数理解析研究所講究録
第 737 巻 1990 年 106-120

Jacobi形式とtheta lifting

三重大・教育　菅野孝史（Takashi Sugano）

2次Siegel尖点形式（重さk）の空間においては、Maass spaceとよばれる特別な部分空間が存在し、それがSaito-Kurokawa lifting Iの像と一致していることが知られている。また、Kohnen [05] により、$SL_2(\mathbb{Z})$に関する重さ$2k-2$の尖点形式fがHecke作用素の同時固有関数であるとき、$I^*I(f)$（I^*はIの随伴写像）は$I(f)$の定数倍になり、その定数はfのL関数の特殊値の言葉で記述される。この結果をIV型領域の場合に一般化する。この場合、lifting Iは、Oda [11], Rallis-Schiffmann [12]により構成されていることに注意する。ただし、ここでは全ての議論をJacobi形式の立場ですすめる。

§1. Jacobi形式

Sを、m次even integralな正定値対称行列で、$L=\mathbb{Z}^m$が極大$\mathbb{Z}$-integral lattice となるものとする。符号$(2, m+2)$

の対称行列 $Q=\begin{bmatrix} & & J \\ & -S & \\ J & & \end{bmatrix}$，$J=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ を考え、その直交群を G であらわす。

$$H_S(\mathbb{Q})=\left\{[\xi,\eta,\zeta]=\begin{bmatrix} 1 & & * & * & * \\ & 1 & * & * & \zeta \\ & & 1_m & {}^t\xi & {}^t\eta \\ & & & 1 & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}\in G\ ;\ \xi,\eta\in V_{\mathbb{Q}}=\mathbb{Q}^m,\ \zeta\in\mathbb{Q}\right\}\ と$$

$$G'(\mathbb{Q})=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & -b & & \\ -c & d & & \\ & & 1_m & \\ & & & \begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix} \end{bmatrix}\in G\ ;\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\in SL_2(\mathbb{Q})\right\}\cong SL_2(\mathbb{Q})$$

で生成される G の部分群を G_S とおく。G_S は H_S と G' の半直積（$H_S\lhd G_S$）であり、その中心は H_S の中心 $Z_S=\{[0,0,\zeta]\}$ と一致している。特に G_S は non-reductive である。まず Jacobi form と呼ばれる、G_S 上の保型形式を導入することから始める。

G_S の実点のなす群 $G_{S,\infty}$ は、$\mathcal{D}_S=\{Z=(z,W)\ ;\ z\in\mathfrak{h},\ W\in\mathbb{C}^m\}$（$\mathfrak{h}$ は上半平面）に、

$$(1.1)\quad [\xi,\eta,\zeta]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\langle(z,W)\rangle=\left(\frac{az+b}{cz+d},\ W\frac{1}{cz+d}+\xi\frac{az+b}{cz+d}+\eta\right)$$

により推移的に作用している。一点 $Z_0=(i,0)$ の固定化部分群は、$Z_{S,\infty}\cdot SO(2)$ である。自然数 k,N に対し、

$$(1.2)\quad J_{k,N}\left([\xi,\eta,\zeta]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},(z,W)\right)=(cz+d)^k\,\mathbf{e}\Big[N\Big\{-\zeta+\frac{c}{2}S[W]\frac{1}{cz+d}-S(\xi,W)\frac{1}{cz+d}-\frac{az+b}{cz+d}\frac{1}{2}S[\xi]\Big\}\Big]$$

は、$G_{S,\infty}\times\mathcal{D}_S$ 上の正則保型因子となっている。そこで、$\Gamma_S=G_{S,\infty}\cap SL_{m+4}(\mathbb{Z})$ に関する weight k, index N の Jacobi cusp form の空間 $\mathfrak{S}_{k,N}(\Gamma_S)$ を、次の条件をみたす $\mathcal{D}_S$ 上の正

