数理解析研究所講究録
第737巻 1990年 65-73

A new generalization of Verma modules, and b-functions.

京大教養 行者明彦 (Akihiko Gyoja)

はじめに、記号を用意する。

G : 複素 reductive Lie 群 $\qquad \mathfrak{g} = \mathrm{Lie}(G)$

B : Borel 部分群 $\qquad \underline{b} = \mathrm{Lie}(B)$

$T \subset B$: 極大トーラス $\qquad \underline{t} = \mathrm{Lie}(T)$

$\underline{t}^\vee = \mathrm{Hom}(\underline{t}, \mathbb{C})$

$R \subset \underline{t}^\vee$: ルート系

$\mathfrak{g}(\alpha)$: ルート スペース

$R_+ = \{\alpha \in R \mid \mathfrak{g}(\alpha) \subset \underline{b}\}$ $\qquad \rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha \in R_+} \alpha$

$\Pi \subset R_+$: 基

s_α $(\alpha \in R)$: 鏡映

$S = \{s_\alpha \mid \alpha \in \Pi\}$

$W = N_G(T)/T$: ワイル群

$l : W \to \{0, 1, 2, \cdots\}$ length function

ここから、$I \subset S$ を ひとつ、固定する。

W_I : I から生成される W の部分群

Π_I : $\{\alpha \in \Pi \mid s_\alpha \in I\}$.

R_I : Π_I から生成されるRの部分ルート系.

$(W/W_I)_\ell = \{ x \in W \mid x$ は xW_I の中で最長元 $\}$

w_I : W_I の最長元.

$\underline{l} = \underline{l}(I) = \underline{t} + \sum_{\alpha \in R_I} \mathfrak{g}(\alpha)$

$\underline{u}_\pm = \underline{u}_\pm(I) = \sum_{\alpha \in R_+ \setminus R_I} \mathfrak{g}(\pm\alpha)$ （複号同順）

$\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(I) = \underline{l} + \underline{u}_+$

$\underline{t}_I^\vee = \{ W_I$-不変指標 $\lambda \in \underline{t}^\vee \}$

$\underline{n}_\pm = \sum_{\alpha \in R_+} \mathfrak{g}(\pm\alpha)$

L, $U_\pm$, P etc. : $\underline{l}$, $\underline{u}_\pm$, $\mathfrak{p}$ etc. に対応する部分群

$Y = G/P$

$y_0 \in Y$: $e \in G$ に対応するYの点

以上の記号を用いる.

$(\lambda, \mathbb{C})$ を$\mathfrak{p}$の一次元表現（指標）とする。この時

$$M(\lambda, \mathfrak{p}) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p}), \lambda} \mathbb{C}$$

とおき. これを <u>generalized Verma module</u> とよぶ. 特に $\mathfrak{p} = \underline{b}$ の時. $M(\lambda, \underline{b})$ を. <u>Verma module</u> とよぶ。（ここで. $U(\cdot)$ は. $\mathbb{C}$上の enveloping algebra.）

Brylinski-Kashiwara 及び Beilinson-Bernstein による Kazhdan-Lusztig 予想の証明において.

(*) $\{$ Verma modules $\} \longleftrightarrow \{$ B-orbits in $G/B \}$

という対応が、重要な役割をはたした。同様の意味で、
「G/P 上の、B-orbits に対応する $\mathfrak{g}$-module は、何か？」
という問題を考えよう。最初に思いつく解答は、generalized Verma module であろうが、実は、これでは足りない。

(**) $\{$ generalized Verma modules $\} \subsetneqq \{ ? \} \leftrightarrow \{$ B-orbits in $G/P \}$.

我々の、第一のテーマは、上の $\{?\}$ を構成し、その諸性質を調べることである。（定理 1 ～ 4）

簡単なことであるが、$U_{-}y_0$ は、$Y = G/P$ の open dense な部分集合であり、すべての B-orbits と、交わる。また、この open set $U_{-}y_0$ は、L-stable であり、L の作用する空間として（L, ad, $\underline{u}_{-}$）と、同一視できる。後者は、かなり深い意味で、概均質ベクトル空間と似ている。たとえば、
・（L, ad, $\underline{u}_{-}/[\underline{u}_{-}, \underline{u}_{-}]$）は、概均質ベクトル空間.（Vinberg）
・"b - 函数が、具体的に求まる."（Kashiwara）　等.
従って、対応 (**) を通じて、generalized Verma module や、その一般化に関する研究は、かなりの程度まで、

$$(L,\ \text{left action},\ U_{-}y_0) \simeq (L,\ \mathrm{ad},\ \underline{u}_{-})$$

