

乱流における波の位相分布固定仮説

- Assumption of Phase Locking of Turbulence -

相模工業大学 水島二郎 (Jiro Mizushima)

1. はじめに.

乱流の大規模運動は個性を持っており、初期条件や境界条件により異なった性質を持っている。一方、小規模運動すなわち微細構造については異なった状況で発生する乱流についても普遍的な性質があるものと期待されてきた。乱流の微細構造についてはこれまでに数多くの実験的及び理論的な仕事が行われており、慣性小領域でのコルモゴロフの $-5/3$ スペクトルをはじめ粘性消散領域の構造についてもその性質がある程度明らかになってきた。特に、最近では Kida and Murakami (1989) は対称性を持つ乱流の数値シミュレーションを行い、乱流の微細構造を詳しく調べている。

乱流の大規模構造に関する研究成果の大部分は実験的な研究によるものが中心である (Hussain, 1986 参照)。大規模構造についての理論的な研究は1925年にプラントルが混合距離理論を提出して以来数多くの試みがなされてきたが、決定的な研究方法は確立されていない。また、数値シミュレーションによる大規模構造の研究の試みもなされており、その代表的なものとしては、スマゴリンスキーモデルに代表されるラージエディシミュレーション (LES) である。LESについても多くのモデルが提出されており、それらのモデルを用いた数値シミュレーションも行われてきたが、モデルに対する正当性の証明は十分であるとはいえない状況である。大規模構造の理論的研究とLESモデルについて共通していることは乱流の大規模運動に対する小規模な運動の影響をいかにして取り込むかということに重点がおかれている点にある。

ここでも、乱流の大規模な運動に対する小規模な運動の効果を取り込む一つの方法を提案する。まず、乱流の微細構造は普遍的であることを仮定し、その微細構造に対する複素速度成分の振幅と位相の性質を詳しく調べる。次に、その

結果を用いて大規模な運動に対する小規模運動の効果を取り込み、大規模運動に対する複素速度成分だけで閉じた運動方程式を導く。さらに、得られた大規模運動に対する運動方程式を解くことにより、乱流の大規模構造を調べる。ここでは、まず二次元バーガス方程式をモデルとして用いるが、三次元ナビエ・ストークス方程式についても同様の議論が可能である（と信じている）。また、この方法によく似た仕事として Yakhot and Orszag (1986) の繰り込み群の方法を用いた論文もあるが、彼らの理論には外力の導入の仕方の根拠がないなど多くの問題点が存在し、しかも彼らの方法は乱流の大規模構造の解明には役に立たないと思われる。

2. バーガス乱流の微細構造.

バーガス方程式は厳密解が得られており、その微細構造はショックで構成されていることが知られている。ここでは、乱流状態においてもその微細構造は変わらないものとして、まずショックを表す解の複素速度成分を求めてみよう。

バーガス方程式

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = (1/R) \partial^2 u / \partial x^2 \quad (1)$$

の厳密解は次のように求められる。

$$u(x, t) = (1/t)(x/\pi) - (1/t) \tanh(Rx/2t\pi) \quad (2)$$

ただし、ここでは、ショックが原点 $x=0$ に位置し、速度は 2π の周期を持つものと仮定した。(2) 式をフーリエ変換し、 $(R/2\pi) \gg 1$ の極限を考えるとショックに対応する微細構造を表す複素速度成分は次のようになる。

$$v(k, t) = (i/R) \operatorname{cosech}(t\pi 2k/R) \quad (3)$$

(3) 式は $k \ll (t\pi 2/R)$ の近似の下で

$$v(k, t) = (i/t\pi 2 k) \quad (4)$$

となり、これがよく知られているバーガス乱流の k^{-2} スペクトルを表している。(3) 式における $v(k, t)$ の絶対値（振幅）は乱流状態における微細構造のスペクトルを決定していることが期待できるが、その位相についても同様な期待ができるだろうか。次節で述べるようにその答えはノーである。微細構造を表す複素速度の位相がどのようなになっているのか調べるためにバーガス乱流の数値シミュレーションを行った。次節でその結果を示そう。

3. バーガース乱流の数値シミュレーション.

バーガース乱流の微細構造を調べるために数値シミュレーションを行った。複素に対する方程式は(1)式をフーリエ変換して次のように表せる。

$$\partial v(k, t) / \partial t = - \sum_q i q v(k-q, t) v(q, t) - \nu k^2 v(k, t) . \quad (5)$$

初期条件は次のものを用いた。

$$E(k, 0) \equiv |v(k, 0)|^2 = E_0 \beta_a (k/k_0)^a \exp(-\alpha_a (k/k_0)^2) \quad (6)$$

ここで、

$$\alpha_a = (a+1)/2 ,$$

$$\beta_a = \alpha_a^{-\alpha_a} / \Gamma(\alpha_a)$$

である。 a の値は 0 と 2 の二通りについて計算をしたがスペースの関係で $a=0$ の結果のみを示す。 レイノルズ数は $R=100$ を使い、空間分解能は $N=1024$ を採用した。 アライアジングエラーを $2/3$ ルールで消去したため、有効な波数はほぼ 340 個である。 また、 $k_0=0.5$ とした。 時間刻み $\Delta t=0.001$ で 10000 ステップ、すなわち、 $t=10$ まで計算を行った。