則関数 f の全体として定義する： $^{\forall}\gamma \in \Gamma_S$, $^{\forall}Z \in \mathfrak{D}_S$ に対し、
$f(\gamma\langle Z\rangle) = J_{k,N}(\gamma, Z) f(Z)$ 及び $\sup_{g\in G_{S\infty}} |f(g\langle Z_0\rangle) J_{k,N}(g, Z_0)^{-1}| < \infty$.
$\mathfrak{S}_{k,N}(\Gamma_S)$ は有限次元で、テータ関数を通して、$SL_2(\mathbb{Z})$ に関する重さ $k-\frac{m}{2}$ のある種の（vector 値）正則尖点形式の空間と同型になることがわかる。Petersson 内積を

$$(1.3)\quad \langle f_1, f_2\rangle_{k,N} = \int_{\Gamma_S\backslash\mathfrak{D}_S} f_1(Z)\overline{f_2(Z)}\, y^k e^{-2\pi y N S[\xi]} dZ$$

$$\left(Z=(z, \xi z+\eta),\ z=x+iy,\ dZ=\frac{dx\,dy}{y^2}d\xi\, d\eta \right)$$

と正規化しておく。

次に Shintani [15] に従い、$G_{S,p}=G_S(\mathbb{Q}_p)$ の Hecke 環を導入する（cf. Murase [09]）。各素数 p に対し、

$$(1.4)\quad \mathcal{H}_{S,p} = \left\{ \phi : G_{S,p} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ \begin{array}{l} \phi([0,0,\zeta]k_1 g k_2) = \chi_p(\zeta)\phi(g) \\ \quad ^{\forall}k_1, k_2 \in K_{S,p},\ ^{\forall}\zeta\in\mathbb{Q}_p \\ Z_{S,p}\backslash \mathrm{supp}\,\phi = \text{compact} \end{array} \right\}$$

とおく。ここで、$K_{S,p}=G_S(\mathbb{Z}_p)$ で χ_p は $\chi_\infty(x)=e[x]$ となる $\mathbb{Q}\backslash\mathbb{Q}_A$ の指標 $\chi=\prod_v \chi_v$ の p-成分。$Z_{S,p}\backslash Z_{S,p}K_{S,p}$ 上の convolution により $\mathcal{H}_{S,p}$ は $\mathbb{C}$-algebra となる。$L_p' = \{x\in S^{-1}L_p\ ;\ \frac{1}{2}S[x]\in p^{-1}\mathbb{Z}_p\}$ は $\mathbb{Z}_p$-module で、L_p'/L_p は有限体 $\mathbb{Z}_p/p\mathbb{Z}_p$ 上の2次形式 $\frac{p}{2}S[x]$ 付きのベクトル空間をなす。その次元 ∂_p は、L の極大性の仮定より、2以下である（殆んどの p では、$\partial_p=0$）。
$\mathcal{H}_{S,p}$ の特別な元 $\phi_{1,p}$, $\phi'_{0,p}$ を以下のように定義する。

$$\phi_{1,p}\left(\begin{bmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{bmatrix}\right)=1\ ,\quad \mathrm{supp}\,\phi_{1,p}=Z_{S,p}K_{S,p}\begin{bmatrix} p & \\ & p^{-1}\end{bmatrix}K_{S,p}\ ,$$

(1.5) $$\phi'_{0,p}([0,y,0]) = p^{-\partial_p} \quad \text{if } y\in L'_p\ ,$$
$$\mathrm{supp}\,\phi'_{0,p} = Z_{S,p}K_{S,p}\{[0,y,0]\ ;\ y\in L'_p\}K_{S,p}\ .$$

$\partial_p=0$ ならば、$\phi'_{0,p}$ は $\mathcal{H}_{S,p}$ の単位元である。直接計算により、

Lemma 1 (i) $\phi'_{0,p}*\phi_{1,p} = \phi_{1,p}*\phi'_{0,p} = \phi_{1,p}$,

(ii) $$\phi'^{\,2}_{0,p} = \begin{cases} 1 & \text{if } \partial_p=1 \\ (1-p^{-1})\phi'_{0,p}+p^{-1} & \text{if } \partial_p=2\ . \end{cases}$$

$\phi_{1,p}$ と $\phi'_{0,p}$ で生成される $\mathcal{H}_{S,p}$ の（可換）subalgebra を $\mathcal{H}'_{S,p}$ と書く。$\partial_p=0,1$ のときは $\mathcal{H}'_{S,p}=\mathcal{H}_{S,p}$ であるが、$\partial_p=2$ の場合には $\mathcal{H}'_{S,p}$ は $\mathcal{H}_{S,p}$ の真の subalgebra となる。$\mathcal{H}'_{S,p}$ の指標 λ に対し、L関数を次式で定義する。

