

## 制約条件付きの構造形態解析

東大生研 半谷裕考 (Yasuhiko Hangai)

### 1. 研究目的

構造物や機器を設計する場合における最適設計問題を分類すると [1]、

(a) 構造種類の選定

(b) 形態設計

(b-1) 位相決定問題

(b-2) 寸法決定問題

(c) 材料設計

となる。本論文では、(b-2)項の寸法決定問題、言い換えると、構造形態の決定問題を扱う。形態設計に関する既往の研究としては、梅谷の生長変形法 [2]、尾田によるパターン変換法 [3]、中桐の感度解析法の応用 [4]、瀬口の逆変分原理による一連の研究 [5~7]、等がある。

形態解析を行う場合には目標とする量、あるいは、形態が

必要である。既往の研究の多くは、最小重量、最大剛性、あるいは、一様応力、一様ひずみエネルギー密度、等価目標としている。本論文では変形の形態（変形モードで代表される）を目標とする形態解析をおこなう。

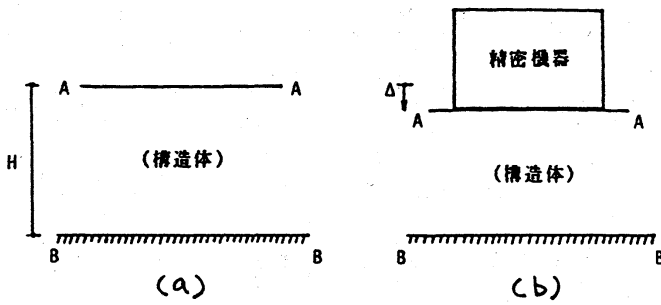
簡単な具体例で研究の目的を説明する。図-1に示すように、精密機器を支持する平板 A-A を床 B-B から H の距離を離して設計する。平板 A-A 上に精密機器を載せると平板 A-A は変形するが、変形後も平面を保つようにしたい。つまり、変形前の位置から変形後の位置 A'-A' への変位  $\Delta$  は許容するが、A'-A' の平面保持を制約条件として A-A と B-B 間の構造を設計することになる。A-A を支持する構造としては、ラーメン構造、板ヤシエルの連続体構造、等、種々考えられるが、本論文では、図-1に示すように、トラス構造で実現することとする。前述の (a), (b) のステップを考慮し、次の構造設計フローを考える。

### Step-1: 位相決定段階

構造を構成する位置関係と節点数および部材数の決定（図-1の (c), (d) の2個のトラス構造は同一位相である）

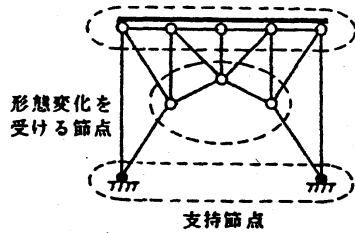
### Step-2: 節点の分類段階

節点を変形モードの制約を受ける節点、形態変



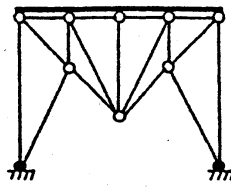
(a)

(b)

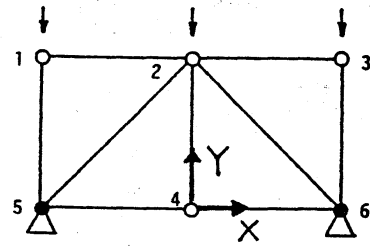


支持節点

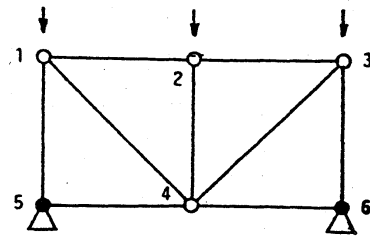
(c)



(d)



