

乱流データのウェーブレット解析

京大防災研 山田道夫、 京大理物理 大木谷耕司

Wavelet Analysis of Turbulence Signal

Michio Yamada

(Disaster Prevention Research Institute,
Kyoto University)

Koji Ohkitani

(Department of Physics, Faculty of Science,
Kyoto University)

1. フーリエ解析とウェーブレット解析

時系列からの特徴的な変動周期を取り出す方法としてフーリエ解析はもっとも重要な手法である。データの時系列 $u(t)$ のフーリエ変換 $U(\omega)$ は、 $u(t)$ に含まれる調和振動 $\exp(i\omega t)$ の大きさを表しており、風速の時系列に含まれるさまざまな周期変動の強さの指標として、 $U(\omega)$ の絶対値の 2 乗であるフーリエスペクトル $E(\omega)$ が広く用いられている。

このようなフーリエ解析の利点は、まず第一に、変動を調和振動の和として表現することである。一般に、非線形系においても、変動の大きさが十分小さな範囲に留まるなら、系は線形系で近似され、その任意の解は基本解である調和振動の一次結合で表現される。この事実は、さまざまな形の周期変動のうちでも調和振動に特別な地位を与え、フーリエ分解が変動の分解としてもっとも基本的なものと考えられる根拠の一つとなっている。通常、「純粋な」周期変動として調和振動をとるのは、それが線形系における基本解であるからに他ならない。

一方、非線形性の強い現象ではこのような基本解はもはや適切なものではなく、調和振動は純粋な周期変動としての特別な意味を失うことになる。しかし、このような強非線形系においても、フーリエ解析はなお有用であり、例えば、一様等方性乱流ではそのフーリエスペクトルに特徴的な $-5/3$ 乗のべき則（コロモゴロフ則）が見られることが知られている。フーリエスペクトルにこのようなべき則が見いだされる系は多数存在し、このことが強非線形系のフーリエ解析に積極的な意味を与えている。このようなべき則の出現は、一般に、次の 2 つの理

由によっている。まず第一に、べき則の存在が示唆するように、系に特徴的なスケールが存在せず生起する現象の構造が自己相似的であることである。また第二に、フーリエ分解の積分核である調和振動が（異なる振動数のもの同士）互いに相似な関数系をなしていることである。すなわちべき則の存在は、系の運動（時系列）に内在する自己相似性と、解析に用いる関数系がもつ相似性の両方を成因としている。強非線形系のフーリエ解析においては、調和関数が線形系の基本解であることは、積極的な利点とはなっていない。

このように、フーリエ解析の広い有用性は、調和振動が周期性と相似性の性質を兼ね備えていることによっている。しかし、これらの両者の性質を持つことによって、逆に不便な点も生じている。その最も大きなものは、フーリエスペクトルでは現象の生起した時刻に関する情報が全く欠落してしまうことである。つまり、時刻の情報はフーリエ変換（あるいはフーリエ係数）の位相部分にだけ反映し、その振幅、従ってスペクトルにはまったく含まれない。このため、例えば、一つの時系列の中に異なる種類の現象が混在している場合、フーリエスペクトルからその事実を知ることは困難であり、それぞれの構造を解析することはさらに難しい。すなわち、フーリエ変換は変動の局所性を考慮した解析には適していないのである。例えば、データから、原因や特徴の異なる風速変動を区別して解析することにはフーリエ解析は向いていないと考えられる。

このような点を改善するため、従来から多くの実用的方法が開発されてきた。データの時系列中の局所的な調和振動の周期を調べたいときには、例えば、あらかじめデータにウィンドウをかけ注目する振動だけを残してからフーリエ変換を用いることが行われる。この方法は、振動周期がウィンドウ幅よりもはるかに小さい時にはよい結果をあたえるが、同程度の大きさのときには、ウィンドウの形への依存性やウィンドウ幅と周波数分解能の間の不確定性関係などの問題を生ずることが知られている。一方、データの時系列において局所的に注目したいものが、振動周期ではなく、スペクトルのべき則などの自己相似的な構造である場合には、上に述べたように、必ずしも調和振動を用いる必要はない。フーリエ解析の欠点は、フーリエ変換の積分核 $\exp(i\omega t)$ が、空間的には一様な大きさ（絶対値は常に1）をもつ関数であることに起因している。そこで積分変換の積分核、すなわち展開の基底関数系を、時間軸上で局在化した、しかも互いに相似的な関数に選ぶことによって、局所事象の相似構造の解析に適した方法を作ることが考えられる。この着想に基づく解析法は1980年初めに石油探査に関連して試みられ、後に80年代後半に数学者によって基礎づけられた。現在この方法はウェーブレット変換法（wavelet transform method）とよばれている。本論文では、このウェーブレット解析の方法の紹介と、それを用いて大気乱流の速度変動を調べた結果を報告する。

