

古典型単純 Lie 環の q -analogue の
有限次元既約表現の基底 - crystal base について

京大数理研 中島俊樹 (Toshiki Nakashima)

ここでは $[K]$ により 概念づけがなされた q -analogue $U_q(\mathfrak{g})$ ($\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$) の有限次元既約表現に対する "crystal base" 及び それを具体的に描写する "crystal graph" について述べていこう。

§1 The q -analogue of a universal enveloping algebra

まず \mathfrak{t} を \mathbb{Q} 上の有限次元 vector space, I を finite index set とする。

$\{h_i \in \mathfrak{t}; i \in I\} = \{\alpha_i \in \mathfrak{t}^*; i \in I\}$ は lin indep set であり
 $\{\langle h_i, \alpha_j \rangle\}_{i,j}$ は symmetrizable generalized Cartan matrix とする
ものとする。 \mathfrak{t}^* には $2(\alpha_i, \lambda) = (\alpha_i, \alpha_i) \langle h_i, \lambda \rangle$ なる内積をとる。
ここで (α_i, α_i) は $\forall i \in I$ に対し positive integer

$P \subset \mathfrak{t}^* : \text{weight lattice}$

$Q \subset P : \text{root lattice}$ とする

Def U_q は $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra で symbol q^h ($h \in P^*$),
 e_i, f_i ($i \in I$) とする。 次の関係式を満たすものとして生

成しゆる。

$$(1.1) \quad q^{h+h'} = q^h \cdot q^{h'} \quad (\text{for } h, h' \in P^*) \quad q^0 = 1$$

$$(1.2) \quad q^h e_i q^{-h} = q^{\langle h, \alpha_i \rangle} e_i \quad q^h f_i q^{-h} = q^{-\langle h, \alpha_i \rangle} f_i \quad (\text{for } h \in P^*)$$

$$(1.3) \quad t_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i) h_i} \quad \text{と } t_i < 2$$

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q^{(\alpha_i, \alpha_i)} - q^{-(\alpha_i, \alpha_i)}}.$$

又 comultiplication $\Delta: U_q \rightarrow U_q \otimes U_q$ は

$$(1.4) \quad \Delta(q^h) = q^h \otimes q^h$$

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes 1 + t_i \otimes e_i$$

$$\Delta(f_i) = f_i \otimes t_i^{-1} + 1 \otimes f_i$$

で与えらる。こゝにより U_q -module の tensor 積は U_q -module になる。

以下 あつかう表現は integrable なものとす。こゝに $M(\lambda)$ は highest weight λ ($\in P_+ = \{ \mu \in P; \langle h_i, \mu \rangle \geq 0 \}$) の irreducible U_q -module を表すものとする。

§2 Operators \hat{e}_i と \hat{f}_i

各 i に對する Laplacian $\Delta_i = q_i^{-1} t_i + q_i t_i^{-1} + (q_i - q_i^{-1})^2 e_i f_i^{-2}$ と t_i

$q_i = q^{(\alpha_i, \alpha_i)}$ により e_i, f_i を modify し \hat{e}_i, \hat{f}_i を次のようにおく。

$$\hat{e}_i := (q_i t_i \Delta_i)^{-\frac{1}{2}} e_i \quad \hat{f}_i := (q_i t_i^{-1} \Delta_i)^{-\frac{1}{2}} f_i.$$

\hat{e}_i, \hat{f}_i は 任意の U_q -module に operate する。

§3 Crystal base

$K := \mathbb{Q}(q)$ とし. $A := \{f \in K \mid f \text{ は } q=0 \text{ で regular}\}$ とおく

K 上の vector space V に対し L が V の lattice

$\Leftrightarrow L$ は A -free module として $V \cong K \otimes_A L$

Def integrable U_q -module M に対し (L, B) が M の crystal base

$\Leftrightarrow L$ は M の lattice, B は \mathbb{Q} -vector space L/qL の base として 次の 1) ~ 5) を満たす

1) $L = \bigoplus_{\lambda \in P} L_\lambda \quad \Leftrightarrow L_\lambda := L \cap M_\lambda$ (M_λ は M の weight space)

2) $B = \bigcup_{\lambda \in P} B_\lambda \quad \Leftrightarrow B_\lambda := B \cap (L_\lambda / qL_\lambda)$

