数理解析研究所講究録
第 739 巻 1991 年 1-5

流体方程式の解の空間構造と非線形解析

桑原真二

名古屋大学　工学部　応用物理学科

流体方程式の解の空間構造として、複雑な流線や渦線のパターン、粘性分枝 viscous fingering や波の崩壊のような界面の空間構造が、先ず考えられる。更に、流体系を小数自由度の非線形力学系で近似した時の、相空間における strange attractor のような、抽象的空間構造も含めて考えることにする。

ここでは、流体方程式の解の空間構造を、最近よく研究されているカオス・フラクタル等の非線形解析との関連において考えてみたい。すなわち、色々の流体系、物理系、化学系、工学系等に通用する非線形解析という広い視野に立って、流体方程式を考察すれば、それらの間の有機的、基本的関係が、より明確に理解できるであろう。

よく知られた非線形力学系の例をあげてみよう。まず、2 元連立では

Duffing 方程式（非線形振動）　$\ddot{X}+\lambda\dot{X}+\alpha X(1-X^2)=0,$ または

$$\dot{X}=Y, \qquad \dot{Y}=-\lambda Y-\alpha X(1-X^2), \tag{1}$$

Van der Pol 方程式（非線形振動）　$\ddot{X}-\epsilon(1-X^2)\dot{X}+X=0,$　または

$$\dot{X}=Y, \qquad \dot{Y}=\epsilon(1-X^2)Y-X, \tag{2}$$

Lotka-Volterra 方程式（補食者・餌食問題、化学反応）

$$\dot{X} = a_1 - b_1 XY, \qquad \dot{Y} = a_2 XY - b_2 Y, \tag{3}$$

Brusselator 方程式（２成分、３分子反応）

$$\dot{X} = A - BX + X^2 Y - X, \qquad \dot{Y} = BX - X^2 Y, \tag{4}$$

等があげられる。２次元力学系では、極限集合として limit cycle が得られる。

３元連立の力学系として

Lorenz 方程式（Bénard 対流）

$$\begin{aligned} \dot{X} &= -PrX + PrY, \\ \dot{Y} &= \quad RX \quad -Y \quad -XZ, \\ \dot{Z} &= \qquad\qquad -AZ + XY, \end{aligned} \tag{5}$$

Oregonator 方程式（３成分、２分子反応）

$$\begin{aligned} \dot{X} &= s(X + Y \qquad - XY - qX^2), \\ \dot{Y} &= \quad \frac{1}{s}(-Y + fZ - XY), \\ \dot{Z} &= w(X \qquad - Z), \end{aligned} \tag{6}$$

レーザー発振の方程式（X: 電場の振幅、Y: 分極、Z: inversion）

$$
\begin{aligned}
\dot{X} &= -[\kappa + i(\Omega - \omega)]X + igY, \\
\dot{Y} &= -[\gamma_{\perp} - i(\omega - \omega_0)]Y - igXZ, \qquad (7) \\
\dot{Z} &= \gamma_{\|}(Z - Z_0) - 2ig(XY^* - X^*Y),
\end{aligned}
$$

である。 ここで、X, Yは復素変数、Zは実変数、である。3次元以上の空間の極限集合として strange attractor が考えられるが、Lorenz attractor 以外上の方程式系についてわかっていないようである。

乱流の Kolmogorov のスペクトル理論は、その基礎である universality に Landau が疑義をなげかけて以来、多くの議論を呼んでいる。彼の議論は、大きい渦の揺らぎは小さい渦のエネルギー散逸に影響するから、慣性領域全体でエネルギー散逸一定というのはおかしい、すなわち universality は成り立たないということである。これに対して、Kolmogorov 自身が散逸の揺らぎの対数正規分布の理論をつくったが、Mandelbrot, Kraichnan 等の批判にあって退けられたように思える。これはネルギー散逸の intermittency 構造の問題で、乱流のまた流体方程式の最も重要な問題である。Mandelbrot のフラクタル・モデル、さらにマルチフラクタル・モデル等がこの解決の鍵になるかもしれない。

