数理解析研究所講究録
第 738 巻 1991 年 79-90

Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system

名大・理　　田中和永 (Kazunaga Tanaka)

1. 序

Hamilton 系の homoclinic orbit の存在を変分法により考察する。Hamilton 系の周期解の存在は変分法により Rabinowitz, Ekeland, Viterbo らにより非常によく研究されているが、homoclinic orbit に関してはまだほとんど行われていないように思われる。

ここでは次のような Hamilton 系について考える。

(HS) $$\ddot{q} + V'(q) = 0$$

ここで $q = (q_1, \cdots, q_N) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$ であり、$\cdot = \frac{d}{dt}$ さらに $V : \mathbb{R}^N \setminus \{e\} \to \mathbb{R}$ は与えられた potential で $e \in \mathbb{R}^N$ において singularity をもち、0 で $\mathbb{R}^N$ 上狭義の最大値をとるとし、0 から出て 0 へ戻る homoclinic orbit の存在を考える。以下を仮定する

(V1) ある $e (\neq 0) \in \mathbb{R}^N$ が存在して $V \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{e\}, \mathbb{R})$,

(V2) $V(q) \leq 0$ $(\forall q \in \mathbb{R}^N \setminus \{e\})$ かつ $V(q) = 0$ は $q = 0$ のときに限り、さらに $\overline{\lim_{|q| \to \infty}} V(q) < 0$.

(V3) ある $\delta \in (0, |e|/2)$ が存在して

$$V(q) + \frac{1}{2}(V'(q), q) \leq 0 \quad \forall q \in B_\delta(0)$$

但し $B_\delta(0) = \{x \in \mathbb{R}^N;\ |x| \leq \delta\}$.

(V4) $-V(q) \longrightarrow \infty$ as $q \longrightarrow e$.

(V5) e の近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ と $U \in C^1(W \setminus \{e\}, \mathbb{R})$ が存在して

$$U(q) \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad q \longrightarrow e$$

$$-V(q) \geq |U'(q)|^2 \quad \text{for } q \in W \setminus \{e\}$$

が成立する.

以上の仮定の下で次の定理が成立する.

定理 1.1. 仮定 (V1) - (V5) の下で (HS) は

$$q(t),\ \dot{q}(t) \longrightarrow 0 \quad \text{as} \quad t \longrightarrow \pm\infty$$

なる非自明な解 (homoclinic orbit) を少なくとも1つもつ.

注意 1.2. 1° 仮定 (V5) は strong force condition と呼ばれる. 特に e の近傍で $V(q) = -|q-e|^{-\alpha}$ なるときは, (V5) が成立するためには $\alpha \geq 2$ が必要十分である.

2° 仮定 (V3) は $-V(q)$ の 0 の近傍での凸性に関する条件である. 例えば $V''(0)$ が negative definite ならば (V3) は成立する.

注意 1.3. (HS) に対する変分法による homoclinic orbit の存在

結果は他に Rabinowitz [6] 及び Rabinowitz and Tanaka [7] がある.
また heteroclinic orbit については Rabinowitz [5] を参照されたい.

定理 1.1 の証明には、Palais − Smale 条件を得るために、まず近似問題として $T \geq 1$ に対して

$$
(HS:T) \quad \begin{cases} \ddot{q} + V'(q) = 0 & \text{in } (0,T), \\ q(0) = q(T) = 0 \end{cases}
$$

を考え、(HS:T) の非自明な解 $q(t;T)$ をある種の minimax 法を用いて構成する. critical value の minimax による特徴づけを用いて得られる $T \geq 1$ に関する一様評価により、適当な shift $\tau_T > 0$ と部分列 $T_k \nearrow \infty$ をとれば $q(t+\tau_{T_k};T_k)$ が非自明な homoclinic orbit に収束することを示すことができ、homoclinic orbit の存在を得る. 以下の章で証明の概略を述べる.