3) $\forall i \in I$ に対し $\tilde{e}_i: L \subset L \quad \tilde{f}_i: L \subset L$

4) $\forall i \in I$ に対し $\tilde{e}_i: B \subset B \cup \{0\} \quad \tilde{f}_i: B \subset B \cup \{0\}$

5) $u, v \in B$ と $i \in I$ に対し $u = \tilde{e}_i v \Leftrightarrow v = \tilde{f}_i u$

Thm 1 $g = A_n B_n C_n D_n$ のとき 任意の integrable $U_q(g)$ -module with highest weight は crystal base を持つ

証明は [K] による. 現在は g が一般の symmetrizable な Kac Moody Lie-環に対しても成り立つことがわかっている.

Thm は $M = M(\lambda)$ ($\lambda \in P_+$) のとき もう少し精密に述べられる.

$$\mathcal{L}(\lambda) := \sum A \tilde{f}_i \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \subset M(\lambda) \quad (u_\lambda \text{ は h.w.v.})$$

$$B(\lambda) := \{v = \tilde{f}_i \cdots \tilde{f}_{i_k} u_\lambda \bmod q\mathcal{L}(\lambda); v \neq 0\} \subset \mathcal{L}(\lambda) / q\mathcal{L}(\lambda)$$

と書く

Thm 2 $\lambda \in \mathbb{P}_+$ に対し $(\mathcal{L}(\lambda), \mathcal{B}(\lambda))$ は $M(\lambda)$ の crystal base

§ 4 sl_2 -case

$\lambda = 0$ は sl_2 とし 具体的に crystal base をあつかう。みる。
 $U_q(sl_2)$ は generator t, t^{-1}, e, f で生成される $\mathbb{Q}(q)$ 上の algebra である。その基本関係式は $tet^{-1} = q^2e$, $tf t^{-1} = q^{-2}f$,
 $[e, f] = t - t^{-1} / (q - q^{-1})$. Laplacian $\Delta = q^{-1}t + qt^{-1} + (q - q^{-1})^2 ef - 2$
 $= qt + q^{-1}t^{-1} + (q - q^{-1})^2 fe - 2$ は $U_q(sl_2)$ の center. $\{U_k\}_{0 \leq k \leq l}$

に対し

$$\begin{aligned} tU_k &= q^{l-2k}U_k \\ eU_k &= [k]U_{k-1} \\ fU_k &= [l-k]U_{k+1} \end{aligned}$$

とすると $V_l := \bigoplus_{k=0}^l \mathbb{Q}(q)U_k$ は $l+1$ 次元 irreducible $U_q(sl_2)$ -module になる。
 $([n] = q^n - q^{-n} / q - q^{-1})$

$\Delta|_{V_l} = q^{l+1} - 2 + q^{-l-1}$ より $(qt\Delta)^{\frac{1}{2}}$ は V_l に

$$(qt\Delta)^{\frac{1}{2}}U_k = q^{-k}(1 - q^{2k})U_k$$

という形で作用する。 $\hat{e} = (qt\Delta)^{-\frac{1}{2}}e$ $\hat{f} = (qt^{-1}\Delta)^{-\frac{1}{2}}f$ は

$$\hat{e}U_k = (1 - q^{2k})(1 - q^2)^{-1}(1 - q^{2(l+1)})^{-1}U_{k-1}$$

$$\hat{f}U_k = (1 - q^{2(l-k)})(1 - q^2)^{-1}(1 - q^{2(l+1)})^{-1}U_{k+1}$$

という形で作用する。 \hat{e}, \hat{f} の両係数とも A の元である。 $q=0$ の場合も 1 になる。

$\therefore L := \bigoplus_{k=0}^l A U_k \quad B = \{ U_k \}_{0 \leq k \leq l} \quad e_i < e_j \quad \tilde{e} L \subset L$
 $\tilde{f} L \subset L \quad \forall i, j$

$$\tilde{e} U_k \equiv U_{k-1} \pmod{qL} \quad (0 < k \leq l)$$

$$\tilde{f} U_k \equiv U_{k+1} \pmod{qL} \quad (0 \leq k < l)$$

よ) (L, B) が V_λ の crystal base となる: ことがわかる.

