数理解析研究所講究録
第739巻 1991年 40-48

渦面の運動 ── 3次元化されたバーコフ方程式

名古屋大学 工学部 金田行雄 (Yukio Kaneda)

1. はじめに.

現実に起きるさまざまな流れの中で、その渦度が厚さのごく薄い面状あるいは断面積のごく小さい線状の領域にのみ存在することがあり、そのような領域をしばしば与えられた強さを持つ厚さあるいは断面積0の渦面あるいは渦糸としてモデル化することがある。 一般にこのような渦度分布に限らず、ある状態あるいは変化が限られたごく狭い領域にのみ存在する場合、そのような領域を厚み0の特異領域（**Singularity**）とみなしてモデル化することはよくあり、その際、その **Singularity** の内部構造の詳細に依らず、その **Singularity** の時間発展が記述できる場合がある。 例えば、気体の衝撃波については **Rankine-Hugoniot** の関係式によって衝撃波の運動はその内部構造の詳細に依らず記述できることが知られている。

それでは、渦面あるいは渦糸の場合にはどうであろうか？ 即ち、渦面（渦糸）の各点における強さなどの適当な局所的積分量とその場所のみを与えることに依って、その内部構造の詳細に依らない、渦面（渦糸）の運動の記述が可能であろうか？ 渦面（渦糸）のある流れ場の中の渦分布を **generalized function** 的な超関数であるとみなせば、このことはその超関数をつくる極限列の取り方によらず、その渦面（渦糸）の運動が一意的に決まるか？、と言い替えてもよい。 その可能性は、**Euler** あるいは **Navier-Stokes**

方程式などの渦運動を支配する基礎方程式が非線形であることから必ずしも自明ではない。 実際、渦糸の場合は3次元的流れの中ではもちろん、2次元的流れにおいてもそのことは不可能であることが簡単に示される。

では、渦面の場合ではどうであろうか? 完全流体中の渦面については、その運動を支配するオイラー方程式に基づいて上のことが可能であること、またその結果として、2次元流の中の渦面にたいするよく知られたいわゆるバーコフの式を3次元的な場合に一般化したものを導くことができる。 次節ではその結果を簡単に紹介し、第3節ではその結果の軸対称な渦面への応用、第4節ではそれから導かれる渦面の運動の保存則について述べる。

2. 3次元化されたバーコフ方程式.

ここでは次のオイラー方程式に従う完全流体中の無限に薄い渦面の運動を考える。

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p,$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{u} = 0.$$

渦度は渦面Sの内部にのみ存在するとすれば、Sの外で、$\mathbf{u} = \nabla\phi$ となるポテンシャルが存在する。 一般に面Sはその上の位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすれば、適当な二つのパラメーター、それをここでは (λ_1, λ_2) とする、とベクトル値関数 $\mathbf{R}$ を用いて

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t),$$

のようにパラメーター表示される。 以下、Sは十分滑らかであるとし、Φ を

$$\Phi(\lambda_1, \lambda_2, t) \equiv \phi^+(\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t), t) - \phi^-(\mathbf{R}(\lambda_1, \lambda_2, t), t),$$

で定義されるポテンシャルの差（ここで、添え字 $^{+},^{-}$ はSの片方の面とその反対側の面上の値を意味する）であるとする。

上に述べたような3次元流中の渦面について、以下のことが成り立つ;
初期時刻 $t=0$ で面Sと Φ が

$$\mathbf{r}=\mathbf{R}^0(\lambda_1,\lambda_2),$$

$$\Phi(\lambda_1,\lambda_2,0)=\Phi^0(\lambda_1,\lambda_2),$$

で与えられたとすると、面S即ち $\mathbf{R}$ の運動は

$$\frac{\partial\mathbf{R}(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\partial t}=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\frac{\mathbf{X}\times\mathbf{W}(\lambda_1',\lambda_2',t)}{|\mathbf{X}|^3}d\lambda_1'd\lambda_2', \tag{1}$$

で与えられ、その面の動きに沿って

$$\frac{\partial\Phi(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\partial t}=0,$$

が成り立つ、すなわち、Φはラグランジュ的不変量である。ただし、ここで

$$\mathbf{X}\equiv\mathbf{R}(\lambda_1,\lambda_2,t)-\mathbf{R}(\lambda_1',\lambda_2',t),$$

$$\mathbf{W}(\lambda_1,\lambda_2,t)=\Phi_1^0(\lambda_1,\lambda_2)\mathbf{R}_2(\lambda_1,\lambda_2,t)-\Phi_2^0(\lambda_1,\lambda_2)\mathbf{R}_1(\lambda_1,\lambda_2,t), \tag{2a}$$