2. 連続ウェーブレット変換

現在、ウェーブレット変換法には、連続ウェーブレット変換および離散ウェーブレット変換の2種のものがある。歴史的には前者が先に開発され後に後者が提案された。それぞれに長短があり、本論文では離散ウェーブレット変換を用いて大気乱流の速度変動の解析を行うが、ここではまず歴史的な順序に従い連続ウェーブレット変換に触れる。

関数 $f(t)$ のウェーブレット変換 $T\phi(a, b)$ は

$$T\phi(a, b) = (1/\sqrt{c}) \int_{-\infty}^{\infty} \phi((t-b)/a) \cdot f(t) dt, \quad (1)$$

と定義される¹⁾。ここに現れる二つのパラメーター a と b は共に実数で、変換の形からわかるように、それぞれスケールと位置に対応している。積分核の関数はただ一つの関数 ϕ の平行移動と相似変換によって作られており、この基本的関数 ϕ はアナライジング・ウェーブレット (analyzing wavelet) と呼ばれる。上の変換式に現れる定数 c はアナライジング・ウェーブレットのフーリエ変換

$$\hat{\phi}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \phi(t) dt, \quad (2)$$

を用いて次のように定義される量である、

$$c = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega)|^2 / |\omega|^2 d\omega. \quad (3)$$

c の値が有限 (admissibility condition) であるような ϕ に対しては、二乗可積分な関数 $f(t)$ のウェーブレット変換には逆変換が存在し、

$$f(t) = (1/\sqrt{c}) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} T\phi(a, b) \cdot \phi((t-b)/a) / a^2 da db, \quad (4)$$

となることが証明される。ここに定義したウェーブレット変換は、 $L^2(\mathbb{R})$ から並進とスケール変換の作る群の上の L^2 空間への写像であるが、より一般的には、ヒルベルト空間からそれを表現空間とする局所コンパクト群上の L^2 空間への写像として定式化することが可能である²⁾。なお $\phi(t)$ が $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ に属す場合には、上の条件 (admissibility condition) は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t) dt = 0, \quad (5)$$

と同値である。

ウェーブレット変換は、関数 $f(t)$ とそのウェーブレット変換 $T\phi(a, b)$ の間の対応を与えており、形式的にはフーリエ変換と類似の形をしている。しかし、ウェーブレット係数 $T\phi(a, b)$ を物理的に解釈する時には注意が必要である。確かに、ウェーブレット変換は形の上でフーリエ変換とよく似ており、実際、 $L^2(\mathbb{R})$ の関数 $f(t)$ については、 $f(t)$ の”エネルギー”を二乗和に表現する等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |T\phi(a, b)|^2 / a^2 da db, \quad (6)$$

が成り立つことを証明できる。この関係式は、フーリエ解析におけるパーセバル (Parseval) の等式に類似しており、 $|T\phi(a, b)|^2$ が各基底成分のもつ “エネルギー” を表しているように見える。しかし、フーリエ変換の場合と基本的に異なるのは、基底 $\{\phi((t-b)/a)\}$ が、一般に直交基底ではなく斜交基底であること、および基底として過剰で完全系を真の部分集合として含んでいること (over-complete) である。特に、フーリエ変換の場合フーリエ係数の大きさの2乗が “各成分のもつエネルギー” として解釈されるのに対し、ウェーブレット変換では基底の斜交性と過剰性のために $|T\phi(a, b)|^2$ がこのような直截な意味を持たない。そのため、(5) 式の関係に物理的あるいはエネルギー的な内容を与えることは難しく、特に、定量的なエネルギー解析には適していない。

3. 離散ウェーブレット変換 (ウェーブレット展開)