§ 5 Properties of Crystal base

Prop 1 (L_j, B_j) が M_j ($j=1, \dots, r$) の crystal base ならば

$\bigoplus (L_j, B_j) = (\bigoplus L_j, \prod B_j)$ は $\bigoplus M_j$ の crystal base

Prop 2 $M(\lambda)$ の crystal base $(\mathcal{L}(\lambda), B(\lambda))$ に対し $B(\lambda)$

の元 u が $\forall i$ に対し $\tilde{e}_i u = 0$ を満たすとき $\mathcal{L}(\lambda)$ の元

u' があつて $u = u' \pmod{q\mathcal{L}(\lambda)}$ かつ $\forall i$ に対し $e_i u' = 0$ を満たす.

Prop 3 $(L_j, B_j) \subseteq M_j$ ($j=1, 2$) の crystal base となる.

(a) $(L_1, B_1) \otimes (L_2, B_2) = (L_1 \otimes L_2, B_1 \times B_2)$ は $M_1 \otimes M_2$ の crystal

base. $\therefore B_1 \times B_2 \hookrightarrow L_1 \otimes L_2 / q(L_1 \otimes L_2)$ は $(u, v) \mapsto u \otimes v$ に対応する

(b) $u \in B_1, v \in B_2$ に対し

$$(i) \quad \tilde{f}_i(u \otimes v) = \begin{cases} \tilde{f}_i u \otimes v & \text{if } \exists N > 0 \text{ s.t. } \tilde{f}_i^N u \neq 0 \text{ and } \tilde{e}_i^N v = 0 \\ u \otimes \tilde{f}_i v & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \tilde{e}_i(u \otimes v) = \begin{cases} u \otimes \tilde{e}_i v & \text{if } \exists N > 0 \text{ s.t. } \tilde{e}_i^N v \neq 0 \text{ and } \tilde{f}_i^N u = 0 \\ \tilde{e}_i u \otimes v & \text{otherwise} \end{cases}$$

§ 6 Crystal graph

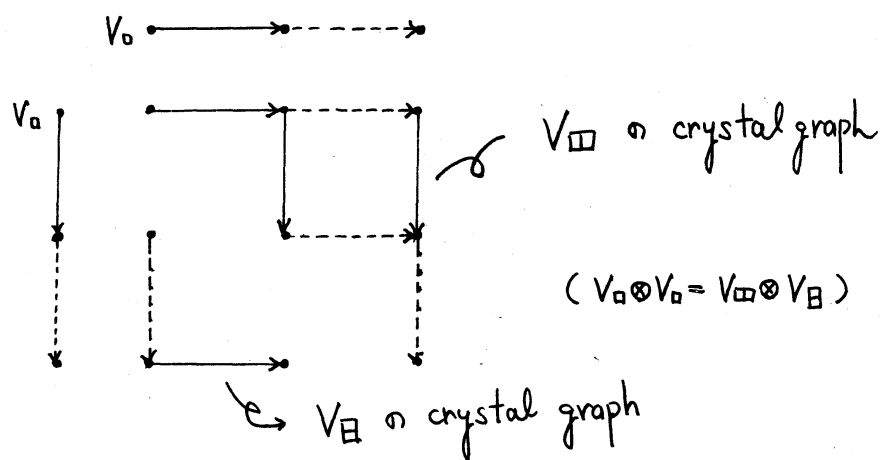
crystal base の定義の 4), 5) より base B は graph の構造をもつことがわかる. $f_i u = v$ を $u \rightarrow v$ とかくことにすればこの graph は colored oriented graph となる.

又、この graph は tensor 積に対して安定性をもつことが Prop 3 よりわかる.

Example • A_2 の vector 表現 V_0 の crystal graph



• A_2 の $V_0 \otimes V_0$ の crystal graph



∴ \bar{U}_q -module M の crystal base (L, B) に \succ して

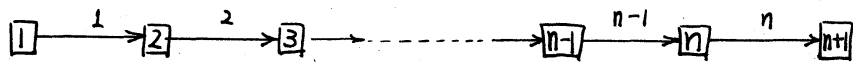
M が irreducible \iff crystal graph が connected

(∴ \bar{U}_q crystal graph が connected とは各 arrow の color を忘れて graph として connected ということ)

に注意すべし. \bar{U}_q -module M_1, M_2 に対し $M_1 \otimes M_2$ の crystal graph の各 connected component が $M_1 \otimes M_2$ の既約成分

の crystal graph とする : とわかる .