数値シミュレーションの結果のうち、まず統計量に関するものを示す。 単位長さあたりのエネルギー密度 $\mathcal{E}(t)$ は次の式で定義される。

$$\mathcal{E}(t) = \int_0^\infty E(k, t) dk = \int_0^\infty |v(k, t)|^2 dk. \quad (7)$$

$\mathcal{E}(t)$ の時間発展を図 1 に示す。 図 1 中に $t^{-2/3}$ の傾きを持つ線分を書き加えた。 Mizushima の現象論によれば $\mathcal{E}(t)$ は $t^{-2/3}$ に比例して減少する。 今回の結果は Mizushima (1978) の結果とよく一致している。 速度の一階微分のスキューネスは次の式で定義される。

$$S(t) = (1/\sqrt{2}) \int_0^\infty k^2 T(k, t) dk / \left(\int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \right)^{3/2} . \quad (8)$$

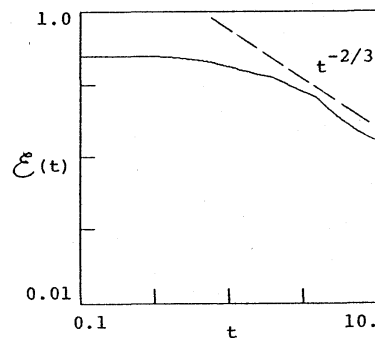


図 1. エネルギー $\mathcal{E}(t)$ の時間発展. $\log \mathcal{E}(t) - \log t$.

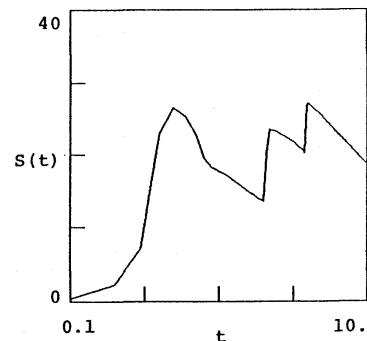


図 2. スキューネス $S(t)$ の時間発展. $S(t) - \log t$.

ここで、 $T(k, t)$ は非線形相互作用によるエネルギー伝達スペクトルである。図2に $S(t)$ の時間発展を示す。 $S(t)$ の性質については Mizushima and Tatsumi (1981)の論文で詳しく調べられている。テイラーのマイクロスケール $\lambda(t)$ は次式で定義される。

$$\lambda(t) = \left(\int_0^\infty E(k, t) dk / \int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \right)^{1/2} \quad (9)$$

$\lambda(t)$ の時間発展を図3に示す。 $\lambda(t)$ は発展の初期には $t^{1/2}$ に従って増加することが分かっている。マイクロスケールレイノルズ数 $R_\lambda(t)$ は次式で定義される。

$$R_\lambda(t) = \sqrt{2} R \int_0^\infty E(k, t) dk / \left(\int_0^\infty k^2 E(k, t) dk \right)^{1/2} \quad (10)$$

$R_\lambda(t)$ の時間発展を図4に示す。

つぎに $0 \leq t \leq 1.0$ の各時刻におけるエネルギースペクトルを図5(a)-(k)に示す。

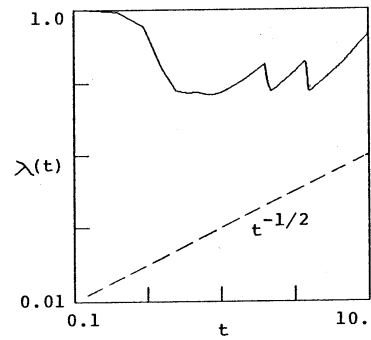


図3. マイクロスケール $\lambda(t)$ の時間発展. $\log \lambda(t) - \log t$.

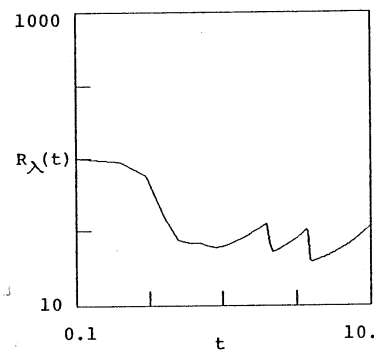
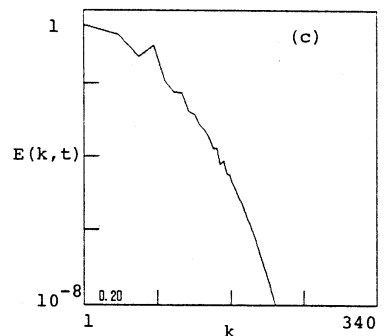
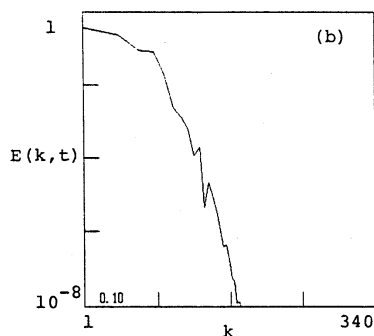
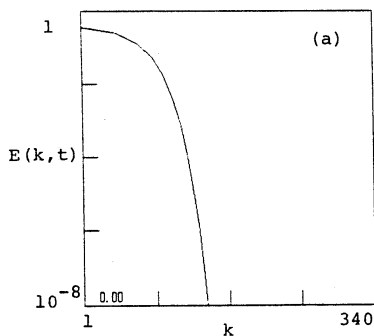


図4. マイクロスケールレイノルズ数 $R(t)$ の時間発展. $\log R(t) - \log t$.