前節で述べたように、ウェーブレット変換の基底は斜交系でありしかも過剰系であるため、ウェーブレット係数 $T\phi(a, b)$ にエネルギー的な内容を与えることが難しい。この点に注目し、エネルギー的な解析に適した形をもつウェーブレット変換を得るために、基底関数の直交化が1980年代半ばにフランスの数学者によって行われた。

直ちに分かるように、直交化されたウェーブレットではパラメーター (a と b) が連続ではあり得ず、離散的になる。実際には、スケール変換を2のべきにとり、適当なアナライジング・ウェーブレット ϕ から離散的な平行移動とスケール変換によって

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(t) &= 2^{-j/2} \phi(2^{-j}t - k), \\ (j, k \text{ は整数, } \|\phi_{j,k}\| &= 1), \end{aligned} \quad (7)$$

のように作ることが多い。ここで、 j はスケール、 k は $k/2^j$ の形で時刻 (位置) を表わす。これらのウェーブレット $\phi_{j,k}(t)$ は、 $L^2(\mathbb{R})$ の正規直交基底をなしており、関数 $f(t)$ は次の形 (ウェーブレット展開)

$$f(t) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k} \phi_{j,k}(t), \quad (8)$$

に展開される。ここで $\alpha_{j,k}$ は展開係数、 $\phi_{j,k}$ は適当なアナライジング・ウェーブレット ϕ から離散的な平行移動とスケール変換によって生成される基底である。

アナライジング・ウェーブレットの選び方は、これまでにいくつかの方法が提案されているが、以下では Mayer⁷⁻⁸⁾ のものに従い、フーリエ空間においてコンパクト・サポート、かつ実空間において急減少 C^∞ 関数となるアナライジング・ウェーブレット $\phi(t)$ を、次のように構成して用いることにした。

$$\phi(t) = (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) \hat{\phi}(\omega) d\omega, \quad (9)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \exp(-i\omega/2)$$

$$\times \sqrt{[(\hat{\phi}(\omega/2))^2 - (\hat{\phi}(\omega))^2]}, \quad (10)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \sqrt{(g(\omega)g(-\omega))}, \quad (11)$$

$$g(\omega) = h(4\pi/3 - \omega) / [h(\omega - 2\pi/3) + h(4\pi/3 - \omega)], \quad (12)$$

$$h(\omega) = \begin{cases} \exp(-1/\omega^2), & (\omega > 0), \\ 0, & (\omega \leq 0). \end{cases} \quad (13)$$

Fig. 1 にアナライジング・ウェーブレット $\phi(t)$ の形を示す。ここで構成したアナライジング・ウェーブレット $\phi(t)$ は急減少関数であるので局在化の程度は非常に良い。また、ウェーブレット展開の特徴は収束性が良いことで、例えば $f(t)$ が C^m 級のときは、大まかに言って

$$f(t) - \sum_{i=-\infty}^J \sum_k \alpha_{i,k} \phi_{i,k}(t) = O((2^J)^{-m+1}), \quad (J \rightarrow \infty), \quad (14)$$

が成り立つが、これはウェーブレット展開の収束性がフーリエ級数と同程度であることを示している。なおこのような、アナライジング・ウェーブレットの形は唯一ではなく、数学的には非常に多くの可能性があるが、どのようなアナライジング・ウェーブレットを用いても、相似な関数による基底系が作られるので、もとの関数 $f(t)$ の自己相似的な性質に関しては同じ結果をあたえると期待される。

ウェーブレット展開の係数 $\alpha_{i,k}$ は、各ウェーブレットへの直交射影により

$$\alpha_{i,k} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{i,k}^*(t) f(t) dt \quad (15)$$

のように求めることができる。この右辺は、 j を固定すると本質的に畳み込み演算であるので、次のように、フーリエ空間では単なるかけ算に帰着される。

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_{i,k}(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \phi_{i,k}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) 2^{i/2} \phi(2^i t - k) dt \\ &= 2^{-i/2} \exp(-ik 2^{-i}\omega) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \phi(y) \exp(-ik 2^{-i}y) dy \\ &= 2^{-i/2} \exp(-ik 2^{-i}\omega) \hat{\phi}(2^{-i}\omega) \end{aligned} \quad (16)$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) f(t) dt \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= (1/2\pi) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{i,k}^*(\omega) F(\omega) d\omega \\ &= (1/2\pi) 2^{i/2} \exp(ik\omega) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}^*(\omega) F(2^i\omega) d\omega \end{aligned} \quad (18)$$