注意 1.4. さらに一般の Hamilton 系

$$
\dot{z} = JH_z(t, z(t))
$$

(ここに $z : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2N}$, $J = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -I_N & 0 \end{pmatrix}$, $H(t,z) \in C^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{2N}, \mathbb{R})$ である) に対する homoclinic orbit の存在についても $H(t,z)$ が t について周期 2π をもち、z について superquadratic growth をもつ (i.e., $H(t,z)/|z|^2 \longrightarrow \infty$ as $|z| \to \infty$) ときに Coti-Zelati, Ekeland and Sere [3], Hofer and Wysocki [4] 及び Tanaka [9] により研究がなされている. 特に [9] においては、近似方程式と

して

$$
(1.5)_T \quad
\begin{aligned}
\dot{z} &= JH_z(t, z(t)) \quad \text{in } \mathbb{R}, \\
z(t+2\pi T) &= z(t) \quad \text{in } \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

$(T \in \mathbb{N})$ を用い、Rabinowitz により導入された minimax 法に対応する $(1.5)_T$ の解は適当に shift 及び部分列をとると非自明な homoclinic orbit に収束することを適当な条件の下で示している。くわしくは [9] を参照されたい。

2. 近似問題

$T \geq 1$ に対して近似問題 (HS:T) を考える。(HS:T) の解 $q(t)$ は次の functional の critical point として求められる

$$
I_T(q) = \frac{1}{2}\int_0^T |\dot{q}|^2 dt - \int_0^T V(q)\, dt
$$
$$
\in C^1(\Lambda_T, \mathbb{R}).
$$

ここで Λ_T は $H_0^1(0,T;\mathbb{R}^N)$ の開集合で次で与えられる。

$$
\Lambda_T = \{ q(t) \in H_0^1(0,T;\mathbb{R}^N) ; \ q(t) \neq e \quad \forall t \in (0,T) \}
$$

このとき、strong force condition (V5) の下では次が成立する。

<u>補題 2.1.</u> (V4), (V5) の下では $(q_n) \subset \Lambda_T$ に対して

$$
\inf_{t \in [0,T]} |q_n(t) - e| \longrightarrow 0 \quad \text{as } n \to \infty
$$

ならば $I_T(q_n) \longrightarrow \infty$ as $n \to \infty$. □

この補題を用いると次が得られる。

<u>命題 2.2.</u> (V4), (V5) の下で $I_T(q)$ は次の Palais-Smale 条件

(P. S.) をみたす.

(P. S.) : $|I_T(q_n)| \leq M$ かつ $I'_T(q_n) \to 0$ なる任意の $(q_n) \subset \Lambda_T$ に対して、収束部分列 (q_{n_k}) をえらび $q_{n_k} \to q \in \Lambda_T$ とできる. □

この命題により、$I_T(q)$ に対して minimax 法により、$I_T(q)$ の critical point（すなわち (HS: T) の解）を求めることができる. ここでは次の minimax 法を用いる.（c.f. Bahri and Rabinowitz [1]）.

$$D^{N-2} = \{ x \in \mathbb{R}^{N-2} \,;\ |x| \leq 1 \},$$

$$\Gamma_T = \{ \gamma \in C(D^{N-2}, \Lambda_T) \,;\ \gamma(x)(t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \partial D^{N-2} \times [0,T] \}$$

とおく. $\gamma \in \Gamma_T$ に対して

$$\gamma(x,t) = 0 \qquad \forall (x,t) \in \partial(D^{N-2} \times [0,T]).$$

であるから $D^{N-2} \times [0,T] / \partial(D^{N-2} \times [0,T]) \cong S^{N-1}$ とみると、$\gamma \in \Gamma_T$ に対して $\tilde{\gamma} : S^{N-1} \to S^{N-1}$ を

$$\tilde{\gamma}(x,t) = \frac{\gamma(x,t) - e}{|\gamma(x,t) - e|}$$

で対応させることができる. そこで

$$\Gamma_T^* = \{ \gamma \in \Gamma_T \,;\ \deg \tilde{\gamma} \neq 0 \},$$

$$c(T) = \inf_{\gamma \in \Gamma_T^*} \max_{x \in D^{N-2}} I_T(\gamma(x))$$

と minimax value $c(T)$ を定義する. ここに deg は Brouwer degree を表わす. このとき次が成立する.