以下 . tensor 積 を利用し . $\mathfrak{g} = A_n$ の場合 : 任意 $\lambda \in P_+$ に
 対し $M(\lambda)$ の crystal graph の 具体的 描写 を 与える . $\Lambda_i (1 \leq i \leq n)$
 を fundamental dominant integral weight とする とす . $M(\Lambda_i)$ の
 crystal graph を $M(\Lambda_i) \hookrightarrow M(\Lambda_i)^{\otimes i}$ を 利用し て 実現し て
 みる . $U_q(A_n)$ -module $M(\Lambda_i)$ の crystal graph を 次の 形 で
 かく : とにする .



($L_0 = \bigoplus_{i=1}^{n+1} A_i$, $B_0 = \{ \boxed{i} \}_{i=1, \dots, n} \}$) が $M(\Lambda_1)$ の crystal base
 の B_0 の 元 の tensor 積 $\boxed{i_1} \otimes \boxed{i_2} \otimes \dots \otimes \boxed{i_n}$ を $\begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix}$ とかく : とに
 する .

Prop 4 $M(\Lambda_n)$ の crystal base $(L(\Lambda_n), B(\Lambda_n))$ に対し .

$$B(\Lambda_n) = \left\{ \begin{bmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_n \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} \cdot i_j \in \{1, 2, \dots, n+1\} \\ \cdot i_j < i_{j+1} \end{array} \right\} \quad \text{とかけ}$$

$B(\Lambda_n) \wedge$ の \tilde{e}_i, \tilde{f}_i action は 次の よう に 記述 する

$u \in B(\Lambda_n)$ に対し . $u(i \rightarrow j)$ は u の i を j に 変え 7: e の
 とすると . $u \in B(\Lambda_n)$ に対し て

$$\tilde{f}_i u = \begin{cases} u(i \rightarrow i+1) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i \text{ and } i_{k+1} = i+1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\tilde{e}_i u = \begin{cases} u(i+1 \rightarrow i) & \text{if } \exists k \text{ s.t. } i_k = i+1 \text{ and } i_{k-1} = i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明は、まず $B(\Lambda_N) \wedge$ の \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の action が $B(\Lambda_N)$ の元を $B(\Lambda_1)$ の元の tensor 積とみれば、 \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の action と一致することを示す。次に $B(\Lambda_N) \cup \{0\}$ が \tilde{e}_i, \tilde{f}_i の action で閉じていることを示す。最後に、 $\tilde{e}_i u = 0$ なる $B(\Lambda_N)$ の元 u は $u = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ N \end{bmatrix} = \square \otimes \dots \otimes \square$ という形のもののみであることを示せばよい。

次に一般の $\lambda \in P_+$ に対しては、 $\lambda = \sum_{i=1}^n m_i \Lambda_i$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$) とかけることにより、 $M(\lambda) \hookrightarrow M(\Lambda_1)^{\otimes m_1} \otimes M(\Lambda_2)^{\otimes m_2} \otimes \dots \otimes M(\Lambda_n)^{\otimes m_n}$ により crystal graph を実現する。

Thm $\lambda \in P_+$ を $\lambda = \Lambda_{i_1} + \Lambda_{i_2} + \dots + \Lambda_{i_p}$ ($1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_p \leq n$) とかくと

$M(\lambda)$ の crystal base $(L(\lambda), B(\lambda))$ の $B(\lambda)$ は

$$B(\lambda) = \left\{ w = \begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline u_1 \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|} \hline u_2 & u_3 \\ \hline \end{array} \dots \begin{array}{|c|} \hline u_p \\ \hline \end{array} \in B(\Lambda_{i_1}) \otimes \dots \otimes B(\Lambda_{i_p}) \end{array} \left| \begin{array}{l} w \text{ は shape } Y_\lambda \text{ の} \\ \text{semi standard tableau} \\ (\text{i.e. Young tableau } Y_\lambda \text{ に文字 } 1, \dots, m+1 \\ \text{をよ:方向"≦"で右方向"1"で} \end{array} \right. \right.$$