(a) Type-1



(b) Type-2

図-1: 変形モードの制約と支持構造の設計

図-2: 解析モデル

化を受ける節点、支持節点、の3種類に分類する(図-1(c))。

Step-3: 部材形状の決定段階

節点間につながる部材の断面形状の決定

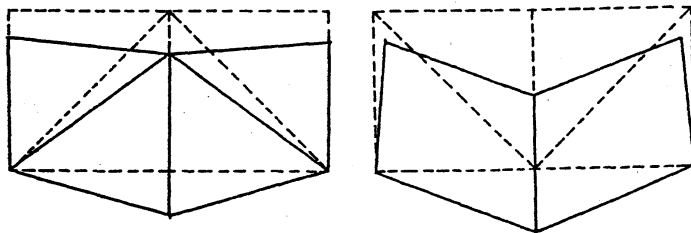
Step-4: 形態決定

変形モードを制約条件とする「形態変化を受ける節点」の位置決定

本論文の目的は Step-4 における形態決定法の定式化と数値解析法の開発にある。形態決定は形態を表現する座標位置が未知量となっており、強い非線形挙動を示す。

図-2の2個のトラス構造を具体例として、本研究で扱う

形態解析の問題点を考えこみる。節点  $i$  ( $i = 1 \sim 4$ ) の鉛直方向の変位を  $DY(i)$  と表すと、上弦節点 1, 2, 3 の鉛直方向変位は  $DY(1), DY(2), DY(3)$  となる。このとき、変形後において、節点 1, 2, 3 が同一直線上に並び変形モードを制約条件として設定する。つまり、 $DY(1) = DY(2) = DY(3) = \alpha$ 。図-2 に示すように、上弦節点に同一の鉛直方向荷重を作用する。この場合、節点 1, 2, 3 の鉛直方向変位は図-3 のようになり、制約条件を満足しない。そこで、4 節点を上下 (Y 方向とみる) に変化することによって形態を変化させて、制約条



(a) Type-1

(b) Type-2

図-3: 変形モード

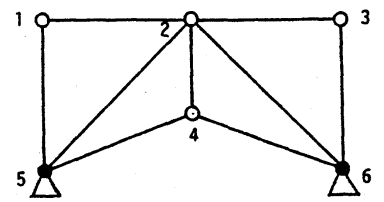
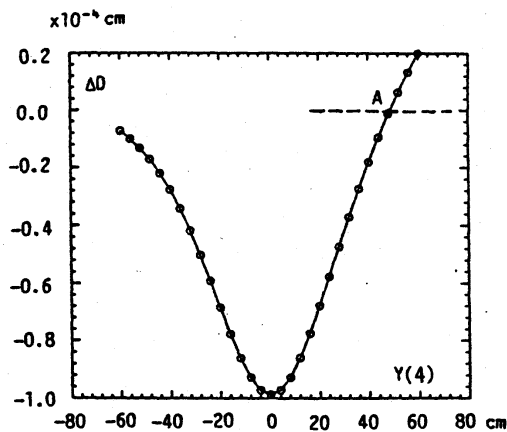
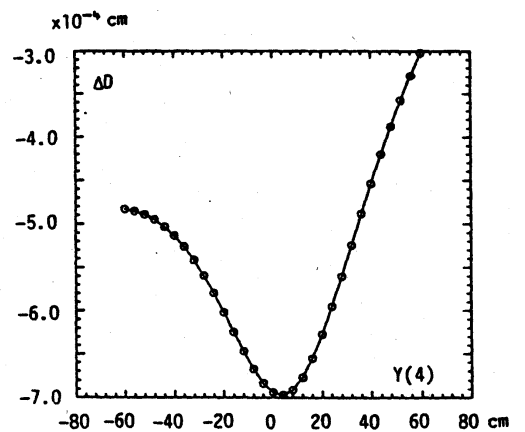


図-5: 解形形態



(a) Type-1



(b) Type-2

図-4:  $Y(4)$  と  $\Delta D$  の関係

件を満足する解が存在するかどうかを調べてみる。4節点のY座標値を $Y(4)$ とし、 $Y(4)$ の変化に対する $\Delta D = DY(2) - DY(1)$ を図示すると図-4となる。図中、縦軸の値が零の位置で、 $DY(1) = DY(2) = DY(3)$ となり、制約条件を満足することになる。このときのトラス構造の形態を図-5に示す。一方、図-4(b)に示すように、Type-2の場合には縦軸の値が零となる位置は存在しない。つまり、Type-2では解が存在しないことを意味している。