<u>命題 2.3.</u> $T \geq 1$ に依存しない定数 $c_0 > 0$ が存在して

$$0 < c_0 \leq c(T) \leq c(1) \qquad \forall T \geq 1$$

をみたす.

<u>証明</u>. 任意に与えられた $\gamma \in \Gamma_1^*$ に対して $\gamma_T \in \Gamma_T$ を次で定める.

$$\gamma_T(t) = \begin{cases} \gamma(x)(t), & (x,t) \in D^{N-2} \times [0,1], \\ 0, & (x,t) \in D^{N-2} \times (1,T]. \end{cases}$$

このとき, $\gamma_T \in \Gamma_T^*$ であり, $I_T(\gamma_T(x)) = I_1(\gamma(x))$ $\forall x \in D^{N-2}$ により

$$c(T) = \inf_{\gamma \in \Gamma_T^*} \max_{x \in D^{N-2}} I_T(\gamma(x)) \leq \inf_{\gamma \in \Gamma_1^*} \max_{x \in D^{N-2}} I_T(\gamma_T(x))$$

$$= \inf_{\gamma \in \Gamma_1^*} \max_{x \in D^{N-2}} I_1(\gamma(x)) = c(1).$$

次に $c_0 > 0$ の存在をます. 任意の $\gamma \in \Gamma_T^*$ に対して $\deg \tilde{\gamma} \neq 0$ より

$$\{\gamma(x)(t);\ (x,t) \in D^{N-2} \times [0,T]\} \cap (\mathbb{R}^N \setminus B_{2\delta}(0)) \neq \phi$$

である. ゆえに $(x_0, t_0) \in D^{N-2} \times [0,T]$ で $\gamma(x_0)(t_0) \notin B_{2\delta}(0)$ なるものがえらべる. 一方 $\gamma(x_0)(0) = 0$ により, $s_0 \in (0, t_0)$ で

$$\gamma(x_0)(s_0) \in \partial B_\delta(0), \quad \gamma(x_0)(t) \notin B_\delta(0) \quad \forall t \in (s_0, t_0)$$

なるものがえらべる. このような x_0, t_0, s_0 に対して $g(t) = \gamma(x_0)(t)$ とかくと,

$$m_\delta = \min_{\mathbb{R}^N \setminus B_\delta(0)} -V(x) > 0$$

に対して

$$
\begin{aligned}
I_T(\gamma(\tau_0)) &\geq \int_{s_0}^{t_0} \frac{1}{2}|\dot{q}|^2\,dt + \int_{s_0}^{t_0} -V(q(t))\,dt \\
&\geq \frac{1}{2(t_0-s_0)}\left(\int_{s_0}^{t_0}|\dot{q}|\,dt\right)^2 + m_\delta(t_0-s_0) \\
&\geq \frac{1}{2(t_0-s_0)}|q(t_0)-q(s_0)|^2 + m_\delta(t_0-s_0) \\
&\geq (2m_\delta)^{1/2}|q(t_0)-q(s_0)| \\
&\geqq (2m_\delta)^{1/2}\delta \equiv c_0.
\end{aligned}
$$

ここで $\gamma\in\Gamma_T^*$ は任意であったから、$c(T)\geq c_0$ を得る. □

また通常の deformation lemma を用いることにより次をますことができる.

<u>命題 2.4.</u> $c(T)>0$ は $I_T(q)$ の critical value である. □

命題 2.3, 2.4 により次を得る.

<u>命題 2.5.</u> 任意の $T\geq 1$ に対して、(HS:T) は非自明な解 $q(t;T)$ をもつ. さらに $T\geq 1$ には依存しない定数 $c_0, c_1>0$ が存在して

$$0 < c_0 \leqq I_T(q(t;T)) \leqq c_1 < \infty \qquad \forall T\geq 1$$

が成立する. □

3. 極限移行

命題 2.5 で得られた解 $q(t;T)$ に対して、以下の評価を得ることができる.