の研究に帰着できるはずであり、その研究には、概均質ベクトル空間の理論における手法が有効になると期待される。我々の第二のテーマは、generalized Verma module 等の submodules にかかわる研究が、完全に $(L,\ \mathrm{ad},\ \underline{u}_{-})$ の研究に帰着できることを示すことである。(定理5.) この直接の応用として、generalized Verma module の既約性と、b-函数の関係が得られる。この結果は、Suga: 数理研講究録 718 (commutative parabolic case) の一般化になっている。実際、この研究を、はじめた動機は、Suga の結果を、統一的な視点から理解したい、ということであった。

次に、正確な結果を述べる。まず、(**) の $\{?\}$ を、どのように構成するか、というところから始める。

$$A = U(\underline{t}) / \sum_{H\in\underline{t},\ w\in W_I} U(\underline{t})(H - w(H))$$

$$= U(\underline{t}) / \sum_{\alpha\in\Pi_I} U(\underline{t})\,\alpha^{\vee}$$

$$c:\ \underline{t} \longrightarrow A \qquad \text{自然な写像}$$

とし、c から誘導される準同型

$$A \otimes_{\mathbb{C}} U(\underline{b}) =: U_A(\underline{b}) \longrightarrow A$$

も、同じ文字 c であらわす。c を <u>universal</u> <u>W_I-invariant</u>

character of $\underline{t}$ と呼ぶ。

$$M_A(w(c-\rho)-\rho,\ \underline{b}) := U_A(\mathfrak{g}) \underset{U_A(\underline{b}),\ w(c-\rho)-\rho}{\otimes} A$$

とおくと、$U_A(\mathfrak{g})$- *module* $M_A(w(c-\rho)-\rho,\ \underline{b})$ は、$1\otimes 1$ から生成される自由 $U_A(\mathfrak{n}_-)$- 加群になる。

$$M_A(w(c-\rho)-\rho,\ \underline{b})_+ := U_A(\mathfrak{n}_-)\mathfrak{n}_- \cdot (1\otimes 1)$$

とし、$J_A(w)$ を $M_A(w(c-\rho)-\rho,\ \underline{b})_+$ に含まれる最大の $U_A(\mathfrak{g})$- *submodule* とする。

$$M_A(w,\ c,\ \mathfrak{p}) = M_A(w(c-\rho)-\rho,\ \underline{b})/J_A(w)$$

とする。$\lambda\in \underline{t}_I^\vee$ は、$\mathrm{Hom}(A,\mathbb{C})$ の元を定める。それも、同じ文字 λ であらわし

$$M(w,\lambda,\mathfrak{p}) = M_A(w,\ c,\ \mathfrak{p}) \underset{A,\lambda}{\otimes} \mathbb{C}$$

とおく。この $M(w,\lambda,\mathfrak{p})$ が、この研究の対象である。特に、$w\in (W/W_I)_\ell$ の場合が、興味の中心である。

次に、$M(w,\lambda,\mathfrak{p})$ の性質について述べる。大すじとしては、その性質は、通常の *Verma module* と、よく似ている。ただし、その証明には、今のところ D- *module* の一般論が、不可欠であり、以下の定理 1 に対応する結果が *Verma module* の場合には、ごく初等的に証明できたことと、著しい対照を

なす。以下、$\lambda \in \underline{t}_I^\vee$, $w \in (W/W_I)_\ell$ とする。

<u>定理1</u> $\mathrm{ch}\ M(w,\lambda,\mathfrak{p}) = e^{w(\lambda-\rho)-\rho} \prod_{\alpha \in R_+ \setminus wR_I} (1-e^{-\alpha})^{-1}$.
但し, ch は (formal) character.

<u>定理2</u> $\langle \lambda-\rho, \alpha^\vee \rangle \neq 1, 2, \cdots \qquad \forall \alpha \in R_+$
であれば、$\mathfrak{g}$-module として、

$$M(w,\lambda,\mathfrak{p})^* \cong H_{Bwy_0}^{\mathrm{codim}_Y Bwy_0}(Y, \mathcal{O}_Y)$$

但し、$\alpha^\vee$ は coroot, * は dual $\mathfrak{g}$-module をあらわす。また、右辺の local cohomology は、

$$H_{Bwy_0}^{\mathrm{codim}_Y Bwy_0}(wU_-y_0,\ \mathcal{O}_Y|wU_-y_0)$$

と同一視し、$\mathcal{O}_Y|_{wU_-y_0}$ は、自然な仕方で、$\mathcal{D}_Y(\lambda)$-module と思う。ここで、$\mathcal{D}_Y(\lambda)$ は、λ でひねった twisted ring of differential operators. (cf. Beilinson-Bernstein : C. R. Acad. Sci. Paris 292, Ser. I (1981), 15-18. Kashiwara : Representation theory and $\mathcal{D}$-modules ···· の記号を用いると $\mathcal{D}_Y(\lambda) = \underline{A}_Y(\lambda)$.)