従って、ウェーブレット係数を数値的に求めるときは、上式を離散化し FFT をもちいて $f(t)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めた後、(18) に従って、 $\hat{\phi}^*(\omega)$ との積を作り再び FFT を用いて実空間に戻せばよい⁹⁻¹⁰⁾。

ウェーブレット展開の基底 $\{\phi_{i,k}(t)\}$ は完全正規直交系であるので、展開係数 $\alpha_{i,k}$ の物理的な内容も通常の直交関数展開の場合と全く同様である。従って、特に、ウェーブレット展開においては、 $|\alpha_{i,k}|^2$ を用いて、「ある時刻(

場所)においてある時間(空間)スケールをもつの変動成分のエネルギー」について語ることが可能になる。また、前にも述べたように、これらの展開係数に現れるスケーリングの性質はアナライジング・ウェーブレットの選び方によらないと考えられる。いまウェーブレット係数 $\alpha_{i,k}$ から、フーリエスペクトルに対応する量であるウェーブレットスペクトル E_i を次のように作ると、

$$E_i = \sum_k |\alpha_{i,k}|^2 \quad (19)$$

これは、スケール j の変動成分のもつエネルギーであり、フーリエスペクトル $E(\omega)$ とは、大まかに言って、

$$E_i \sim \omega E(\omega), \quad \omega \sim 2^{-i} 2\pi/3 \quad (20)$$

の関係(ただし展開の基底関数が異なるので、厳密な関係ではなく、大きさのオーダーの関係)を持つ。この関係は、アナライジング・ウェーブレットのフーリエ変換 $\hat{\psi}(\omega)$ がフーリエ空間でコンパクトサポートであることの直接の結果である。これから、フーリエスペクトルでのべき則とウェーブレットスペクトルでのべき則の間には、

$$E(\omega) \sim \omega^{-p} \iff E_i \sim 2^{-(p-1)i} \quad (21) \text{の対応関係}$$

係が成り立つことが導かれ⁹⁻¹⁰⁾、多くの例で確かめられている。

4. 乱流変動のウェーブレット解析

熱線風速計(100 Hz、8分)を用いて得た大気乱流の速度変動データについてウェーブレット解析を適用した。風速は0.5 m/sであったが、以下では、少なくとも小さなスケールの乱流運動についてはTaylor仮設が適用可能と仮定する。Fig. 2にこのデータのフーリエスペクトルを示す。このスペクトルはデータの長さ4096毎のスペクトルを平均したものである。高周波領域ではべき則が見られ、その傾きは $-5/3$ に近いが精度はそれほど良くなく、例えば $-3/2$ と区別することは難しい。Fig. 3は同じデータ(長さ32768)から作ったウェーブレットスペクトルである。縦軸、横軸とも2を底とする対数表示を用いている。大きな j (-7 以上)では、やはりべき則が観察され、傾きは $-2/3$ より $-1/2$ に近い。これは(21)によればコルモゴロフ則からのずれを意味している。

ここで、このずれは、発達した乱流の慣性小領域がなんらかの外部攪乱によって汚されているために生じた(作業仮設)と考え、汚されていない部分だけを取り出すことを試みる。ここでは、そのような攪乱は時間的に局所的であり、平均よりも大きなウェーブレット係数を生じさせられると思われるので、これら各時刻の速度変動を、強弱2種類のものに分離・抽出し解析することを考える。通常のフーリエ係数を用いてこのような分離を行うと、データが寸断されることになり、分離・抽出されたデータの解析が困難になる。しかし、ウェーブレット係数の場

合は、局所化された展開関数を用いているため、分離後のデータに対して、エネルギースペクトルなどを容易に作ることができる。ここでは、ウェイブレット係数 $\alpha_{i,k}$ の条件付き抽出法として、次のようなものを採用した。

ウェイブレット係数 $\alpha_{i,k}$ を、各スケールにおける R. M. S. の F 倍を基準にして、それ以下のもの (A) とそれ以上のもの (B) の 2 つに分ける。ここで F は適当な正の数である。すなわち、

$$A: |\alpha_{i,k}| \leq F\sqrt{\langle |\alpha_{i,k}|^2 \rangle_k}, \quad (22)$$

$$B: |\alpha_{i,k}| > F\sqrt{\langle |\alpha_{i,k}|^2 \rangle_k}, \quad (23) \text{ である。}$$