命題 3.1. $T \geq 1$ によらない定数 $C > 0$ が存在して

$$\| \dot{q}(t;T) \|_{L^2(0,T)} \leq C, \tag{3.2}$$

$$\int_0^T -V(q(t;T))\,dt \leq C, \tag{3.3}$$

$$\| q(t;T) \|_{L^\infty(0,T)} \leq C. \tag{3.4}$$

が任意の $T \geq 1$ に対して成立する. □

また $q(t;T)$ が (HS : T) の解であることにより

$$E_T \equiv \frac{1}{2} |\dot{q}(t;T)|^2 + V(q(t;T))$$

は t によらず、一定であるが、上式を $(0,T)$ 上積分し (3.2)(3.3) を用いると次を得る

命題 3.5. $E_T \to 0 \ (T \to \infty)$. 特に $|\dot{q}(0;T)| = |\dot{q}(T;T)| = \sqrt{2E_T} \to 0 \ (T \to \infty)$. □

また (V3) より $q(t;T)$ に対して, 下からの一様な評価を得ることができる.

命題 3.6. $\| q(t;T) \|_{L^\infty(0,T)} \geq \delta \quad \forall T \geq 1$.

証明. まず任意の $t \in (0,T)$ に対して

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}|q(t;T)|^2 = |\dot{q}(t;T)|^2 - (V'(q(t;T)), q(t;T))$$

$$= -2V(q(t;T)) - (V'(q(t;T)), q(t;T)) + 2E_T$$

が成立する. $E_T = \frac{1}{2}|\dot{q}(0;T)|^2 > 0$ 及び (V3) により

$$\frac{d^2}{dt^2}|q(t;T)|^2 > 0 \quad \text{if} \quad q(t;T) \in B_\delta(0).$$

これより $|q(t;T)|^2$ が最大値をとる $t = t_0$ では, $q(t_0;T) \notin B_\delta(0)$ が従う. すなわち $\| q(t;T) \|_{L^\infty} \geq \delta$. □

命題3.6により、$\tau_T \in (0,T)$ をとり

$$q(\tau_T;T) \in \partial B_\delta(0)$$

とできる．ここで

$$\tilde{q}(t;T) = \begin{cases} q(t+\tau_T;T), & t \in [-\tau_T, T-\tau_T], \\ 0 & t \notin [-\tau_T, T-\tau_T]. \end{cases}$$

とおくと、次が成立する．

1° $\tilde{q}(t;T)$ は (HS) の $(-\tau_T, T-\tau_T)$ での解

2° $\tilde{q}(0;T) \in \partial B_\delta(0) \quad \forall T \geq 1$

3° $\|\dot{\tilde{q}}(t;T)\|_{L^2(\mathbb{R})}$, $\|\tilde{q}(t;T)\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$, $\int_{\mathbb{R}} -V(\tilde{q}(t;T))\,dt \leq C$

ここで $C>0$ は $T \geq 1$ によらない定数．

3°により、$T_k \nearrow \infty$ なる部分列 (T_k) をえらび、次の意味で $\tilde{q}(t;T_k)$ が $y(t) \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ $(\dot{y}(t) \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N))$ へ収束するようにできる．

(3.7) $\quad \tilde{q}(t;T) \longrightarrow y(t) \quad \text{in } L^\infty_{loc}(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$

(3.8) $\quad \dot{\tilde{q}}(t;T) \longrightarrow \dot{y}(t) \quad \text{weakly in } L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$

さらに

(3.9) $\quad \int_{\mathbb{R}} -V(y(t))\,dt \leq \varlimsup_{T\to\infty} \int_{\mathbb{R}} -V(\tilde{q}(t;T))\,dt \leq C$