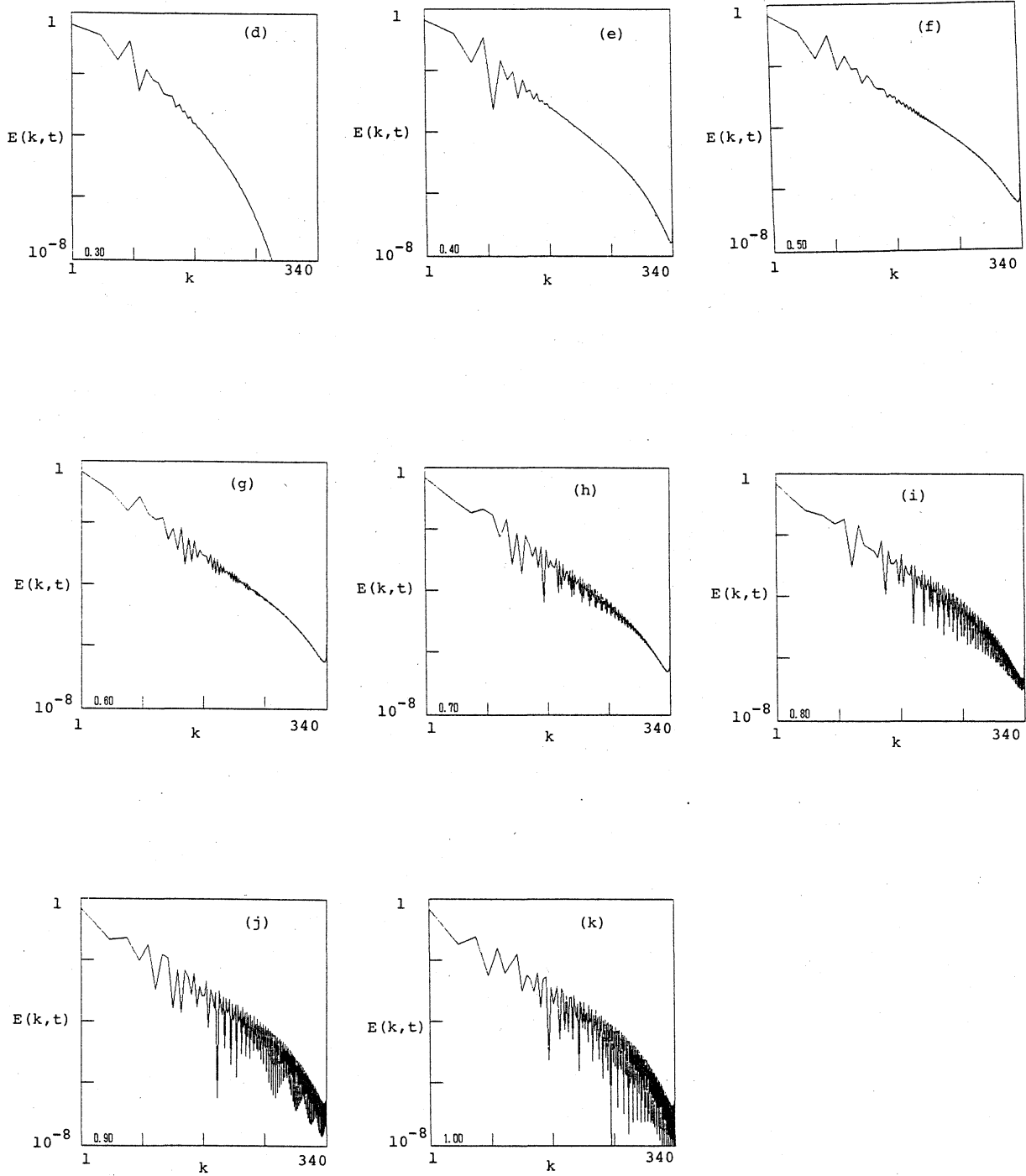


図5. エネルギースペクトル $E(k, t)$. $\log E(k, t) - \log k$.