以上の具体例から理解できるように、本論文における形態解析においては、

(1) 解を有する条件：解が存在するかどうかを判定する存在条件の定式化

(2) 解を求める解析法

が要求される。

## 2. 存在条件

有限要素法、差分法、ガラーキン法、等を利用して荷重-変位関係式を求め、境界処理を行うと次式が得られる。

$$\{F\} = [K]\{D\} \quad (1)$$

ここに、 $\{F\}$ : 荷重ベクトル、 $[K]$ : 剛性マトリクス、 $\{D\}$ : 変位ベクトル、である。全節点の座標値を3個のグループに分類

する (図-6)。つまり、

$x_n$  : 変形モードの制約を受ける節点座標値

$x_f$  : 自由節点座標値 (形態変化を受ける座標値)

$x_c$  : 固定節点 (境界節点) 座標値

$x_n, x_c$  は形態解析において、一定  
であると仮定すると、剛性マトリク  
ス  $[K]$  は  $x_f$  の関数となる。つまり、

$$K = K(x_f) \quad (2)$$

そこで、変形モードの制約を受ける  
節点座標値  $x_n$  と自由節点座標値  $x_f$

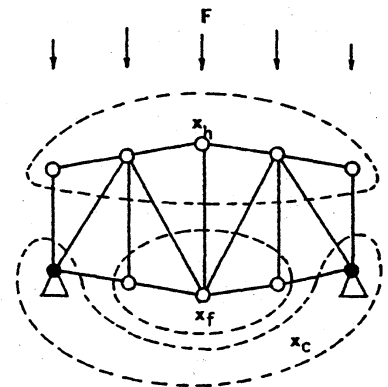


図-6: 節点の分類

に対応して、変位ベクトル  $D$  を  $D_n$  と  $D_f$  に分割する。  $D_n$  と  $D_f$   
の自由度数を  $n$  および  $f$  とすると、全自由度数は

$$n = n + f \quad (3)$$

となる。  $D_n$  と  $D_f$  に対応して、剛性マトリクスと荷重ベクトルを次式のように分割しておく。

$$\begin{bmatrix} K_{nn} & K_{nf} \\ K_{fn} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_n \\ D_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_n \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (4)$$

制約条件として与える変形モードを  $\{D_0\}$  とする。このとき、

$$\{D_n\} = \alpha \{D_0\} \quad (5)$$

ここに、  $\alpha$  は変形モードの大きさを表すパラメータである。

$D_0$  を制約条件として与えることにより、  $D_n$  の自由度数  $n$  は 1

に減少する。そのため、全未知量数は

$$m = 1 + f \quad (6)$$

となる。(5)式を(4)式に代入すると、

$$[K_{hh}]\{D_h\} = \alpha [K_{hh}]\{D_0\} \quad (7)$$

$$[K_{fh}]\{D_h\} = \alpha [K_{fh}]\{D_0\} \quad (8)$$

よこぞ、

$$\{h_h\} = [K_{hh}]\{D_0\} \quad (9)$$

$$\{h_f\} = [K_{fh}]\{D_0\} \quad (10)$$

と置くと、(4)式は次式となる。

$${}^n \begin{bmatrix} h_h & K_{hf} \\ h_f & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ D_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_h \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (11)$$

上式の係数マトリクスは  $n \times m$  長方マトリクスである ( $n > m$ )。

上式をまとめて2次式で表しておく。

$$[A]\{U\} = \{F\} \quad (12)$$

上式において、 $[A]$  は(2)式に対応して、 $x_f$  の関数となる。

つまり、

$$A = A(x_f) \quad (13)$$

(13)式において、 $x_f$  を変化させるとき、(12)式が解を持つ必要十分条件は  $A$  の一般逆行列  $A^{-}$  を利用すると次式で与えられる [8, 9]。

$$[AA^{-} - I_n]\{F\} = \{0\} \quad (14)$$

こゝに、 $I_n$  は  $n \times n$  単位マトリクスである。(14)式が解の存在条件となる。

### 3. 形態解析法

(14)式の左辺を  $f(x_f)$  と置く。つまり、

$$f(x_f) = [A(x_f)A^{-1}(x_f) - I_n]\{F\} \quad (15)$$

(14)式より、解を  $\bar{x}_f$  とすると次式が成立することになる。

$$f(\bar{x}_f) = \{0\} \quad (16)$$

変形モードを制約条件とする構造形態解析は、(16)式を満足する座標値  $\bar{x}_f$  を求める問題に帰着できる。

以下、(16)式の数値解析法を述べる。そのため、 $x_f$  を  $x$  と表すことにする。(16)式の関数  $f(x)$  は  $x$  に関する非線形方程式となっており、解を直接求めることは出来ない。そこで、本論文では Newton-Raphson 法に基づく数値解析法により (16)式の解を求めることにする。