ここでブラケット $\langle \rangle_k$ は、与えられたスケール j においてすべての k (時刻) について平均することを意味している。F の値としては特に指針が無いので、いくつかの値を試みた。

このようにして、A, B の 2 組に分離されたウェイブレット係数 $\alpha_{i,k}$ に対して、それぞれのスペクトル密度は

$$E^u_i = \Sigma^A_k |\alpha_{i,k}|^2 / (\text{A のウェイブレット係数の個数}), \quad (24)$$

$E^d_i = \Sigma^B_k |\alpha_{i,k}|^2 / (\text{B のウェイブレット係数の個数}), \quad (25)$ のように求められる。ここで Σ^A_k は A に属すウェイブレット係数についての (k に関する) 和をとることを意味している。 Σ^B_k についても同様である。Fig. 3 はこのようにして求められたウェイブレットスペクトル密度 ($F=5$) である。B (disturbed) のスペクトルの傾きは $-1/2$ に近いが、A (undisturbed) のスペクトルの傾きはほぼ $-2/3$ に一致している。この結果は F の値が 0.01 から 20 の範囲で変化せず、従って、ここで採用した作業仮説を支持していると考えられる。また、さらに、このようにして得られた汚染されていない部分 A について、三次のモーメント

$$\langle \delta u(r)^3 \rangle \quad (26)$$

を作ると、理論結果と一致する r^{-1} の依存性が観察され (Fig. 4)、A が汚染されない慣性小領域に対応することが確かめられる。

最後に、この A の部分のデータを用いて、発達した乱流の間欠性指数 μ を求めた。この μ は用いる現象論によって定義が異なるが、ここでは β モデルおよび対数正規分布モデルのよる定義を採用した。これらのモデルはエネルギー散逸の相関に対して、共に、

$$\langle \varepsilon(x+r)\varepsilon(x) \rangle \sim \langle \delta u(r)^6 / r^2 \rangle \sim r^{-\mu} \quad (27)$$

の関係式を与えている。この中間の項を求めたのが Fig. 5 であり、グラフから、

$$\mu = 0.2 \quad (28)$$

と求められる。この値は、Anselmetらの精密な実験により得られた値、

$$\mu = 0.2 \pm 0.05 \quad (29)$$

とよく一致しており、ウェーブレット解析を用いることで、あまり良くないデータの質を向上されることが可能であることを示している。さらにウェーブレット解析は空間（時間）に局所化したスケール解析が可能であることに特色を持っているが、この方向の解析は現在進行中であり、この結果については別に報告する予定である。

参考文献

- 1) Combes, J.M., A. Grossmann and Ph. Tchamitchian (eds.): Wavelets, Springer, 1989.
- 2) Grossmann, A. and J. Morlet: Decomposition of functions into wavelets of constant shape, and related transforms, in Mathematics+Physics (ed. L. Streit), vol.1, World Scientific, 1985, pp.135-165.
- 3) Arneodo, A., F. Argoul, J. Elezgaray and G. Grasseau: Wavelet transform analysis of fractals: Application to Nonequilibrium phase transitions, in Nonlinear Dynamics (ed.) G. Turchetti, World Scientific, 1989, pp.130-180.
- 4) Farge, M. and G. Rabreau: Wavelet transform to detect and analyze coherent structures in two-dimensional turbulent flows, C.R.Acad.Sci., vol. II-317, 1988, pp.1479-1486.
- 5) Argoul, F., A. Arneodo, G. Grasseau, Y. Gagne, E. J. Hopfinger and U. Frisch: Wavelet analysis of turbulence reveals the multifractal nature of the Richardson cascade, Nature, vol.338, 1989, pp.51-53.
- 6) Arneodo, A., G. Grasseau and M. Holschneider: Wavelet transform of multifractals, Phys. Rev. Lett., vol.61, 1988, pp.2281-2284.
- 7) Meyer, Y.: Orthonormal wavelets, in Wavelets (eds. J.M. Combes, A. Grossmann and Ph. Tchamitchian), Springer, 1989, pp.21-37.
- 8) Morimoto, A.: On the ondelette expansion, Master thesis in mathematics department of Kyoto University, 1988.
- 9) Yamada, M. and K. Ohkitani: Orthonormal wavelet expansion and its application to turbulence, Prog.Theor.Phys., vol.83, 1990, pp.1-5.
- 10) Yamada, M. and K. Ohkitani: Spatial structure of eddies in turbulence

nce, 1990 (発表予定).