図から見て、およそ $t=0.5$ ですでに k^{-2} スペクトルが現れている。

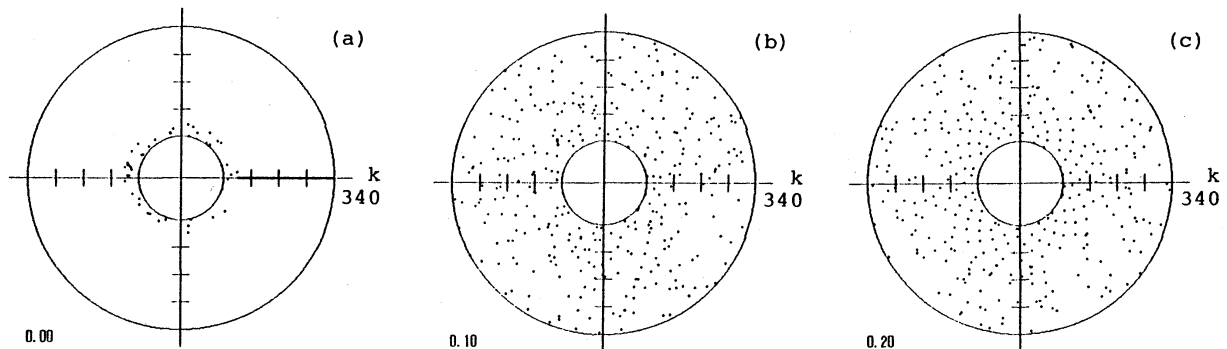
複素速度 $v(k, t)$ を

$$v(k, t) = a(k, t) \exp(i\theta(k, t)) \quad (11)$$

のようにその振幅と位相に分解する。振幅 $a(k, t)$ の性質は図5のエネルギースペクトルで表されている。位相 $\theta(k, t)$ の時間発展を図6に示す。図6では半径方向に波数 k をとり、周方向に位相 $\theta(k, t)$ がとってある。この図から、(4)式で示した、ショックの微細構造を表す複素速度の位相の性質、すなわち、 $\theta(k, t)$ が k に関して線形の関係を見いだすことが出来る。しかし、時間が進むと共に $\theta(k, t)$ は(4)式のショックの構造だけでは解釈できないような複雑な振舞いを示すようになる。そこで、次に $\theta(k, t)$ そのものでなく、互いに相互作用を行っている三つの複素速度間の位相の関係を調べる。そのために次の関数 $\chi(k, p, t)$ を定義する。

$$\chi(k, p, t) \equiv \theta(p, t) + \theta(k-p, t) - \theta(k, t) \quad (12)$$

$0 \leq t \leq 1.0$ の各時刻における $\chi(k, p, t)$ の分布を図7(a)-(k)に示す。ここでも図6と同様半径方向に波数 k をとり、周方向に $\chi(k, p, t)$ をとる。各 k に対して $k-128 \leq p \leq k+128$ の257個の点が描かれている。この図から、波数 k の小さい値に対しては $\chi(k, p, t) = -\pi/2$ に点が集中しており、 k の大きい値に対しては $\chi(k, p, t) = \pi/2$ に点が集中していることが分かる。後で示すようにこのことは、波数の小さいところでは、エネルギーが大きい波数の速度成分に流れ出し、波数の大きいところでは小さい波数の速度成分からエネルギーをもらっていることに対応している。



