

## Euler の恒等式と有限古典群

上智大・理工 篠田健一

Ken-ichi Shinoda

次の恒等式は Euler により示されたものとして、良く知られて  
いる [Hardy - Wright, Theory of Numbers, Chap. 19]:

$$(GL) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x)^2(1-x^2)^2 \cdots (1-x^m)^2} = \prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n)^{-1},$$

$$(U) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{m^2}}{(1-x^2)(1-x^4) \cdots (1-x^{2m})} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^{2n+1}),$$

$$(Sp) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)} = \prod_{n=1}^{\infty} (1+x^n),$$

$$(O) \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^m)} = \prod_{n=0}^{\infty} (1+x^n).$$

これらの恒等式が有限古典群の数え上げの問題として、以下  
の様に解釈できることを示すことが、この講演の一つの目的  
である。

$V$  を有限体  $\mathbb{F}$  上の  $n$  次元ベクトル空間とし、 $G \in V$  に自然  
に作用している有限古典群とする。  $G = GL(V)$ ,  $Sp(V)$  また  
は  $O(V)$  のとき  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_q$  とし、  $G = U(V)$  のとき  $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{q^2}$   
とする。さらに、 $\mathcal{L}(V)$  で  $V$  の部分空間全体のなる lattice  
を表し、また  $g \in G$  に対し、  $V^g = \{v \in V \mid gv = v\}$   
 $= \text{Ker}(g-1)$ ,  $W \in \mathcal{L}(V)$  に対し、  $D_G(W) = \{g \in G \mid V^g = W\}$   
と置く。

問題 1.  $d_G(W) := |D_G(W)|$  を求めよ。

$G$  は  $\mathcal{L}(V)$  に自然に作用している。  $W \in \mathcal{L}(V)$  の  $G$ -軌道  $\mathcal{E}[W]$  と表すとき、どの場合でも  $\text{Stab}_G(W) = \{g \in G \mid gW = W\}$  はよく解るので、  $D_G(\mathcal{E}[W]) = \{g \in G \mid V^g \in \mathcal{E}[W]\}$  とおくと、問題 1 は次の問題 2 と同値である。

問題 2.  $d_G(\mathcal{E}[W]) := |D_G(\mathcal{E}[W])|$  を求めよ。

この問題に対し、 $\mathcal{L}(V)$  上の交代の逆転公式、 $G$  の部分群  $\text{Stab}_G(W)$  などの性質を用い、きつい形式で答を付与できることを示す。特に

$$d_G(m) = \sum_{W \in \mathcal{L}(V), \dim W = m} d_G(W)$$

$$P_n^{(G)}(m) = |G|^{-1} d_G(m)$$

$$P_\infty^{(G)}(m) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n^{(G)}(m)$$

( $\text{GL}, \text{U}, \text{Sp}, \text{O}$  の場合を示す)

と示す。

定理  $P_\infty^{\text{GL}}(m) = \frac{\chi^{m^2}}{(\chi)_m^2} (\chi)_\infty$ ,  $P_\infty^{\text{U}}(m) = \frac{\chi^{m^2}}{(\chi^2)_m} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \chi^{2n+1})^{-1}$ ,

$$P_\infty^{\text{Sp}}(m) = \frac{\chi^{\frac{1}{2}(m^2+m)}}{(\chi)_m} \prod_{n=1}^{\infty} (1 + \chi^n)^{-1}, \quad P_\infty^{\text{O}}(m) = \frac{\chi^{\frac{1}{2}(m^2-m)}}{(\chi)_m} \prod_{n=0}^{\infty} (1 + \chi^n)^{-1}.$$

ここで  $\chi = q^{-1}$  とあり、 $(\chi)_m = (1-\chi)(1-\chi^2)\dots(1-\chi^m)$  とある。

従って冒頭の恒等式は  $\chi = q^{-1}$  のとき  $\sum_{m=0}^{\infty} P_\infty^{(G)}(m) = 1$

と同値である。詳細は次の論文で発表予定。

A. Rudvalis - K. Shinoda, On portions of some subsets in finite classical groups (in preparation).