このとき補題2.1と同様に

$$y(t) \neq e \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

が、$\dot{y} \in L^2(\mathbb{R},\mathbb{R}^N)$ 及び (3.9) より従う．

次の命題により定理1.1の証明は完成する．

<u>命題 3.10.</u> $y(t)$ は (HS) の $\mathbb{R}$ 上の非自明解であり，
$y(t)$, $\dot{y}(t) \longrightarrow 0$ ($t \to \pm\infty$) をみたす．

<u>証明</u> 命題 3.5 により，$-\tau_T \to -\infty$, $T-\tau_T \to \infty$ ($T \to \infty$) が従い，これより $y(t)$ は (HS) の $\mathbb{R}$ 上の解であることがわかる．また $\tilde{q}(t;T)$ の性質 2° により，$y(0) \in \partial B_\delta(0)$ であり $y(t) \not\equiv 0$ が得られる．また $y(t)$, $\dot{y}(t) \longrightarrow 0$ ($t \to \pm\infty$) については $\dot{y}(t) \in L^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}^N)$, (3.9) 及び $y(t)$ が (HS) の解であることから従う． □

以上により (HS) の非自明な homoclinic orbit $y(t)$ が得られた．

<u>注意 3.11.</u> 以上において potential $V(q)$ の singularity は 1 点 $\{e\}$ であると仮定したが，次のように若干一般化できる．

(V0) $S \subset \mathbb{R}^N$ は compact であり，$0 \notin S$ は $\mathbb{R}^N \setminus S$ の非有界な連結成分に属する

(V1′) $V \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus S, \mathbb{R})$

(V2′) $V(q) \leq 0$ ($\forall q \in \mathbb{R}^N \setminus S$) かつ $V(q) = 0$ は $q = 0$ のときに限り，さらに $\overline{\lim_{|q| \to \infty}} V(q) < 0$.

(V3′) ある $\delta \in (0, \frac{1}{2}\,\mathrm{dist}(0, S))$ が存在して

$$V(q) + \frac{1}{2}(V'(q), q) \leq 0 \quad \forall q \in B_\delta(0)$$

(V4′) $-V(q) \longrightarrow \infty$ as $q \longrightarrow S$

(V5′) S の近傍 $W \subset \mathbb{R}^N$ と $U \in C^1(W \setminus S, \mathbb{R})$ が存在して

$$U(q) \longrightarrow \infty \quad \text{as} \quad q \to S$$

$$-V(q) \geq |U'(q)|^2 \quad \forall q \in W \setminus S$$

をみたす.

以上の条件の下で次の存在定理が成立する.

<u>定理 3.12.</u> (V0), (V1′) - (V5′) の仮定の下で (HS) は

$$q(t),\ \dot{q}(t) \longrightarrow 0 \qquad \text{as} \quad t \to \pm\infty$$

なる非自明な解を少なくとも1つもつ. □

文献

[1] A. Bahri and P.H. Rabinowitz, A minimax method for a class of Hamiltonian systems with singular potentials, J. Funct. Anal. 82 (1989), 412 - 428.

[2] V. Benci and F. Giannoni, Homoclinic orbits on compact manifolds, preprint, Università di Pisa, 1989.

[3] V. Coti-Zelati, I. Ekeland and E. Sere, Une approche variationelle au problème des orbites homoclines de système hamiltonians, preprint 1989.

[4] H. Hofer and K. Wysocki, First order elliptic system and the existence of homoclinic orbits in Hamiltonian system, preprint

1989.

[5] P. H. Rabinowitz, Periodic and heteroclinic orbits for a periodic Hamiltonian system, to appear in Analyse Nonlineaire.

[6] P. H. Rabinowitz, Homoclinic orbits for a class of Hamiltonian systems, to appear in Proc. Royal Soc. Edinburgh.

[7] P. H. Rabinowitz and K. Tanaka, Some results on connecting orbits for a class of Hamiltonian systems, preprint 1989.

[8] K. Tanaka, Homoclinic orbits for a singular second order Hamiltonian system, to appear in Analyse Nonlineaire.

[9] K. Tanaka, Homoclinic orbits in a first order superquadratic Hamiltonian system : Convergence of subharmonic orbits, preprint 1989.