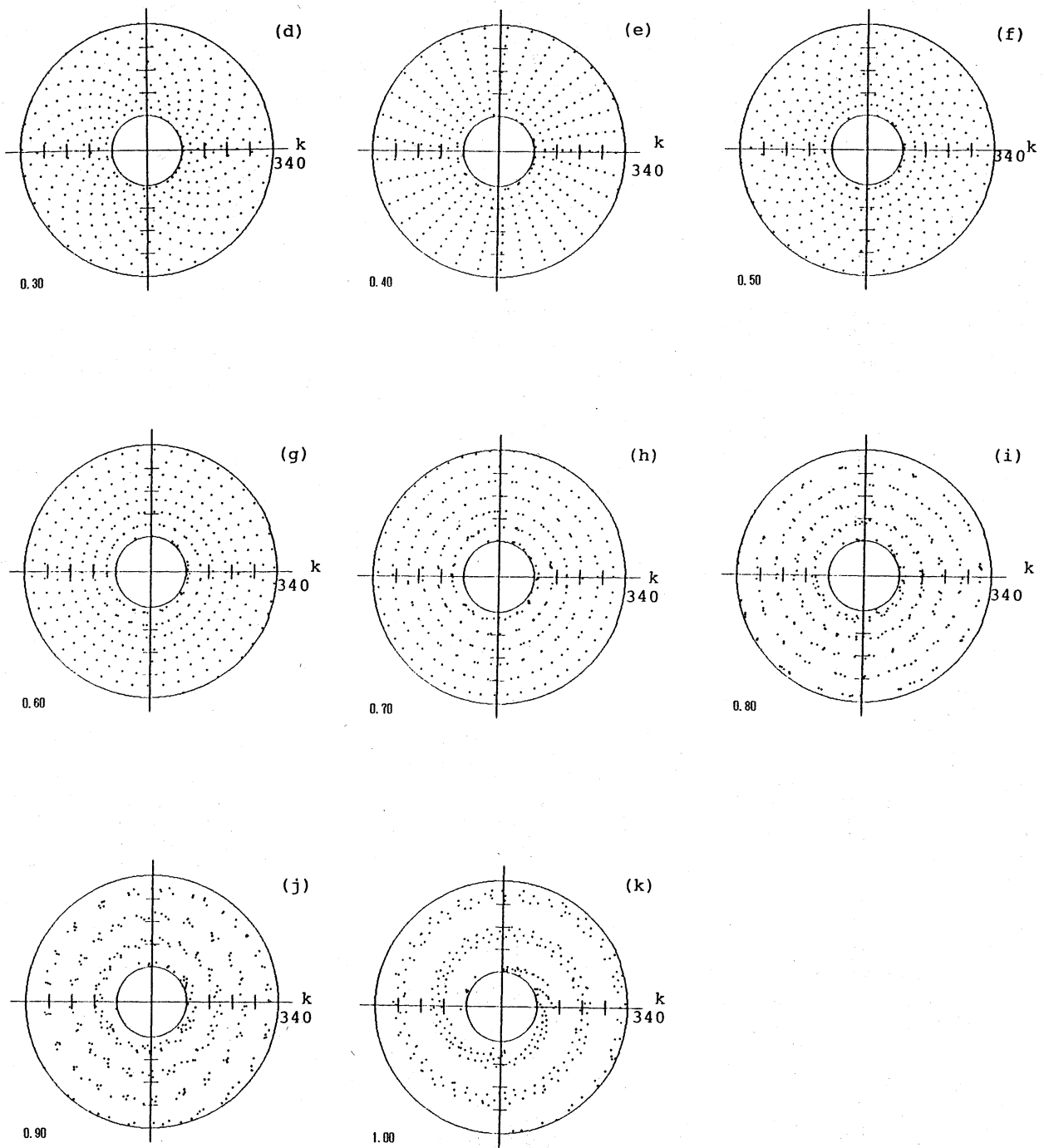


図6. 位相 $\theta(k, t)$ の分布. $\theta(k, t) - k$.

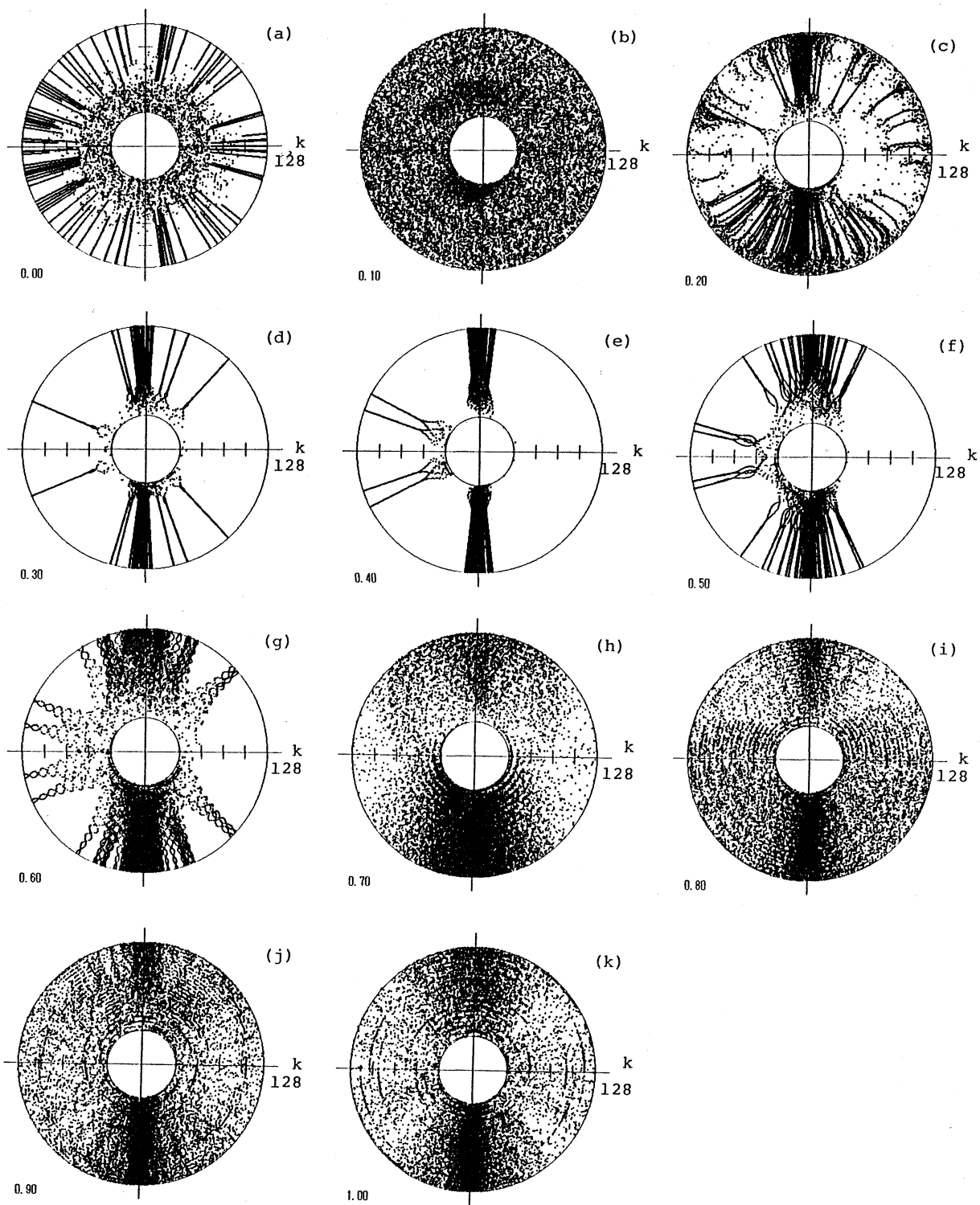


図7. 相互作用の位相 $\chi(k, t)$ の分布. $\chi(k, t) - k$.