<u>定理3</u> (1) $M(w,\lambda,\mathfrak{p}(I))$ が、generalized Verma module であるための必要十分条件は、

$$J := w I w^{-1} \subset S.$$

(2) 上の条件が、みたされるとすると、$w(\lambda-\rho)-\rho$ は、W_J-不変で、$M(w, \lambda, \mathfrak{p}(I))$ は、generalized Verma module $M(w(\lambda-\rho)-\rho, \mathfrak{p}(J))$ に、等しい。

(3) 逆に、generalized Verma module $M(\lambda, \mathfrak{p}(I))$ は、かならず

$$M(\lambda, \mathfrak{p}(I)) = M(w_S, w_S\lambda, \mathfrak{p}(w_S I w_S))$$

とあらわせる。

<u>定理4</u> $W_I^{(i)} = \{ x \in W_I \mid \ell(x) = i \}$

$$C_i = \bigoplus_{x \in W_I^{(i)}} M(wx(\lambda-\rho)-\rho, \underline{b})$$

: Verma modules の直和

$$r = \ell(w_I)$$

とすると、

$$0 \leftarrow M(w, \lambda, \mathfrak{p}) \leftarrow C_0 \leftarrow C_1 \leftarrow \cdots \leftarrow C_r \leftarrow 0.$$

という形の $M(w, \lambda, \mathfrak{p})$ の resolution が、得られる。特に、

$$\dim \mathrm{Tor}_i^{\mathfrak{n}^-}(\mathbb{C}, M(w, \lambda, \mathfrak{p})) = \mathrm{card}\, W_I^{(i)}.$$

以上は、結果を見る限り、Verma module の場合と、たいして、差はなかった。

最後に、$M(w, \lambda, \mathfrak{p})$ の submodules と、b-函数の関係について述べる。

定理5

$L_1 = \{ U(\mathfrak{g})\text{-}submodules\ of\ M(w, \lambda, \mathfrak{p}) \}$

$L_1^* = \{ U(\mathfrak{g})\text{-}submodules\ of\ M(w, \lambda, \mathfrak{p})^* \}$

$L_2 = \{ coherent\ \mathcal{D}_X(\lambda)\text{-}submodules\ of\ q^*\mathcal{Y}(w) \}$

$L_3 = \{ coherent\ \mathcal{D}_Y(\lambda)\text{-}submodules\ of\ \mathcal{Y}(w) \}$

$L_4 = \{ coherent\ (\mathcal{D}_Y(\lambda)|_{U_- y_0})\text{-}submodules\ of\ \mathcal{Y}(w)|_{U_- y_0} \}$.

とする。但し、

$X = G/B \xrightarrow{q} Y = G/P$ natural projection

$\mathcal{Y}(w) = \mathcal{H}^{\mathrm{codim}_Y B w y_0}_{B w y_0}(\mathcal{O}_Y |_{w U_- y_0})$

$\mathcal{O}_Y |_{w U_- y_0}$: $\mathcal{D}_Y(\lambda)$-module

もし

$\langle \lambda - \rho, \alpha^\vee \rangle \neq 0, 1, 2, \cdots \qquad \forall \alpha \in R_+$

であれば、包含関係による順序集合として、

$L_1^{op} \simeq L_1^* \simeq L_2 \simeq L_3 \simeq L_4$.

注意 $\mathcal{D}_Y(\lambda)|_{U_- y_0} \simeq \mathcal{D}_Y|_{U_- y_0}$ であり、同型も具体的に記述できるので、L_4 はさらに、

$L_5 = \{ coherent\ (\mathcal{D}_Y|_{U_- y_0})\text{-}submodules\ of\ 1_{-\lambda} \otimes (\mathcal{Y}(w)|_{U_- y_0}) \}$

と同型になる。($1_{-\lambda}$ の定義は省く。) このようにして、$M(w, \lambda, \mathfrak{p})$ の、submodule に関する研究は、$(L, ad, \underline{u}_-)$ 上

の．通常の$\mathcal{D}$-moduleの研究に帰着した。このような$\mathcal{D}$-moduleの単純性が，b-函数を用いて判定できるということは，目新しいことではない。また，その b-函数の具体形は，Kashiwara: Adv. Studies in Pure Math. 6 (1985), 67-81. に与えられている。（但し，$w = w_S$ の場合．）

<u>注意</u>．有限次元既約 $U(\mathfrak{p})$-module F に対して，$U(\mathfrak{g}) \underset{U(\mathfrak{p})}{\otimes} F$ も，generalized Verma module とよばれる。しかし，$\dim F > 1$ なら，決して，$M(w, \lambda, \mathfrak{p}(J))$ と，同型にならないことが，示せるので，ここでは扱わなかった。