11) 山口昌哉・山田道夫：ウェーブレット解析、科学、岩波書店、1990年6月， p
p. 398-405.

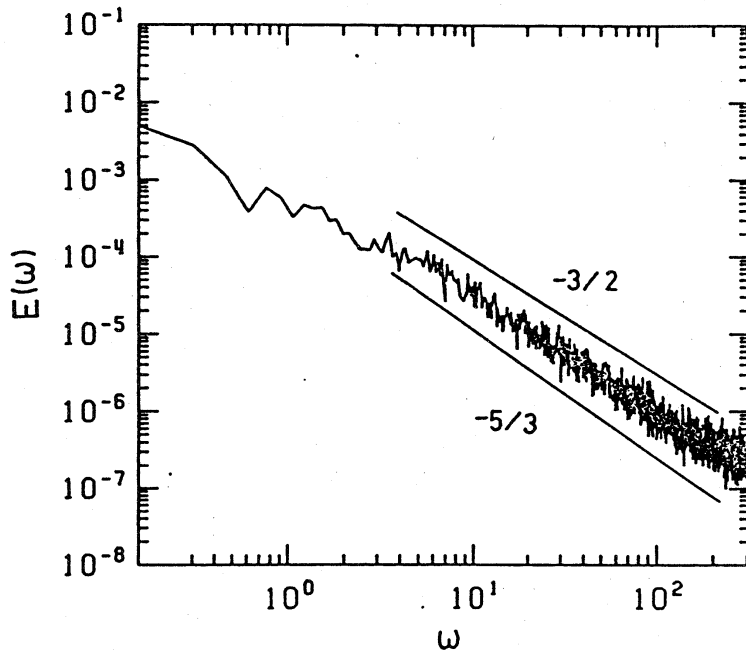


Fig. 1
エネルギースペクトル

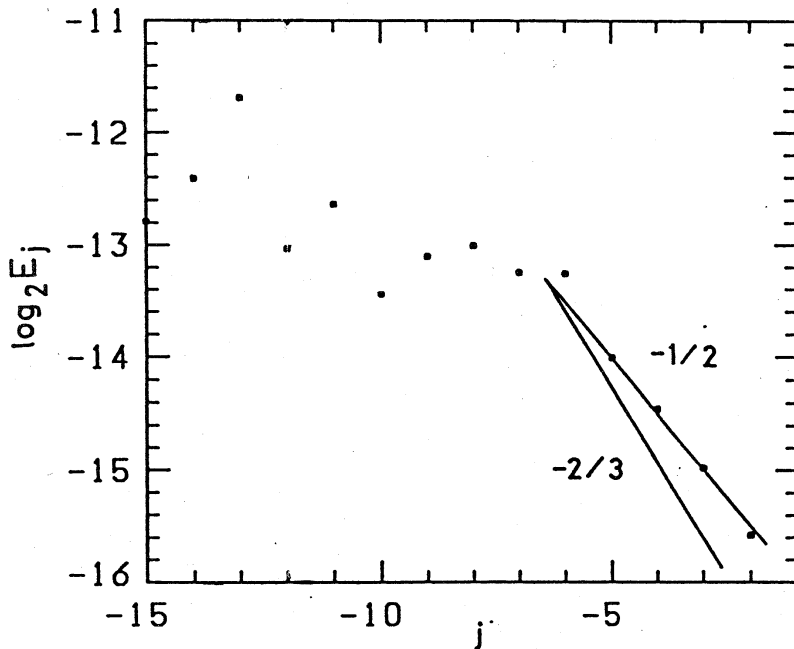


Fig. 2
ウェーブレットスペクトル

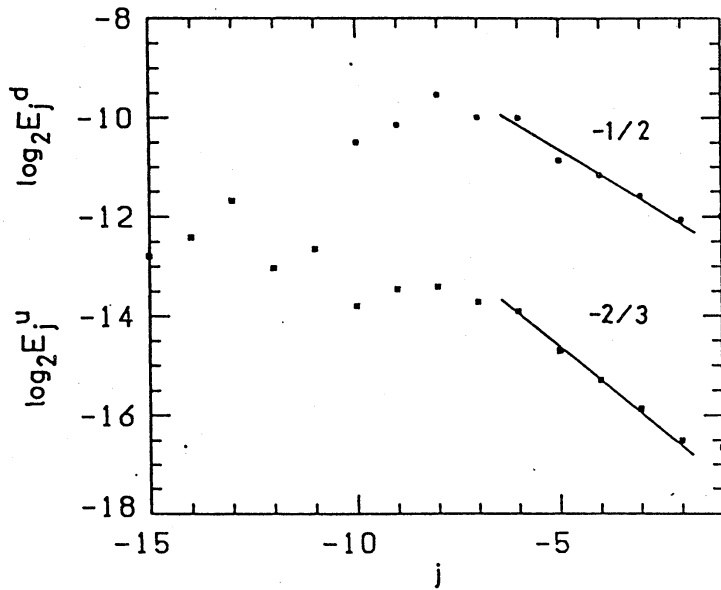


Fig. 3
条件付抽出された
ワイルドレットスケーリング