さらに詳しく $\chi(k, p, t)$ の分布を調べるために図 8 (a)-(k) に $\chi(k, p, t)$ の頻度分布を示す。

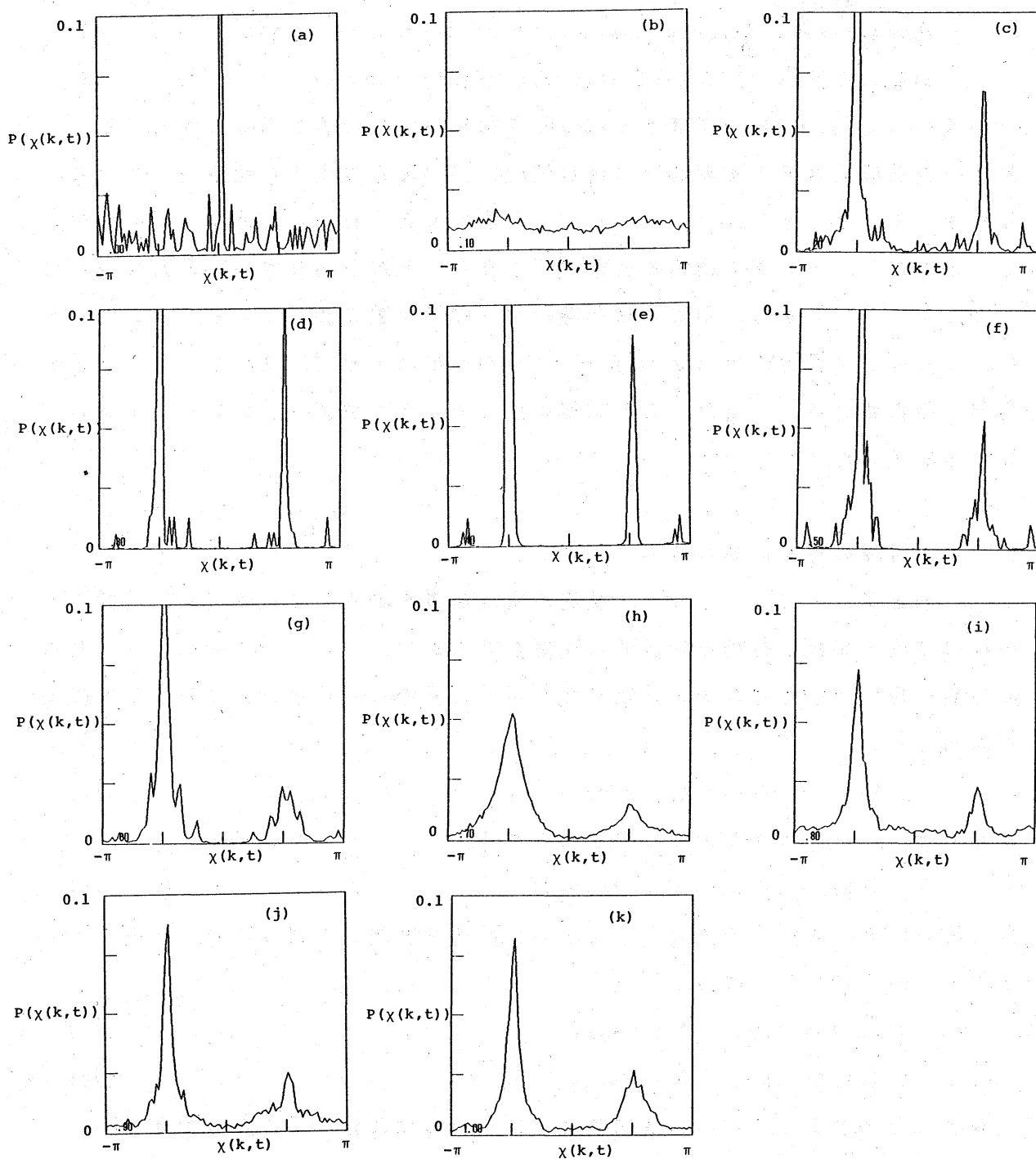


図 8. 相互作用の位相 $\chi(k, t)$ の頻度分布. $P(\chi(k, t)) - \chi(k, t)$.