(1.6) $$L_p(\lambda;s) \underset{\mathrm{def}}{=} B_{S,p}(p^{-s})\Big\{1-\big(\lambda(\phi_{1,p})p^{-(1+\frac{m}{2})}-p^{\partial_p-\frac{n_{0,p}}{2}}+p^{-1+\frac{n_{0,p}}{2}}\big)p^{-s} + \lambda(\phi'_{0,p})^{-1}p^{-2s}\Big\}^{-1}$$
$$\times\begin{cases} (1-\chi_S(p)p^{-s})^{-1} & \text{if } m:\text{even} \\ 1 & \text{if } m:\text{odd}\ , \end{cases}$$

ここで、$n_{0,p}=m-2\nu_p$ （ν_p は S の $\mathbb{Q}_p$ 上の Witt index），$\chi_S(p)$ は $\mathbb{Q}(\sqrt{(-1)^{m(m-1)}\det S})/\mathbb{Q}$ の Legendre symbol であり、

$$B_{S,p}(T) = \begin{cases} 1 & \cdots\cdots\ \partial_p=0 \text{ or } (n_{0,p},\partial_p)=(2,1), \\ 1+p^{1/2}T & \cdots\cdots\ (n_{0,p},\partial_p)=(1,1), \\ (1+pT)(1+T) & \cdots\cdots\ (n_{0,p},\partial_p)=(2,2) \\ 1-p^{1/2}T & \cdots\cdots\ (n_{0,p},\partial_p)=(3,1) \\ (1+p^{1/2}T)(1-p^{1/2}T) & \cdots\cdots\ (n_{0,p},\partial_p)=(3,2) \\ (1-pT)(1-T) & \cdots\cdots\ (n_{0,p},\partial_p)=(4,2)\ . \end{cases}$$

$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$の元は自然にアデール化群$G_{S_A}$上の保型形式とみなされ，convolutionにより$\bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$が作用している。この作用はPetersson内積に関し正規で，$\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$は$\bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$の同時固有関数からなる基底を有する。$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$が同時固有関数 $f*\phi=\lambda_f(\phi)f$ $(\forall\phi\in\bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{H}_{S,p})$ のとき

(1.7)
$$\xi(f;s)=L_\infty(f;s)L(f;s),$$
$$L(f;s)=\prod_{p<\infty}L_p(\lambda_f;s),$$
$$L_\infty(f;s)=\begin{cases}2^{-s}\pi^{-\frac{3}{2}s}(\det S)^{s/2}\,\Gamma(s+k-1-\frac{m}{2})\Gamma(\frac{s+a}{2}) & \text{if } m\text{: even}\\ (2\pi)^{-s}(\det S)^{s/2}\,\Gamma(s+k-1-\frac{m}{2}) & \text{if } m\text{: odd}\end{cases}$$
$$a=\begin{cases}1 & \cdots\ m\equiv 0\pmod 4\\ 0 & \cdots\ m\equiv 2\pmod 4\end{cases}$$

とおく。

Theorem 2 $f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$が$\bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$の同時固有関数とする。$\xi(f;s)$は全$s$-平面上有理型関数として解析接続され，関数等式
$$\xi(f;s)=\begin{Bmatrix}-1 & m\equiv 1,3\ (8)\\ 1 & \text{otherwise}\end{Bmatrix}\xi(f;1-s)$$
をみたす。$k\geq 2+2[\frac{m+3}{2}]$ならば$\xi(f;s)$は$s=0,1$にpossible simple poleをもつ他は正則であり，更に$m\not\equiv 6\pmod 8$ならばentireとなる。

この定理は，Jacobi群上の実解析的Eisenstein級数の解析的性質に帰着することにより証明される。G_S上のEisenstein seriesをShintaniにならって導入しておく。$\beta\in V_\infty=\mathbb{R}^m$とし，$V_A=\mathbb{Q}_A^m$上のSchwartz-Bruhat関数$\varphi_{S,\beta,k}=\prod_{v\leq\infty}\varphi_v$を，

$$\begin{cases} \varphi_p = \mathbb{Z}_p^m \text{ の特性関数} \\ \varphi_\infty(x) = S(\beta, x)^\kappa \, \mathbf{e}\left[\frac{i}{2} S[x]\right] \qquad (\kappa = k - 2\left[\frac{k}{2}\right]) \end{cases}$$

により定義する。$s \in \mathbb{C}$ とし、

$$(1.8) \quad \varphi_{S,\beta,k}\left(\begin{bmatrix} t & x \\ 0 & t^{-1} \end{bmatrix}[\xi, \eta, \zeta]\kappa \,;\, s\right) = |t|_A^s \, \varphi_{S,\beta,k}(\xi)\, \chi(-\zeta)\, j(\kappa_\infty, i)^k \qquad \left(\kappa \in SO(2) \times \prod_{p<\infty} SL_2(\mathbb{Z}_p)\right)$$