であり、下付き添え字1,2は各々λ_1,λ_2についての偏微分を意味し、これ以降現われる積分はすべてその主値をとるものとする。 とくに、パラメターλ_1,λ_2 が初期時刻に $\mathbf{W}$ が $\mathbf{R}_2$ に平行になるようにとれば、$\Phi_2^0=0$ 、すなはち $\Phi_1^0=\Phi_1$ はλ_1 だけの関数、それを $\gamma(\lambda_1)$ とする、であり、

$$\mathbf{W}(\lambda_1,\lambda_2,t)=\gamma(\lambda_1)\mathbf{R}_2(\lambda_1,\lambda_2,t), \tag{2b}$$

となる。 γ がλ_1 の単調関数であれば、一般性を失うことなくλ_1を定義しなおして$\gamma=1$ とすることができる。

上の表現とは別に以前、**Sulem *et al.*** [C.Sulem, P.L.Sulem, C.Bardos, & U.Frisch, Commun.Math.Phys., 80,485(1981).] がある表現を導いている。 それによると、$\mathbf{W}$ は（２）の代わりに

$$\frac{\partial \mathbf{W}(\lambda_1,\lambda_2,t)}{\partial t}=\frac{1}{|\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2|^2}\{(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\lambda_1})(\mathbf{R}_2,\mathbf{W},\mathbf{R}_2\times\mathbf{R}_1)$$
$$+(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial\lambda_2})(\mathbf{R}_1,\mathbf{W},\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2)\}, \qquad (3)$$

に依って与えられる。 ここで $(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c})\equiv\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ である。(彼らの (6.13) 式参照、ただしその (6.12),(6.13) の分母 $\|...\|$ は誤りで $\|...\|^2$が正しい。） 彼らの表現では $\mathbf{W}$ を求めるには、非線形の発展方程式（３）を解かなければならないのに対して、上記の表現では $\mathbf{W}$は（２）から $\mathbf{R}$ が分かれば容易に求めることができる（Φは初期条件として与えられるので解く必要はない)。 この意味で上記の表現（（１）と（２））の方が簡単で数値計算や解析に便利である。

3. 軸対称な渦面の運動.

(z,σ,θ) を z軸を対称軸、σを z軸からの距離とする円筒座標、$(\mathbf{e}_z,\mathbf{e}_\sigma,\mathbf{e}_\theta)$ をその各軸方向の基本単位ベクトルとする。 いま、軸対称な流れ場 $\mathbf{u}$ がその座標系で

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}(z,\sigma,t)=u(z,\sigma,t)\mathbf{e}_z+v(z,\sigma,t)\mathbf{e}_\sigma,$$

のように与えられ、$\mathbf{R}$ 、Φ^0 が

$$\mathbf{R}(\lambda_1,\lambda_2,t)=(z(\lambda_1,t),\sigma(\lambda_1,t),\lambda_2),\qquad \Phi^0(\lambda_1,\lambda_2)=\Phi^0(\lambda_1),$$

のように与えられているとすると、(1) をλ_2につい積分して$\mathbf{r}(\lambda,t)\equiv z\mathbf{e}_z+\sigma\mathbf{e}_\sigma$, で定義された$\mathbf{r}$ に対して

$$\frac{\partial\mathbf{r}(\lambda,t)}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int\mathbf{F}(z,\sigma;z',\sigma')\gamma(\lambda')d\lambda', \tag{4}$$

が成り立つことが示される。　ここで

$$(z,\sigma)\equiv(z(\lambda,t),\sigma(\lambda,t)),\qquad (z',\sigma')\equiv(z(\lambda',t),\sigma(\lambda',t)),$$

$$\sigma\mathbf{F}(z,\sigma;z',\sigma')\equiv\mathbf{e}_z\frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial\sigma}-\mathbf{e}_\sigma\frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial z},$$

$$G(z,\sigma;z',\sigma')\equiv\int_0^{2\pi}\frac{\sigma\sigma'\cos\theta\,d\theta}{\sqrt{(z-z')^2+\sigma^2+\sigma'^2-2\sigma\sigma'\cos\theta}}$$

$$=\frac{4}{k}\sqrt{\sigma\sigma'}\{(1-\frac{k^2}{2})K(k)-E(k)\}, \tag{5}$$

$$k^2\equiv\frac{4\sigma\sigma'}{(z-z')^2+(\sigma+\sigma')^2},$$

であり、E 、K は各々第１種および第２種の完全楕円積分である。

(4) を (σ,z) の成分別に書くと

$$\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial t}=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial z}\gamma(\lambda'),d\lambda', \tag{6a}$$

$$\sigma\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial\sigma}\gamma(\lambda')d\lambda', \tag{6b}$$

となる。　いま、ψを

$$\psi(z,\sigma)\equiv\frac{1}{4\pi}\int G(z,\sigma;z',\sigma')\gamma(\lambda')d\lambda',$$

で定義すると、（６）は

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{1}{\sigma}\frac{\partial \psi}{\partial \sigma},$$

の形に書くこともできる。 この右辺はよく知られた軸対称な流れ場の流れ関数による表現と同じ形をしている。

4. 軸対称な渦面の運動の保存則.