図 8 から $\chi(k, p, t)$ の分布がほとんど $\pi/2$ と $-\pi/2$ に集中していることが明らかになった。

ここで得られた、 $\chi(k, p, t)$ の分布に関する結論は振幅 $a(k, t)$ と位相 $\theta(k, t)$ に対する方程式から容易に理解することが出来る。

$$\partial a(k, t) / \partial t = \sum_p i p a(p, t) a(k-p, t) \sin \chi(k, p, t) - \nu k^2 a(k, t) . \quad (13)$$

$$a(k, t) \partial \theta(k, t) / \partial t = - \sum_p p a(p, t) a(k-p, t) \cos \chi(k, p, t) . \quad (14)$$

(14)式から $\chi(k, p, t)$ がほぼ $\pm \pi/2$ のときは $\theta(k, t)$ の値がほぼ一定となる。大きい波数成分はその複素速度の絶対値 $a(k, t)$ が非常に小さい値を持っている。したがって、もし $\chi(k, p, t)$ が $\pm \pi/2$ からずれると $\theta(k, t)$ は非常に早く変化することになり、ランダム位相の仮定が成り立ち、非線形相互作用は非常に弱くなってしまふ。しかし、現実には非線形相互作用が強く働いている。このことは、パーガス乱流中では $\chi(k, p, t)$ の分布がほぼ $\pm \pi/2$ に集中していることを容易に想像させる。また、この想像が正しいことが数値シミュレーションの結果からも明らかになった。

4. 小さい規模の運動の繰り込み。

第2節と第3節で、パーガス乱流の微細構造を構成している大きい波数をもつ複素速度の振幅と位相の統計的な性質が明らかになった。この節ではそれらの性質を用いて小さい規模の運動を取り込んだ乱流の大規模運動に対する方程式を求める。

$$T(k, t) = - \sum_q i q v(k-q, t) v(q, t) \quad (15)$$

とおくと、(5)式は次のように書き表される。

$$\partial v(k, t) / \partial t = -T(k, t) - \nu k^2 v(k, t) . \quad (16)$$

ある波数 k_m をとり、この波数より大きい波数の速度成分を繰り込むことを考えるそこで、 $v(k, t)$ を二つに分け、

$$v(k, t) = v^<(k, t) \quad \text{for } k \leq k_m \quad (17)$$

$$v(k, t) = v^>(k, t) \quad \text{for } k > k_m \quad (18)$$

と表すことにすると、 $T(k, t)$ は次のように三つの項に分けることができる。

$$T(k, t) = N_1 + N_2 + N_3 . \quad (19)$$

ここで、 N_1, N_2, N_3 はそれぞれ次のように定義される。

$$\begin{aligned} N_1 &= i k \sum_{q=k_m+K+1}^{\infty} v^>(k-q, t) v^>(q, t) , \\ N_2 &= i k \sum_{q=k_m+1}^{k_m+K} v^<(k-q, t) v^>(q, t) , \end{aligned} \quad (20)$$

$$N_3 = i \sum_{q=-k_m+k}^{k_m} q v^<(k-q, t) v^<(q, t) .$$

(16)式を $v^<(k, t)$ に対する方程式と考えて、 $T(k, t)$ から、 $v^>(k, t)$ をいくつかの仮定のもとに消し去り、 $v^<(k, t)$ だけで書き表すことがこれからの目的である。そこで、 $v^>(k, t)$ を次のように仮定する。

$$v^>(k, t) \equiv v_{k_m} k_m k^{-1} \exp(i\theta(k, t)) . \quad (21)$$

この仮定は、エネルギースペクトルが k^{-2} であることから容易に理解することができる。ここで、 v_{k_m} は波数 k_m の速度成分が持つ代表的な振幅であり、たとえば $v_{k_m} = |v(k_m, t)|$ ととることもできる。(21)を用いて(20)式の N_1, N_2, N_3 を書き換えよう。 N_1 は次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} N_1 &= ik \sum_{q=k_m+k+1}^{\infty} v_{k_m} k_m q^{-1} \exp(i\theta(q, t)) v_{k_m} k_m (k-q)^{-1} \exp(i\theta(k-q, t)) \\ &= ik v_{k_m}^2 k_m^2 \sum_{q=k_m+k+1}^{\infty} q^{-1} (k-q)^{-1} \exp(i\chi(k, t)) \exp(i\theta(k, t)) \\ &= -v_{k_m}^2 k_m^2 \exp(i\theta(k, t)) \sum_{q=1}^k (q+k_m)^{-1} . \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、上の変形で小さい波数に対して第ゼロ近似として $\chi(k, t) \equiv -\pi/2$ とおけることを用いた。同様にすると N_2, N_3 からも $v^>(k, t)$ を消去して次のように書き表せる。

$$\begin{aligned} N_2 &= ik \sum_{q=k_m+1}^{k_m+k} v_{k_m} k_m q^{-1} \exp(i\theta(q, t)) v^<(k, t) \\ &= ik v_{k_m} k_m \sum_{q=k_m+1}^{k_m+k} q^{-1} \exp(i\chi(k, t)) \exp(i\theta(k, t) - i\theta(k-q, t)) v^<(k, t) \\ &= k v_{k_m} k_m \sum_{q=1}^{k_m+k} (q+k_m)^{-1} \exp(i\theta(k, t) + i\theta(k_m+q-k, t)) v^<(k, t)^* . \end{aligned} \quad (23)$$

$$N_3 = ik \sum_{q=1}^{k_m-k} v^<(k+q, t) v^<(q, t)^* + i \sum_{q=1}^k q v^<(k-q, t) v^<(q, t) \quad (24)$$