$x^{(r)}$  を近似解とし、 $x^{(r)}$  から微小位置  $\Delta x^{(r)}$  だけ離れた、改良された値を  $x^{(r+1)}$  とする。つまり、

$$x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(r)} \quad (17)$$

さらに、 $x^{(r+1)}$  の座標値は (16)式を満足するものと仮定すると

$$f(x^{(r+1)}) = \{0\} \quad (18)$$

上式に (17)式を代入し、Taylor 展開すると、



$$\begin{aligned}
 f(x^{(r+1)}) &= f(x^{(r)} + \Delta x^{(r)}) \\
 &= f(x^{(r)}) + \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] \{ \Delta x^{(r)} \} + \dots = \{ 0 \} \quad (19)
 \end{aligned}$$

上式において、 $x$  の成分による  $f$  の微分を  $\partial(\ )/\partial x$  で表現している。高次項を省略し、書き換えると

$${}^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right] \{ \Delta x^{(r)} \} = -f(x^{(r)}) \quad (20)$$

結局、上式より  $\Delta x^{(r)}$  を求めることにより  $x^{(r+1)}$  が (17) 式より得られることになる。この計算をある程度収束するまで繰り返すことにより、解  $\bar{x}$  が得られる。ここで、 $x$  (つまり、 $x_f$ ) の総数は  $f$  で、 $f$  は  $n \times 1$  ベクトルであるから、(20) 式の係数マトリクスは  $n \times f$  長方マトリクスである。係数マトリクスの一般逆行列を用いて、(20) 式を解くと、

$$\{ \Delta x^{(r)} \} = - \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]^{-1} f(x^{(r)}) \quad (21)$$

以上の定式化において最も重要な点は、(20) 式の係数マトリクスの作成とその一般逆行列の評価である。以下、係数マトリクスの定式化をおこなう。

(15) 式において、 $I_n$  と  $F$  は定行列および定ベクトルであるから、 $x$  の成分  $x_i$  による微分係数は零となる ( $i=1 \sim f$ )。よって、

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \left[ \frac{\partial A}{\partial x_i} A^{-1} + A \frac{\partial A^{-1}}{\partial x_i} \right] \{ F \} \quad (22)$$

上式において,  $\partial A^{-1}/\partial x_i \neq [\partial A/\partial x_i]^{-1}$  であるから,  $\partial A^{-1}/\partial x_i$  の評価を行う必要がある。そこで, この微分係数を求めるため, 若干の準備をしておく。(4), (7), (8), (11)式より,

$$\begin{bmatrix} K_{hh} & K_{hf} \\ K_{fh} & K_{ff} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_o & 0 \\ 0 & I_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ D_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_h \\ F_f \end{Bmatrix} \quad (23)$$

上式をまとめると

$$[K][S][U] = \{F\} \quad (24)$$

さらに, (11)式と比較すると, (12)式の係数マトリクスは

$$[A] = [K][S] \quad (25)$$

(23)式の  $D_o$  は列ベクトルであるから,  $[S]$  の独立なベクトルは  $D_o$  の 1 個と  $I_f$  の  $f$  個, つまり, (6)式で与えられる  $m = f + 1$  個となる。また,  $|K| \neq 0$  であるから, 結局, 次式が成立する。

$$\text{rank}(K) = n, \quad \text{rank}(S) = m \quad (26)$$

行列の積のランクに ついては次の公式がある。

$$\text{Max}(0, \kappa) \leq \text{rank}(KS) \leq \text{Min}(\text{rank}(K), \text{rank}(S)) \quad (27)$$

ここに,

$$\kappa = \text{rank}(K) + \text{rank}(S) - n \quad (28)$$

上式に (26) 式を代入すると  $\kappa = m$  となる。  $m < n$  であるから, (27) 式より,

$$\text{rank}(A) = m \quad (29)$$

上式が成立するとき, 次の関係が成立する[8]。

$$[A^-] = [A^T A]^{-1} A^T \quad (30)$$

$$[A^-][A] = [I_m] \quad (31)$$

$[B]$  を非特異正方マトリクス, つまり,  $\det(B) \neq 0$  とすると次式が成立している。

$$\frac{\partial B}{\partial x} = -B^{-1} \frac{\partial B}{\partial x} B^{-1} \quad (32)$$