とおく。Eisenstein 級数を、

$$(1.9) \quad E(g, \varphi_{S,\beta,k}\,;\, s) = \sum_{\gamma \in P_{S,\mathbb{Q}} \backslash G_{S,\mathbb{Q}}} \varphi_{S,\beta,k}\left(\gamma g \,;\, s + \frac{m+2}{2}\right)$$

$$\left(P_S = \{[0, *, *]\}\left\{\begin{bmatrix} * & * \\ 0 & * \end{bmatrix}\right\} \right)$$

と定義する。

Proposition 3 (i) $E(g, \varphi_{S,\beta,k}\,;\, s)$ は、$\mathrm{Re}\, s > 1 + \frac{m}{2}$ で広義一様絶対収束する。

(ii) $$E^*(g, \varphi_{S,\beta,k}\,;\, s) = f_{m,k}(s)\, B_S^*(s+1) \begin{Bmatrix} \xi(\chi_S\,;\, s + \frac{1}{2}) & m : \text{even} \\ \xi(2s+1) & m : \text{odd} \end{Bmatrix} \times E(g, \varphi_{S,\beta,k}\,;\, s)$$ とおく。

ここで
$$f_{m,k}(s) = \Gamma\left(\frac{s+1+k-\kappa-m/2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1+2\left[\frac{m+2}{4}\right] - \frac{m}{2}}{2}\right)^{-1},$$

$$B_S^*(s) = \prod_{p<\infty} B_{S,p}(p^{-s}) \times \begin{Bmatrix} |\det S / \Delta_0(S)|^{s/2} & m : \text{even} \\ |2^{-1} \det S|^{s/2} & m : \text{odd} \end{Bmatrix}$$

$\Delta_0(S) = \mathbb{Q}\left(\sqrt{(-1)^{m(m-1)/2} \det S}\right)/\mathbb{Q}$ の判別式

$\xi(s) = \pi^{-s/2}\, \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$

$\xi(\chi_S\,;\, s) = \pi^{-s/2} |\Delta_0(S)|^{s/2}\, \Gamma\left(\frac{s+a}{2}\right) L(\chi_S\,;\, s)$, $a = \begin{cases} 0 & \chi_S(-1) = 1 \\ 1 & \chi_S(-1) = -1. \end{cases}$

$E^*(g, \varphi_{S,\beta,k}; s)$ は全 s-平面に解析接続され、関数等式

$$E^*(g, \varphi_{S,\beta,k}; s) = \left\{\begin{matrix} -1 & m \equiv 2,4\ (8) \\ 1 & \text{otherwise} \end{matrix}\right\} E^*(g, \varphi_{S,\beta,k}; -s)$$

をみたす。$k \geqq 2+2\left[\frac{m+2}{4}\right]$ ならば $s = \pm\frac{1}{2}$ に高々 simple pole をもつ以外は正則であり、更に $m \not\equiv -1 \pmod 8$ ならば entire である。

この主張は、Shimura [14] にあるように全ての Fourier 係数を具体的に求めることにより示される。なお、Arakawa [02] では index が一般の場合に、別の手法で証明されている。

$f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ を $G_{S,A}$ 上の関数とみておく。$(a,\alpha) \in \mathbb{Q} \times V_{\mathbb{Q}}$ に対し（adelic）Fourier 係数を、

$$f_{(a,\alpha)}(g) = \int_{V_{\mathbb{Q}} \backslash V_A \times \mathbb{Q} \backslash \mathbb{Q}_A} f([0,\eta,0]\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} g)\, \chi(-ax - S(\alpha, x))\, d\eta\, dx$$

で定義する。$(a,\alpha) \in \mathbb{Z} \times S^{-1}L$ に対し、$S_{(a,\alpha)} = \begin{bmatrix} S & S\alpha \\ {}^t\alpha S & 2a \end{bmatrix}$ が正定値で、$\mathbb{Z}^{m+1}$ が $S_{(a,\alpha)}$ に関して極大 $\mathbb{Z}$-integral なとき (a,α) は reduced であると言うことにする。この時、

$$(1.10) \qquad \iota([\xi,\eta,\zeta]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = [\begin{bmatrix} \xi \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \eta \\ 0 \end{bmatrix}, \zeta]\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