これで $v^<(k, t)$ だけの閉じた形の方程式が得られた。

ここで得られた繰り込まれた方程式を、次の初期条件のもとで数値計算した。

$$E(k, 0) = 1/\sqrt{2\pi} / (1+k)^2 \quad (25)$$

$k_m=64$ を用いて計算の結果、エネルギースペクトルは図9(a)-(k)のようになった。今回は時間に余裕がなく結果を十分に検討することができなかったが、ここで提案した方法は3次元ナビエストークス乱流にも十分適用できるものと思われる。

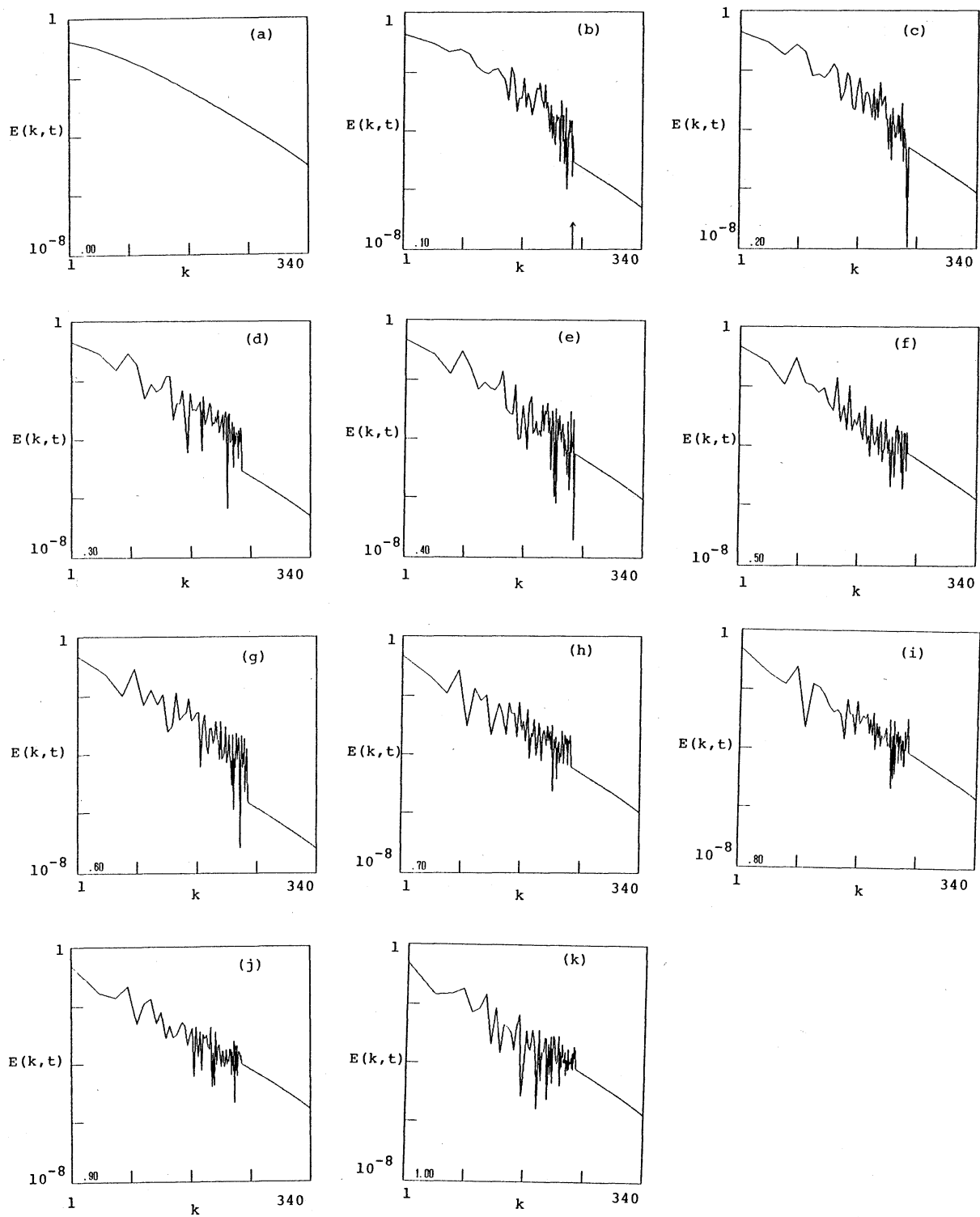


図9. エネルギースペクトル $E(k, t)$. $\log E(k, t) - \log k$.
 繰り込んだ方程式をもちいた.

参考文献

- A. K. M. F. Hussain (1986) Coherent structure and turbulence. *J.F.M.* 173, pp303-356.
- S. Kida & Y. Murakami (1989) Statistics of velocity gradients in turbulence at moderate Reynolds numbers. *Fluid Dynamic Research* 4, pp347-370.
- J. Mizushima (1978) Similarity law and renormalization for Burger's turbulence. *Phys. Fluid* 21, pp512-514.
- J. Mizushima & T. Tatsumi (1981) The Modified Zero-Fourth Cumulant Approximation for Burgers Turbulence. *J.P.S.J.* 50, pp1765-1773.
- V. Yakhot & S. A. Orszag (1986) Renormalization Group Analysis of Turbulence. I. Basic Theory. *J. Sci. Comp.* 1, pp3-50.