

渦度場の有限時発散についての考察

東京電機大学理工学部 新井 勉 (Tsutomu Arai)

東京電機大学理工学部 福湯章夫 (Akio Fukuyu)

1. 序

本稿では、非粘性流体の流れの場に有限時間内に特異性が現れるか? という、いわゆるEuler方程式のblow-upの問題にたいして流体力学的な考察を与える。この問題にたいして、数学的に完全な証明を与えたり、有限時間内の特異性出現を示すような厳密解を具体的に求めることは当分望めそうにない。そこで、適当なモデルをつくって、流体现象としてのblow-upのメカニズムの理解を深めることが肝要と思われる。

筆者の一人(1)は、一般角度をなす二本の渦糸の3次元の相互作用によるblow-upの現象論的説明を試みた。それを要約すると以下の通りである。

渦糸の曲率半径が渦糸間の最短距離や渦糸の断面の直径に比べて十分に大きければ、渦糸は局所的には直線で近似できる。そこで、初めに一般角度をなす二本の直線渦糸を考える。各渦糸を構成する流体粒子は渦糸の各部分に誘導される速度で動くが、二本の渦糸が一般角度をなす場合、渦糸上に誘導される速度が部分ごとに異なるので、運動の結果、渦糸の引き伸ばしや縮みがおこる。これを一つの引き伸ばしの素過程と考える。一つの素過程は渦糸間の距離が定めるスケールを持つことになる。二本の渦糸の相互作用の結果、ある一つスケールから素過程によって渦糸上のどこかにもっと小さなスケールの状態が実現されたとすれば、そこで小さなスケールでの引き伸ばしの素過程が起こるはずである。このように、一つのスケールから素過程によって次々に小さなスケールの状態が実

現されれば、有限時間内に渦糸上に無限大の引き伸ばしの起こった点が現れるであろう。これが基本的な考え方である。

本稿では、上に考えた連続して起こる渦糸の引き伸ばしの素過程のモデル化を試みる。

2. モデル

渦度分布 $\omega(\mathbf{x})$ が与えられたとき、速度 $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ はポテンシャル部分を別にする **Biot-Savart** 則から求められるが、渦度が二本の渦糸 K 、 L に集中している場合には

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = -\frac{\Gamma}{4\pi} \int_K \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' - \frac{\Gamma'}{4\pi} \int_L \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \times d\mathbf{l}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}' \quad (1)$$

となる。ここで、渦糸の断面積は有限であるが十分に細いとする。 Γ 、 Γ' は渦糸 K 、 L の循環の強さである。以後簡単のために $\Gamma = \Gamma'$ とする。

はじめに K 、 L は直線渦糸とし、渦糸間の距離を a 、二本の渦糸のなす角度を θ とする。直線渦糸の自己誘導速度は零であるから、例えば渦糸 K に注目すると、 K は渦糸 L が K の各部分に誘導する速度で運動し始める。この誘導速度は上の **Biot-Savart** 則から求められる。ここで、流れの場にデカルト座標 (x, y, z) を導入する。 y 軸は初期の直線渦糸 K に沿ってとり、 L は $(0, 0, a)$ を通り K と角度 θ をなす直線とすれば、 L が K 上の点 $(0, y, 0)$ に誘導する速度は

$$\mathbf{u}(0, y, 0) = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\operatorname{cosec} \theta}{y^2 + a^2 \operatorname{cosec}^2 \theta} (a \cot \theta, -a, -y) \quad (2)$$

で与えられる。この式は初期 $t=0$ のみで正しいが、以後の解析では基本的な役割を果たす。

渦糸 K に沿って渦度の向きに計った長さを s とする。ただし、 K 上で K と L の最近接点を $s=0$ とする。微小時間 δt の間に K の線要素 δs が $\delta s'$ に変化したとする。上の式(2)を適用すると $\delta s'$ は

$$\delta s' = (1 + f(s)\delta t)\delta s, \quad f(s) = -\frac{\Gamma}{\pi} \frac{\beta a s}{(s^2 + \beta^2 a^2)^2}, \quad \beta = \operatorname{cosec} \theta \quad (3)$$

の形に与えられる。これから $\beta s > 0$ の部分で渦糸は縮み、 $\beta s < 0$ の部分で渦糸は引き伸ばされることがわかる。また、最大の伸びを与える点は、例えば $\beta > 0$ とすれば

$$s = -\frac{\sqrt{3}}{3} \beta a \quad (4)$$

である。

[2-1] 1次元モデル

直線渦糸 K 、 L が形を変えず直線のまゝ、角度を一定に保って衝突したとする。

(3)式を K に沿って積分すると

$$s' = s - \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{s^2}{\beta a (s^2 + \beta^2 a^2)} \delta t \quad (5)$$

