4，参照。）

References

1. E. Bannai and T. Ito : Algebraic Combinatorics I, Benjamin/Cummings, 1984.
2. 坂内英一：第33回代数学シンポジウム報告集. 1987年7月. 福井.
3. ———：第35回代数学シンポジウム報告集 1989年7月. 札幌.
4. E. Bannai : Character tables of commutative association schemes, Proc. of Conf. "Finite buildings and related geometries", Oxford U.P. 1990.
5. ——— : Orthogonal polynomials in coding theory and algebraic combinatorics, Proc of NATO-ASI on orthogonal polynomials and their applications, Vol 294. (1990), Kluwer, p 25-53.
6. E. Bannai - S. Hao - S. Y. Song : Character tables of the assoc. schemes of finite orthogonal groups acting on the non-isotropic points, J. C. T. (A), 1990.
7. E. Bannai - S. Hao - S. Y. Song - H. Z. Wei : Character tables of the assoc. schemes coming from finite unitary and symplectic groups, to appear in J. of Algebra.
8. E. Bannai - N. Kawanaka - S. Y. Song : The character table of the Hecke algebra $H(GL_{2n}(F_q), Sp_{2n}(F_q))$, J. of Algebra 129 (1990), 320-366.

9. E. Bannai - W. M. Kwok - S. Y. Song : Ennola type dualities in the character tables of some association schemes, to appear in Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.

10. E. Bannai - S. Y. Song : The character tables of Paige's simple Moufang loops and their relationship to the char. tables of PSL(2, q), Proc. London Math. Soc. 58 (1989), 209-236.

11. ———— : On the character table of the assoc. scheme Sp(4, q)/Sz(q), Graphs and Comb. 5 (1989), 291-293.

12. ———— : The char. table of commutative assoc. scheme coming from the action of GL(n, q) on non-incident point-hyperplane pairs, to appear in Hokkaido Math. J.

13. P. Delsarte : An algebraic approach to the assoc. schemes of coding theory, Philips Res. Repts. Suppls. No 10, 1973.

14. P. Delsarte - J. M. Goethals - J. J. Seidel : Spherical codes and designs, Geom. Dedicata, 6 (1977), 363-388.

15. V. Ennola : On the characters of the finite unitary groups, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser AI No 323 (1963), 1-35.

16. R. Evans : Hermite character sums. Pac. J. Math. 122 (1986), 357-390.

17. J. Greene : Hypergeometric functions over finite fields, Trans. Amer. Math. Soc. 301 (1987), 77-101.

18. R. Hotta - T. A. Springer : A specialization theorem for certain

Weyl group representations and an application to the Green fctns of the unitary groups, Invent. Math. 41 (1977), 113–127.

19. 川中宣明：ヘッケ環 $\mathcal{H}(GL_{2n}(F_q), Sp_{2n}(F_q))$ の指標とマクドナルド対称式．「ディンキン数学」研究集会報告集 1987年11月．筑波

20. ———：第35回代数学シンポジウム報告集．1989年7月．札幌．

21. N. Kawanaka: Generalized Gelfand-Graev representations and Ennola duality, Alg. Groups and Related topics, Adv. Stud. Pure Math. Vol 6. Kinokuniya-North-Holland, (1985), 175-206.

22. W. M. Kwok: Character tables of association schemes of affine type, Ph.D. thesis, Ohio State Univ. 1989 (≒ to appear in Europ. J. of Comb.)

23. W. M. Kwok: Character table of a controlling assoc. scheme defined by the general orthogonal gp $O_3(q)$, to appear in Graphs and Comb.

24. R. J. McEliece and H. Rumsey, Jr.: Euler products, cyclotomy and coding, J. Number Theory, 4 (1972), 302-311.

25. 小野孝：ガウス和とルジャンドル多項式：数学セミナー連載 1986年10月号—1987年4月号．

26. Y. Sawabe: Legendre character sums, to appear.

27. K. Yamamoto: On a conjecture of Hasse concerning multiplicative relations of Gaussian sums, J.C.T. 1 (1966), 476-489.
(以上)