(ここで Y_λ は λ でまるる Young tableau)

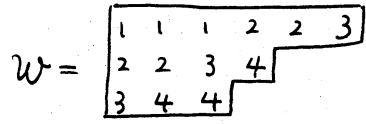
\tilde{f}_i, \tilde{e}_i の $B(\lambda) \wedge$ の action i.e. $M(\lambda)$ の crystal graph の arrow の出方は、次のように記述される。

\tilde{f}_i, \tilde{e}_i の action について考えると、 $w \in B(\lambda)$ の i と $i+1$ に注目する。 $w = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \hline \end{array}$ をこの矢印のように右上から、

1列ずつ見ていき、 i と $i+1$ の順番に読みとっていく。

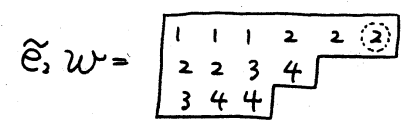
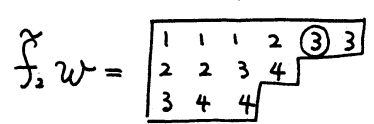
それは左から順にみる。 $i, i+1$ というように $(i+1, i)$ は σ となりあっているものがある。その $2 > 3$ とりの σ 。それをくりかえし、 σ の σ けるものがなくなるまで続ける。最終的に $i+1, i+1, \dots, i+1, i, \dots, i$ というものがある。 \hat{f}_i についてこの sequence の一番左の i (\circ でかこんだ i) に対応する w の i が $i+1$ にかわったものが $\hat{f}_i w$ である。もしも、そういう i がなければ $\hat{f}_i w = 0$ である。又、 \hat{e}_i についてこの sequence の一番右の $i+1$ (\circ でかこんだ $i+1$) に対応する w の $i+1$ が i にかわったものが $\hat{e}_i w$ である。もしも、そういう $i+1$ がなければ $\hat{e}_i w = 0$ である。(定理の証明は省略する)

Example. $w = A_3$ のとき

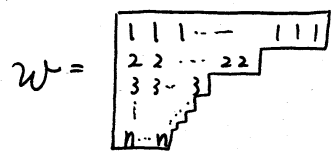


\wedge の \hat{f}_2, \hat{e}_2 の action を考える。

$2, 3$ を右上からよみと、 $7 > 6 > 5 > 4 > 3 > 2 > 1$ 。定理の rule により $3, 2, 2, 3, 2, 2, 3 \rightarrow 3, 2, 2$ となる。よってこのとき

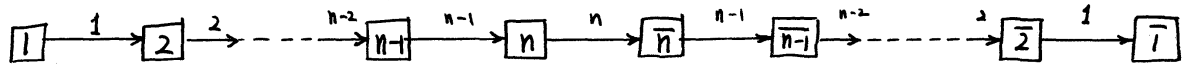


Remark. $\forall i$ に対して $\hat{e}_i w = 0$ となる $B(\lambda)$ の元 w は



という形のもののみである。

$\mathfrak{g} = C_n$ のとき $U_q(C_n)$ の vector 表現 $M(\lambda_1)$ の crystal graph は次のようにかける。



よる。 A_n の場合と同様に tensor 積を利用してつみ上げて一般の表現の crystal graph が構成される。又、 B_n, D_n の場合、 vector 表現だけでなく spin 表現も組み込む必要があるため、記述は A, C 型にくらばやや複雑になる。

crystal graph は次のような応用が考えられる。

「 $u \in B(\lambda), v \in B(\mu)$ で v_i に対し $\varepsilon_i(u \otimes v) = 0$ をみたす u, v を確定せよ。」

よは、すなわち $M(\lambda) \otimes M(\mu)$ の highest weight vector を確定せよというこで、 $M(\lambda) \otimes M(\mu)$ がどのように分解するかという \mathfrak{gl} の場合の Littlewood Richardson rule を与えることになる。現在 $\mathfrak{g} = A_n, B_n, C_n, D_n$ のとき、それぞれ crystal graph を利用して上記の u, v を確定する手続きが得られてる。

参考文献

- [K]. Masaki Kashiwara. "Crystalizing the q -analogue of universal enveloping algebra" RIMS preprint 676 (to appear in C.M.P.)