また、微小 δt の極限では

$$\frac{ds}{dt} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{s^2}{\beta a (s^2 + \beta^2 a^2)} \quad (6)$$

を得る。二本の渦糸の相互作用において、実際にはこのような衝突は起こりえないが、一般角度をなす渦糸の3次元的な相互作用の局所的な性質を調べるにはこのような直接衝突を考えるのは有用である。

もし、渦糸間の距離 a が時間 t の関数として知れていれば、(6)式は時間について積分できる。例えば、 a が時間について

$$a \sim (t^* - t)^q, \quad q > 0 \quad (7)$$

のように減少したとする。これを(6)式に代入し、 s 、 t を適当に無次元化すると

$$\frac{ds}{dt} = \frac{s^2}{(t^* - t)^q \{s^2 + (t^* - t)^{2q}\}} \quad (8)$$

を得る。(8)式を初期値

$$s(0) = s_0 \quad (9)$$

のもとに解いた解について以下の結果を得る。

- (1)(a) この初期値問題は一意的な解を持つ。特に、 $s_0 = 0$ は解 $s(t) = 0$ を持つ。
 (b) $s_0 > 0$ に対して、 $q \geq 1$ ならば $t \rightarrow t^*$ で $s(t) \rightarrow \infty$ 、 $0 < q < 1$ ならば $t \rightarrow t^*$ で $s(t)$ は有界である。
 (c) $s_0 < 0$ に対して、すべての $q > 0$ について $s(t)$ は有界である。
- (2) $s_1(t)$ 、 $s_2(t)$ をそれぞれ任意の初期値 $s_0 = u$ 、 $s_0 = v$ ($u > v > 0$) に対する解とすると、 $0 \leq t < t^*$ で

$$0 \leq u - v \leq s_1(t) - s_2(t) \leq (u - v) \exp \left[\frac{1}{s_1^2 s_2^2} \left\{ \frac{s_1 + s_2}{1 + q} + \frac{1}{4(q - 1)} \right\} \right]$$

が成り立つ。すなわち、 $s_1(t) - s_2(t)$ は $t \rightarrow t^*$ で有界である。

- (3) $p(t)$ を次式で定義する。

$$p(t) = \frac{s(t)}{s_0}$$

$p(t)$ は初期の $s = 0$ から $s = s_0$ までの渦糸素片の長さと同じ渦糸素片の時刻 t における長さの比を表す。

このとき、 $s_0 > 0$ ならば、 s_0 によって決まる時間 $t_1 < t^*$ が存在して

$$s_0 \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad t_1 \rightarrow t^*$$

が成り立ち、かつ

$$0 < q < \frac{1}{2} \quad \text{ならば} \quad s_0 \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad p(t_1) \rightarrow 1$$

$$q \geq \frac{1}{2} \quad \text{ならば} \quad s_0 \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad p(t_1) \rightarrow \infty$$

以上の結果から渦糸の伸びの割合は二本の渦糸の接近速度に依存することがわかる。さらに、渦糸上の点 $s = 0$ を除いて長さが有限の渦糸素片はいつまでも有限のまゝにとどまる。また、 $s = 0$ の点に関して、 $q \geq 1/2$ ならばこの点、あるいはもっと正確には、 $s = 0$ を含む任意に小さい渦糸素片は $t \rightarrow t^*$ で限りなく引き伸ばされる。 $0 < q < 1/2$ ならば伸びは有限にとどまる。

[2-2] 力学的モデル

二本の一般角度をなす渦糸の相互作用において、初期に直線渦糸を考えたとしてもその後の時間では渦糸は変形し、局所的な渦糸間の最近接点は渦糸上を移動し、それらの点での接線のなす角度も変化するはずである。[2-1]の1次元モデルでは、これらの変化をすべて無視して直線渦糸が接近する際に渦糸に沿っての渦糸の伸び縮みのみを考慮したものである。こゝでは、渦糸の最近接点付近での渦糸の運動を考慮したモデルを考える。