により G_S を $G_{S(a,\alpha)}$ に埋め込むことが出来る。Theorem 2 は、次の2つの Lemma と、Proposition 3 からの直接の帰結である。

Lemma 4 (Shintani) (a,α) を reduced とし、$S^{\sim} = S_{(a,\alpha)}$,
$\beta = \begin{bmatrix} -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ とおく。このとき

$$\Phi_{f,(a,\alpha)}(s) = \int_{\mathbb{Q}_A^\times \times V_A} f_{(a,\alpha)}\left(\begin{bmatrix} t & \\ & t^{-1} \end{bmatrix}[\mathfrak{z},0,0]\right) |t|_A^{s-1-\frac{m}{2}} \varphi_{S^{\sim},\beta,k}\left(\begin{bmatrix} \mathfrak{z} \\ t \end{bmatrix}\right) d^\times t \, d\mathfrak{z}$$

$$= \int_{Z_{S,A} G_{S,\mathbb{Q}} \backslash G_{S,A}} f(g) \, E(\iota(g), \varphi_{S^{\sim},\beta,k}; s-\tfrac{1}{2}) \, dg .$$

Lemma 5 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\bigotimes'_{p<\infty} \mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数で、
(a,α) が reduced とする。このとき

$$\Phi_{f,(a,\alpha)}(s) = G_{(a,\alpha)}(s) \, L(f;s) \prod_{p<\infty} B_{S^{\sim},p}(p^{-s-\frac{1}{2}})^{-1} \times \begin{cases} \zeta(2s)^{-1} & \text{if } m: \text{even} \\ L(\chi_{S^{\sim}}; s+\frac{1}{2}) & \text{if } m: \text{odd} \end{cases}$$

ここで、

$$G_{(a,\alpha)}(s) = (2a - S[\alpha])^{\kappa} (\det S)^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{s+k+\kappa-1-\frac{m}{2}}{2}\right) \times (2\pi(2a - S[\alpha]))^{-(s+\kappa+k-1-\frac{m}{2})/2}$$

§2. theta lifting

G の実点の単位元成分 G_∞^+ は、領域

$$\mathfrak{D} = \left\{ \mathcal{Z} = \begin{bmatrix} \tau \\ w \\ z \end{bmatrix} ; \ \mathrm{Im}\,\tau > 0, \ \mathrm{Im}\,\tau \cdot \mathrm{Im}\,z - \tfrac{1}{2} S[\mathrm{Im}\,w] > 0 \right\}$$ に

(2.1) $\quad g\mathcal{Z}^{\sim} = (g\langle \mathcal{Z} \rangle)^{\sim} J(g,\mathcal{Z}) \quad , \quad \mathcal{Z}^{\sim} = \begin{bmatrix} -\tau z + \frac{1}{2} S[w] \\ \mathcal{Z} \\ 1 \end{bmatrix}$

と作用し、$J(g,Z)$ は、$G_\infty^+ \times \mathcal{D}$ 上の正則保型因子となる。$\Gamma = G_\infty^+ \cap SL_{m+4}(\mathbb{Z})$ に関する weight k の正則尖点形式の空間 $S_k(\Gamma)$ を、

$$f(\gamma\langle Z\rangle) = J(\gamma,Z)^k f(Z) \qquad {}^\forall\gamma\in\Gamma,\ {}^\forall Z\in\mathcal{D}$$

$$\sup_{g\in G_\infty^+} |f(g\langle Z_0\rangle) J(g,Z_0)^{-k}| < \infty \qquad \left(Z_0 = \begin{bmatrix} i \\ 0 \\ i \end{bmatrix}\right)$$

を満たす $\mathcal{D}$ 上の正則関数 f の全体として定義する。同様に、$\Gamma^* = \{\gamma\in\Gamma\ ;\ (\gamma-1)Q^{-1}\in M_{m+4}(\mathbb{Z})\}$ に関する正則尖点形式の空間 $S_k(\Gamma^*)$ が定義される。$S_k(\Gamma^*)$ の内積を、

$$(2.2)\quad \langle F_1, F_2\rangle_k = \int_{\Gamma^*\backslash\mathcal{D}} F_1(Z)\overline{F_2(Z)} \left(\mathrm{Im}\,\tau\cdot\mathrm{Im}\,z - \tfrac{1}{2}S[\mathrm{Im}\,w]\right)^{k-(m+2)} d(\mathrm{Re}\,Z)\, d(\mathrm{Im}\,Z)$$