上式の誘導には,  $[B][B^{-1}] = [I]$ ,  $[B^{-1}][B] = [I]$  の両式を利用している。しかし,  $[A]$  に対しては, (31)式は成立しているが,  $[A][A^-] = [I_n]$  は成立していない。もし, この式が成立していると (15)式の  $f(x_f)$  は常に零となり, どのような形態でも解となってしまう。

(30)式の両辺を  $x_i$  で微分すると,

$$\frac{\partial A^-}{\partial x_i} = \frac{\partial [A^T A]^{-1}}{\partial x_i} A^T + [A^T A]^{-1} \frac{\partial A^T}{\partial x_i} \quad (33)$$

(32)式より,

$$\frac{\partial [A^T A]^{-1}}{\partial x_i} = -[A^T A]^{-1} \frac{\partial [A^T A]}{\partial x_i} [A^T A]^{-1} \quad (34)$$

上式を (33)式に代入すると,

$$\frac{\partial A^-}{\partial x_i} = -[A^T A]^{-1} \frac{\partial [A^T A]}{\partial x_i} [A^T A]^{-1} A^T + [A^T A]^{-1} \frac{\partial A^T}{\partial x_i} \quad (35)$$

上式を (22)式へ代入し, (30)式を利用し整理すると,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = [(I - AA^-) \frac{\partial A}{\partial x_i} A^- + (\frac{\partial A}{\partial x_i} A^-)^T (I - AA^-)] \{F\} \quad (36)$$

以上より、 $\partial f / \partial x_i$  は  $\partial A / \partial x_i$  によつて得られることとなる。

次に、 $\partial A / \partial x_i$  の評価法を述べる。(25)式において、行列[S]は足行列であるから、

$$\frac{\partial A}{\partial x_i} = \frac{\partial K}{\partial x_i} [S] \quad (37)$$

剛性マトリクス[K]は部材剛性マトリクス  $k_a$  を全部材に対して組み込むことにより得られる。同様にして、 $\partial K / \partial x_i$  は部材剛性マトリクスを  $x_i$  で微分して作成した部材の接線剛性マトリクスを組み込むことにより得られる。

#### 4. 数値解析例

前章までの定式化の有効性を確かめるため、図-7に示すトラス構造を数値解析する。節点1~5の鉛直方向変位が同一となる変形モードを制約条件とし、節点7~9のy方向座標値を形態変化のパラメータとして採用している。初期形態を図-7に示す形態としたときのステップ数と  $|f(x)|$  の関係を図示すると

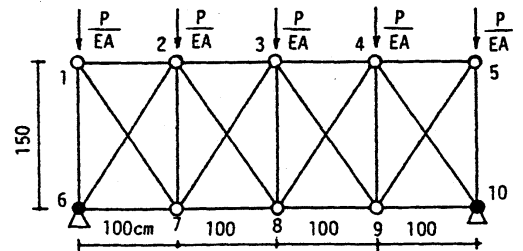


図-7: 解析モデル

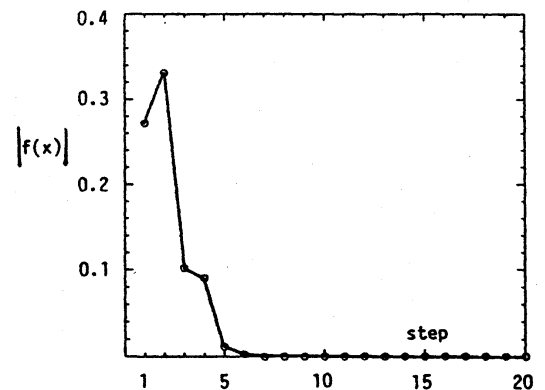


図-8: ステップ数と  $|f(x)|$

図-8となる。この図より、7ステップ程度で収束している様子がわかる。図-9, 図-10はステップ数と節点7, 8のy方向への移動量の関係を示す。同図より、節点7, 8の座標値は  $Y(7) = Y(9) = 45.3 \text{ cm}$ ,  $Y(8) = 131.2 \text{ cm}$  となる。これを図示すると、図-11の解形態となる。