渦糸に対する循環および体積の保存を使うと、(3)式は

$$\delta\omega(s) = \omega(s) f(s) \delta t \quad (10)$$

の形に書きかえられる。これは、微小 δt の極限で

$$\frac{d\omega}{dt} = \omega(s) f(s) \quad (11)$$

となる。(3)式と同様に、この式は $t=0$ 、あるいは、少なくとも渦糸の直線からのずれが無視できるほど小さいときのみ正しい。

二本の曲線渦糸の3次元的相互作用において、局所的な最近接点付近では、その

距離 a に比べて渦糸の曲率半径 p が充分大きければ、各瞬間ごとに(11)式が成り立つはずである。ただし、(11)式の s は各瞬間ごとに最近接点から渦糸に沿って計った距離である。したがって、(11)式によって渦度の増減を調べる際には、各瞬間ごとに新しい最近接点から s を計りなおすことになる。(3)、(4)から明らかのように、渦糸の有効の伸び縮みは最近接点からの距離が $O(a)$ の部分に限られる。このような状況のもとでは、(11)式の s に γ を定数として

$$s = \gamma a \quad (12)$$

を代入することが許されるであろう。このとき、(11)式は

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{\gamma\beta}{\pi(\gamma^2 + \beta^2)^2} \frac{\omega}{a^2} \quad (13)$$

となる。 γ は各スケールでの最近接点から渦糸に沿って計った無次元化した距離と考えてよい。角度 β は当然各瞬間ごとの異なる値をとるが、 $a \rightarrow 0$ で $\beta \rightarrow 0$ とならない限りある平均の値 β^* で置き換えてもよいであろう。本稿の目的は渦糸の変形の詳細を追跡することではなく、渦糸間の3次元的相互作用のなかに有限時間内に渦度の発散に導くようなメカニズムが内在しているかどうか検討することにある。このとき(13)式は C_1 を定数として

$$\frac{d\omega}{dt} = C_1 \frac{\omega}{a^2} \quad (14)$$

のように書き換えられる。 $C_1 > 0$ で a が減少すれば渦度は増大する。 $C_1 > 0$ は渦糸上の最近接点からの距離が $O(a)$ で渦糸の引き伸ばされている部分に注目していることに相当する。

初期に直線の渦糸でも渦糸上に誘導される速度が部分ごとに異なるので、 $t > 0$ では曲率が生ずる。(2)の速度からえられる曲率 κ の変化率は、(14)と同様にして C_2 を正の定数として

$$\frac{d\kappa}{dt} = \frac{C_2}{a^3} \quad (15)$$

で与えられる。

二本の直線渦糸の相互作用においては、距離 a は第一近似では変化しない。したがって、 a の変化にたいしては、他の渦糸の誘導速度は2次的な効果しか持たないと考えてよい。

よく知られているように、曲率が有限の渦糸は局所的な曲率に比例し、陪法線方向を向いた自己誘導速度をもつ。そこで、距離 a の減少率が曲率 κ に比例すると考えると

$$\frac{da}{dt} = -C_3\kappa \quad (C_3 > 0) \quad (16)$$

をうる。

C_1 、 C_2 、 C_3 を定数とすれば、(14)、(15)、(16) は ω 、 a 、 κ に対する閉じた方程式系になる(これをモデル1と呼ぶことにする)。この方程式系はつぎの形の解を持つことがわかる。

$$a(t) = \text{const.} (t^* - t)^{1/2}, \quad \kappa(t) = \text{const.} (t^* - t)^{-1/2}$$

$$\omega(t) = \text{const.} (t^* - t)^{-\eta}, \quad \eta = \frac{C_1}{2(C_2 C_3)^{1/2}}$$

これから、 $t \rightarrow t^*$ で渦度が発散することがわかる。

断面積が零の渦糸は、曲率が零でない点で無限大の自己誘導速度を持つ。この発散は断面積について対数的で、その効果は(16)式では無視した。この効果を取り入れると、(16)式の自然な拡張として

$$\frac{da}{dt} = -C_3 \kappa \ln \frac{\omega}{\kappa^2} + \text{const.} \quad (17)$$

をうる。(14)、(15)、(17)をモデル2と呼ぶことにする。モデル2に関してつぎの結果がえられる。すなわち、

ある有限な時間 t^* が存在してつぎが成り立つ。

$$a(t) \rightarrow 0, \quad \kappa(t) \rightarrow \infty, \quad \omega(t) \rightarrow \infty \quad \text{as } t \rightarrow t^*$$

さらに、ある正の定数 C_0 が存在して

$$a^2 \omega \geq C_0 \quad \text{for } t \in [0, t^*)$$

すなわち、このモデル2によっても流れの場のある点で渦度は有限時間内に発散することがわかる。

文献

福湯章夫、(1987) 3次元 Euler 方程式の解の blow up のメカニズム、ながれ 6