と normalize しておく。

各 $F\in S_k(\Gamma^*)$ は、

$$F\left(\begin{bmatrix}\tau\\ w\\ z\end{bmatrix}\right) = \sum_{\substack{\eta=\begin{bmatrix}a\\ \alpha\\ b\end{bmatrix} \\ a,b\in\mathbb{Z},\ \alpha\in S^{-1}L,\ ab-\frac{1}{2}S[\alpha]>0}} a_F(\eta)\, \mathrm{e}[az+b\tau-S(\alpha,w)]$$

$$= \sum_{N=1}^{\infty} F_N(z,w)\, \mathrm{e}[N\tau]$$

と、Fourier 展開, Fourier-Jacobi 展開される。定義より F_N は $\mathfrak{S}_{k,N}(\Gamma_S)$ に属することがわかる。逆に、$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ に対し、

$$(2.3)\quad I(f)\left(\begin{bmatrix}\tau\\ w\\ z\end{bmatrix}\right) = \sum_{N=1}^{\infty} (V_N f)(z,w)\, \mathrm{e}[N\tau],$$

$$(V_N f)(z,w) = N^{k-1} \sum_{\substack{B=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix} \\ \in \\ SL_2(\mathbb{Z})\backslash T(N)}} (cz+d)^{-k}\, \mathrm{e}\left[-\frac{cN}{2}S[w](cz+d)^{-1}\right] \times f\left(\frac{az+b}{cz+d},\ w\frac{N}{cz+d}\right)$$

とおくと、$I(f) \in S_k(\Gamma^*)$ となる（[17]）。

$$I : \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S) \longrightarrow S_k(\Gamma^*)$$

を theta lifting と呼ぶ。これは、Zagier [18]（m=1），Gricenko [04]，Kojima [07]（m=2）の一般化である。また、Oda [11]，Rallis-Schiffmann [12] の構成の Jacobi form version である。(1.3)，(2.2) で normalize した内積に関する I の随伴写像を I^* であらわす：$I^* : S_k(\Gamma^*) \longrightarrow \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$。$I$ による $\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ の元の像が Γ に関する保型形式となる条件を与えておく。

Lemma 6 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ とする。

$$I(f) \in S_k(\Gamma) \iff f * \phi'_{0,p} = f \quad \forall p < \infty .$$

G_p と $K_p = G(\mathbb{Z}_p)$ の組で決まる Hecke 環 $\mathcal{H}_p$ の構造は、Satake 同型

$$\mathcal{H}_p \xrightarrow{\cong} \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \cdots, X_{\nu_p}^{\pm 1}]^{W_{\nu_p}} \qquad \left(\begin{array}{l} W_{\nu_p} : \text{Weyl 群} \\ \nu_p : Q \text{ の } \mathbb{Q}_p \text{ 上の Witt 指数} \end{array} \right)$$

により記述される（[13]）。$\mathcal{H}_p$ の指標 λ に対しその L 関数を

$$(2.4) \quad L_p(\lambda; s) = \lambda\Big(\prod_{j=1}^{\nu_p}(1 - X_j p^{-s})(1 - X_j^{-1} p^{-s})\Big)^{-1}$$

$$\times \begin{cases} 1 & (n_{0,p}, \partial_p) = (0,0), (1,0) \\ (1 + p^{1/2 - s}) & (1,1) \\ (1 - p^{-2s})^{-1} & (2,0) \\ (1 - p^{-s})^{-1} & (2,1) \\ (1 - p^{-s})^{-1}(1 + p^{1-s}) & (2,2) \\ (1 - p^{-1/2 - s})^{-1} & (3,1) \\ (1 - p^{-1/2 - s})^{-1}(1 + p^{1/2 - s}) & (3,2) \\ (1 - p^{-s})^{-1}(1 - p^{-1-s})^{-1} & (4,2) \end{cases}$$

と定める。$F \in S_k(\Gamma)$ が $\bigotimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_p$ の同時固有関数のとき、

$$L(F;s) = \prod_{p<\infty} L(\lambda_F;s)$$

とおく。これは F の standard L 関数である。

Proposition 7 $f \in \mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ を、$f * \phi'_{0,p} = f \quad \forall p<\infty$ なる $\bigotimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_{S,p}'$ の同時固有関数とする。このとき $I(f)$ は $\bigotimes'_{p<\infty} \mathcal{H}_p$ の同時固有関数であり、

$$L(I(f);s) = L(f;s)\prod_{j=0}^{m} \zeta\left(s+j-\frac{m}{2}\right)$$ が成立する。

$F \in S_k(\Gamma^*)$ のとき I^*F の Fourier 係数は、F の period の言葉で記述される。このことは Oda [11] の議論を我々の状況で追跡することによって得られる。I^*F の Fourier 展開を

$$I^*F(z,w) = \sum_{a \in \mathbb{Z},\, \alpha \in S^{-1}L} a_{I^*F}(a,\alpha)\, \mathbf{e}[az + S(\alpha,w)]$$ とする。