レイノルズ数を上げていった時、Navier-Stokes の方程式は解の一意性が破れ、多くの解を持つと考えられている。このいわゆる Hopf 分岐は他の多くの現象についても現れ、Ruelle Takens の乱流理論、Feigenboum の1次元写像における universality theory 等に関連している。

粘性分枝 viscous fingering はガラス板の間の Hele-Shaw の流れや多孔質媒質の中の流れで粘性の大きい流中に粘性の小さい流体が押しだられる時に起こる。多孔質媒質の2媒質の流れ（u_l: 流速、p_l: 圧力、l=1,2）は方程式：

$$\vec{u} = -\tfrac{\kappa}{\mu_l}\mathrm{grad}\phi, \qquad \phi = p - \vec{g}\cdot\vec{x}, \qquad l = 1, 2,$$

$$\mathrm{div}\vec{u} = 0, \tag{8}$$

境界条件：

$$[\vec{u}\cdot\vec{n}] = 0, \qquad [p] = T_s(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}), \tag{9}$$

に従う。ここで、$[A] = A_2 - A_1$ である。R_1, R_2は曲面の曲率半径であり、曲率中心が2側にあるとき正とする。この問題では、方程式は線形であるが、境界条件が非線形になっている。

次に、重力場にある電気流体力学EHD界面の問題を考える。例えば、上に油（不導体、完全流体）、下に水（電導体、完全流体）がある界面では、、上の領域で電気ポテンシャルχで、上下の領域で、速度ポテンシャルΦによって、電場と流れの場を表わす。下及び上の領域を各々2，1の添え字で表わすと、Φ、χに対する方程式は

$$\nabla^2\Phi_1 = 0,$$

$$\nabla^2\Phi_2 = 0, \qquad \nabla^2\chi_2 = 0 \tag{10}$$

となる。境界条件は

$$[\vec{v}\cdot\vec{n}] = 0,$$

$$[p] + T_s(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) - \frac{1}{2}E_n D_n, \tag{11}$$

である。この問題でも、方程式は線形であるが、境界条件が非線形である。

以上では、主に流体方程式に関連する新しい領域、他の分野との関係について述べた。この研究会では、流体方程式を新しいアイディア、手法でとらえると同時に、classical な問題、例えば、乱流、流れの安定性、非線形波動、渦運動等を新しい視点から考察する研究もあり、十分その目的を達しと思う。

参考文献：

1) 天谷澄：　電気流体力学的界面の運動、名古屋大学工学部応用物理修士論文（１９９０）
2) Feigenbaum,M.J.: Los Alamos Sci. 1(1980)4-27.
3) Field,R.J. R.M.Noyes: J. Chem. Phys. 60(1974)1877-1884.
4) Halsey,T.C., M.H.Jensen, L.Kadanoff, I.Procaccia B.I.Shraiman: Phys. Rev. A33(1986)1141-1151.
5) Homsy,G.M.: *Viscous Fingering in Porous Media*, Ann. Rev. Fluid Mech. 19(1987)271-311.
6) Kraichnan,R.H.: JFM 62(1974)305-330.
7) Lorenz,E.N.: J. Atomspheric Sci. 20(1963)130-140.
8) Lotka,A.J.: J. Amer. Chem. Soc. 42(1920)1595-1599.
9) Mandelbrot,B.B: JFM 62(1974)331-358.
10) Meneveau,C. K.R.Sreenivasen: Phys. Rev. Lett. 59(1987)1424-1427.
11) Ruelle,D. Takens: Comm. Math. Phys. 20(1971)167-192.
12) 霜田光一、他：量子エレクトロニクス（上）（掌華房、１９７５）第２章.
13) Tyson,J.J: J. Chem. Phys. 58(1973)3919-3930.