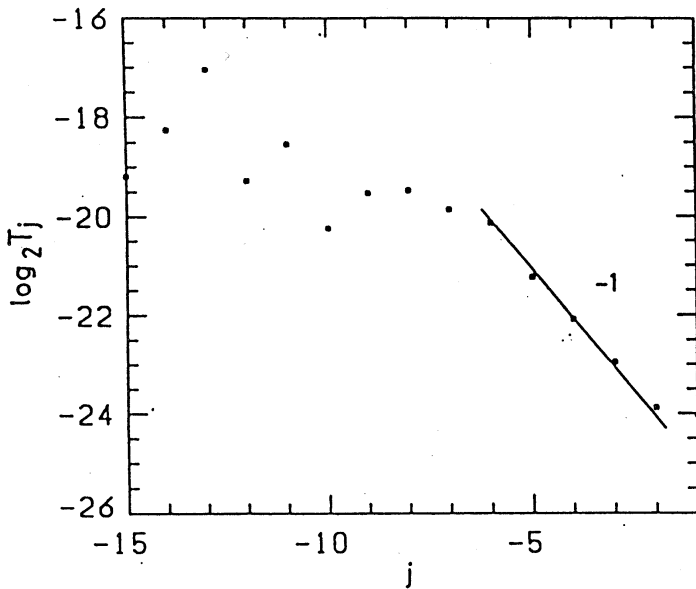


Fig. 4
 $T_j = \langle (\delta U(m))^3 \rangle$
 $\sim 2^{\frac{3}{2}j} \sum_k |\alpha_{j,k}|^3$

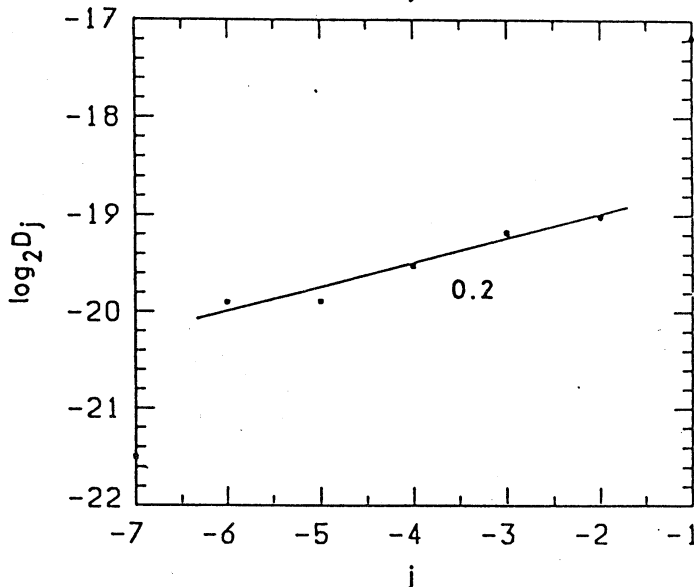


Fig. 5.
 $D_j = \langle (\delta U(m))^6 / r^2 \rangle$
 $\sim 2^{5j} \sum_k |\alpha_{j,k}|^6$