Proposition 8 $k > 2m+4$、$F \in S_k(\Gamma^*)$ とする。(a,α) が reduced ならば、

$$a_{I^*F}(a,\alpha) = C\cdot\left(a-\frac{1}{2}S[\alpha]\right)^{\frac{k-m-1}{2}} \int_{\Gamma^*_{\eta^\sim}\backslash G^+_{\eta^\sim,\infty}} F(hg_\eta)\,\omega_\eta(h),$$

ここで $\eta^\sim = \begin{bmatrix} 0 \\ \eta \\ 0 \end{bmatrix}$、$\eta = \begin{bmatrix} a \\ -\alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ で、$G_{\eta^\sim}$ は $\eta^\sim$ の固定化部分群、$\omega_\eta(h)$ は $G^+_{\eta^\sim,\infty}$ の（具体的に定められた）Haar measure、C は（具体的にわかる）定数であり、g_η は適当にえらんだ G^+_∞ の元。

§3 主結果

Theorem 9 $k>2m+4$ とし、$f\in\mathfrak{S}_{k,1}(\Gamma_S)$ が $\bigotimes_{p<\infty}{}'\mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数であるとする。このとき、

$$I^*I(f) = C'_{S,k}\,L(f;1+\tfrac{m}{2})\,f$$ が成立する。

ここで、
$$C'_{S,k}=\begin{cases}4C_{S,k} & \text{if } -1\in\Gamma^* \\ 2C_{S,k} & \text{if } -1\notin\Gamma^*\end{cases},$$

$$C_{S,k}=(\det S)^{\frac{m+1}{2}}\prod_{j=1}^{[\frac{m+1}{2}]}B_{2j}\times(4\pi)^{-k}\Gamma(k)$$
$$\times\begin{cases}2^{-m/2}\,\pi^{-1-m/2} & \text{if } m:\text{even}\\ 2^{-\frac{m+1}{2}}\,\Gamma(\frac{m+3}{2})^{-1} & \text{if } m\ \text{odd}\end{cases},$$

$$B_{2j}=2(2\pi)^{-2j}\,\Gamma(2j+1)\,\zeta(2j)\quad:\ \text{Bernoulli 数}.$$

このTheoremより直ちに次の結果を得る。

Corollary 10 Theorem 9と同じ状況下において、

$$\langle I(f),I(f)\rangle_k = C'_{S,k}\,L(f;1+\tfrac{m}{2})\,\langle f,f\rangle_{k,1}.$$

[証明の概略] $(a,\alpha)\in\mathbb{Z}\times S^{-1}L$ が reduced だとし、$S^{\sim}=S_{(a,\alpha)}$ の直交群を H、$[1,S^{\sim}]$ の直交群を H_1 と書く。$F=I(f)$ に対し、次の等式が出発点となる。

$$(3.1)\quad \int_{H_{1,\mathbb{Q}}\backslash H_{1,A}} F(h\,g_\eta)\,E(g,\mathbf{1};s-\tfrac{1}{2})\,dh$$
$$=\mathrm{vol}(H_{\mathbb{Q}}\backslash H_A)\,\Gamma(s+k-1-\tfrac{m}{2})\left(4\pi\sqrt{a-\tfrac{1}{2}S[\alpha]}\right)^{-(s+k-1-\frac{m}{2})}$$
$$\times\zeta(s-\tfrac{m}{2})\,L(f;s)\prod_{p<\infty}B_{S^{\sim},p}(p^{-(s+\frac{1}{2})})^{-1}$$

$$\times \begin{Bmatrix} \zeta(2s)^{-1} & \text{if } m:\text{even} \\ L(\chi_{S^\sim}; s+\frac{1}{2})^{-1} & \text{if } m:\text{odd} \end{Bmatrix} a_f(a,\alpha)$$

.