(5) で与えられる G は以下の対称性を満たしている。

A]; $(z,\sigma),(z',\sigma')$ の入れ替えに対する対称性:

$$G(z',\sigma';z,\sigma) = G(z,\sigma;z',\sigma'), \tag{7}$$

B]; z方向への並進不変性：任意の h に対して

$$G(z+h,\sigma;z'+h,\sigma') = G(z,\sigma;z',\sigma'), \tag{8}$$

C]; スケール変換に対する不変性：任意の α に対して

$$G(\alpha z,\alpha\sigma;\alpha z',\alpha\sigma')/\alpha = G(z,\sigma;z',\sigma'), \tag{9}$$

いま T を

$$T = \int\!\!\int G(z,\sigma;z',\sigma')\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda',$$

で定義すると、以下のように、これらの対称性 **A**],**B**],**C**] に応じて保存則があることが示される。

A]; 一般に

$$\frac{dT}{dt} = \int\int\{\frac{\partial z}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial\sigma}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial\sigma}\}\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda' + \int\int\{\frac{\partial z'}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial z'}+\frac{\partial\sigma'}{\partial t}\frac{\partial G}{\partial\sigma'}\}\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda',$$

であるが、(7)から

$$\frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial z'} = \frac{\partial G(z',\sigma';z,\sigma)}{\partial z'}, \qquad \frac{\partial G(z,\sigma;z',\sigma')}{\partial\sigma'} = \frac{\partial G(z',\sigma';z,\sigma)}{\partial\sigma'},$$

であるから、この右辺の第一項と第二項は等しい。 また、その第一項は(6)から

$$4\pi\int\{\frac{\partial z}{\partial t}(-\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial t})+\frac{\partial\sigma}{\partial t}(\sigma\frac{\partial z}{\partial t})\}\gamma(\lambda)d\lambda = 0,$$

となる。 故にTは保存する。

B]; (8)から任意のhに対して

$$T = \int\int G(z+h,\sigma;z'+h,\sigma')\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda',$$

はhによらず一定であるから、

$$\frac{dT}{dh} = 0.$$

また、A]と同様にして(7)、(6)から

$$\frac{dT}{dh}|_{h=0} = 2\int\int\frac{\partial G}{\partial z}\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda' = -8\pi\int\sigma\frac{\partial\sigma}{\partial t}\gamma(\lambda)d\lambda,$$

となる。 故に

$$P \equiv \int\sigma^2\gamma(\lambda)d\lambda,$$

は保存する。

C]; （９）から任意のαに対して

$$T = \int\int \frac{1}{\alpha} G(\alpha z, \alpha\sigma; \alpha z', \alpha\sigma')\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda',$$

はα に依らず一定であるから、

$$\frac{dT}{d\alpha} = 0.$$

また、（７）、（６）から

$$\frac{dT}{d\alpha}|_{\alpha=1} = 2 \int\int \{z\frac{\partial G}{\partial z} + \sigma\frac{\partial G}{\partial \sigma}\}\gamma(\lambda)\gamma(\lambda')d\lambda d\lambda' - T$$

$$= 8\pi \int \{-z\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma^2\frac{\partial z}{\partial t}\}\gamma(\lambda)d\lambda - T.$$

故に

$$T = 8\pi \int \sigma\{-z\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma\frac{\partial z}{\partial t}\}\gamma(\lambda)d\lambda,$$

である。

なお、このような保存則の導き方はハミルトニアンの対称性から保存則を導く際によく使われるものである。

軸対称な渦糸について上の保存則に似た結果は有名な **Lamb** の **Text** にも別の方法で導かれている。 Tおよび P はそれぞれ **Lamb** のいうところの渦系の **Energy** および **Impulse** に定数倍の因子を除き一致している。 ただし、細い渦糸の運動は第１節に述べたようにその内部構造の詳細に依存し、その意味で断面積無限小の渦糸は **well − defined** な概念ではないことに注意しなければならない。 実際、断面積無限小の渦糸は、その

曲率が０でないところで、無限大の自己誘導速度を持ち、そのような渦糸については上のような保存則は意味を持たない。　従って、**Lamb** 結果を渦糸に実際に適用するには、なんらかの有限の断面積と渦糸の内部構造を仮定する必要がある。　一方、ここでは渦面の内部構造の詳細に依らず厚さが無限小の渦面についての保存則が導かれていることに注意されたい。