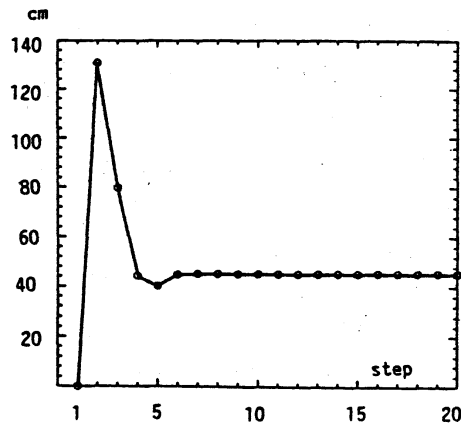


図-9: ステップ数と  $Y(7)$

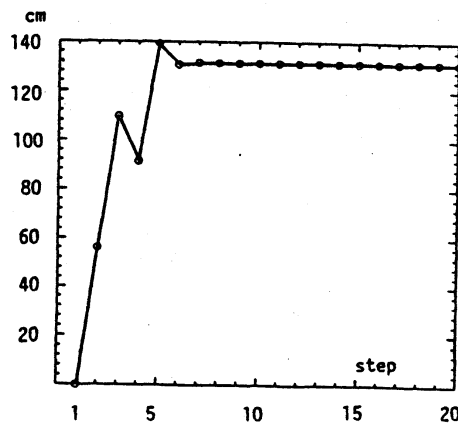


図-10: ステップ数と  $Y(8)$

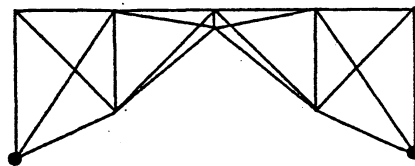


図-11: 解形態

## 5. 結果

本論文では、変形モードを制約条件とする形態解析法を述べた。

この問題は強い非線形問題である。

そのため、「解の存在条件」が重要な検討課題であり、また、定式化

を行う場合の鍵ともなってくる。

本論文では、 $n$ 自由度を有する  $m$ 個の連立一次方程式系の解を持つ条件として、一般逆行列を利用した定式化を行った。

この定式化の結果として、形態を表す座標位置を未知量とする基礎方程式を誘導している。誘導した基礎方程式は非線形方程式であり、Newton-Raphson法による数値解析を試みてい

る。その際、一般逆行列の導関数が必要となり、その定式化も行った。数値解析結果、本論文で提案した方法は、収束、また、解の精度の面から有用であることが示された。

本方法は、座標関数を未知量とする形態解析にも応用が可能である。本論文は文献[10, 11]を再構成したものである。

### 参考文献

- [1] 尾田：機械構造設計の最適化手法とその応用、機械の研究、オ40巻5号、1988～オ41巻3号、1989.
- [2] 梅谷：骨の形態と生長変形法、日本機械学会誌、オ79巻693号、1976, pp. 749-754.
- [3] 尾田：有限要素法による強度的最適形状の決定法、日本機械学会誌、オ79巻691号、1976, pp. 4-12.
- [4] 中桐、野口、谷：応力に基づく構造形状の有限要素法シミュレーション、構造工学における数値解析法シンポジウム論文集、オ12巻、1988, pp. 97-102.
- [5] 瀬口、多田：逆変分原理による構造物の形状決定問題、日本機械学会論文集、オ44巻381号、1978, pp. 1469-1477.
- [6] 塚本、瀬口：複合する場合における形状決定問題、日本機械学会論文集(B編)、48巻430号、1982, pp. 1165-1173.
- [7] 瀬口、多田、毛馬：逆変分原理による非保存構造系<sup>1</sup>の形状

決定, 日本機械学会論文集(A編)、50巻452号、1984, pp. 679-686.

[8] Graubill, F. A.: "Introduction to Matrices with Applications in Statistics," Wadsworth Publishing Company, Inc., 1969.

[9] 半谷: 一般逆行列と構造解析への応用, 才22回生研講習会テキスト, 1983, pp. 179-212.

[10] 半谷, 関: 立体トラス構造のホモロガス変形を制約条件とする形態設計法, 日本機械学会シンポジウム講演論文集(No.890-34), 1989, pp.65-70.

[11] 半谷, 関: ホモロガス変形を制約条件とする立体トラス構造の形態解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 405号, 1989, pp.97-102.