ここで、$E(g,1;s)$ は（Levi part の表現が trivial である）H_1 上の Eisenstein series （$H_1 \cong G_{\eta^\sim}$ である）。証明には [16] の議論（Andrianov [01] の一般化）と Lemma 5 の議論が用いられる。

(3.1) の両辺の $s = 1+\frac{m}{2}$ での residue をとることにより、

$$\frac{(2\pi)^{\frac{m+1}{2}}}{(2a-S[\alpha])^{1/2}(\det S)^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{m+1}{2})}{\Gamma(m+1)} \times \begin{Bmatrix} 1 & \text{if } m:\text{even} \\ \dfrac{L(\chi_S; \frac{m+1}{2})}{\zeta(m+1)} & \text{if } m:\text{odd} \end{Bmatrix}$$

$$\times \prod_{p<\infty} B_{S^\sim;p}(p^{-\frac{m+1}{2}}) \int_{\Gamma^*_{\eta^\sim}\backslash G^+_{\eta^\sim,\infty}} F(hg_\eta)\,\omega_\eta(h)$$

$$= \mathrm{vol}(H_{\mathbb{Q}}\backslash H_{\mathbb{A}})\,\Gamma(k)\left(4\pi\sqrt{a-\tfrac{1}{2}S[\alpha]}\right)^{-k} a_f(a,\alpha)$$

を得る。右辺の volume は、Siegel formula で計算されるから、Proposition 8 より

$$(3.2) \qquad a_{I^*I(f)}(a,\alpha) = C'_{S,k}\, L(f; 1+\tfrac{m}{2})\, a_f(a,\alpha)$$

が、reduced な (a,α) に対して成立する。Proposition 7, $\mathcal{H}'_{S,p}$ の構造から $I^*I(f)$ と f は同じ固有値をもつ $\bigotimes'_{p<\infty}\mathcal{H}'_{S,p}$ の同時固有関数であることがわかり、Theorem 9 が得られる。詳しくは [17] を参照されたい。なお、Corollary 10 に関しては別の証明が [10] で与えられている（Kohnen-Skoruppa [06] の一般化）。

References

[01] Andrianov, A.N. : Euler products corresponding to Siegel modular forms of genus 2 ; Russian Math. Surveys 29 (1974), 45-116.

[02] Arakawa, T. : Real analytic Eisenstein series for the Jacobi group ; preprint.

[03] Eichler, M. and Zagier, D. : The theory of Jacobi forms ; Progr. Math. vol.55, Birkhauser, 1985.

[04] Gricenko, V. : Maass space for SU(2,2), Hecke algebra and zeta function.

[05] Kohnen, W. : On the Petersson norm of a Siegel-Hecke eigen form of degree two in the Maass space ; J. reine angew. Math. 357 (1985), 96-100.

[06] Kohnen, W. and Skoruppa, N.-P. : A certain Dirichlet series attached to Siegel modular forms of degree two ; Invent. Math. 95 (1989), 541-558.

[07] Kojima, H. : An arithmetic of hermitian modular forms of degree two ; Invent. Math. 69 (1982), 217-227.

[08] Maass, H. : Uber eine Spezialschar von Modulformen zweiten Grades, I, II, III ; Invent. Math. 52 (1979), 95-124, 53 (1979), 249-253, 53 (1979), 255-265.

[09] Murase, A.: L-functions attached to Jacobi forms of degree n , Part I The basic identity ; J. reine Angew Math. 401 (1989), 122-156.

[10] Murase, A. and Sugano, T. : On standard L-functions associated with holomorphic cusp forms on O(2,m+2) ; preprint.

[11] Oda, T. : On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2,n-2) ; Math. Ann. 231 (1977), 97-144.

[12] Rallis, S. and Schiffmann, G. : Automorphic forms constructed from the Weil representation , Holomorphic case ; Amer. J. Math. 100 (1978), 1049-1122.

[13] Satake, I. : Theory of spherical functions on reductive algebraic groups over p-adic fields ; Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. 18 (1963), 229-293.

[14] Shimura, G. : On the holomorphy of certain Dirichlet series ; Proc. London Math. Soc. 31 (1975), 79-98.

[15] Shintani, T. : Unpublished notes.

[16] Sugano, T. : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2,q) ; Advanced Studies in Pure Math. 7 (1985), 333-362.

[17] Sugano, T. : Jacobi forms and the theta lifting ; preprint.

[18] Zagier, D. : Sur la conjecture de Saito-Kurokawa (d'apres H. Maass) ; Seminaire Delange-Pisot-Poitou 1979-1980, Progr. Math. vol.5 (1980), Birkhauser, 371-394.