

## 自己相似, 自己アフィン, マルチフラクタル

中大理工 松下 貢 (Mitsugu Matsushita)

私達の身边には山並みや雲, 稲穂, 河川網や海岸線, 岩石や金属など固体の破断面, 壁や床のヒビ・割れ目など, ランダムなパターンが数多く見られる。ランダムとはいって山並みは白色雑音の波形とは明らかに区別がつくし, 河川網は鉄道網とは異質である。自然界に見られる多くのパターンはランダムさの中にも何かある自然法則に支配された統計性を秘めているようである。マンデルブロは早くからこのことに気づき, 一見何の変哲もないランダム・パターンにも非常に単純で美しい規則性—スケール不変性—が隠されている場合があることを多くの実例と共に示してきた。<sup>1)</sup> そして10年余り前にフラクタル (fractal) という新しい概念を導入してこれらの統一的な記述を試みた。その後, フラクタルは科学のあるゆる分野に爆発的に浸透し, 初期の素朴な概念から洗練された姿に拡張, 発展している。そこでこのフラクタルの最近の動向を概観してみよう。

最も単純なスケール不変性は自己相似性と呼ばれるもので

ある。あるパターンが与えられるとして、その一部を取り出して拡大しても（厳密な場合だけでなく統計的な場合も含めて）元のパターンと区別がつかない時、そのようなパターンを自己相似フラクタル（self-similar fractals）とよぶ。その典型例が図1のコッホ曲線である。作り方は至って単純で、ある線分（initiator

とよび、操作の第0段階）

を3等分し、中央の線分

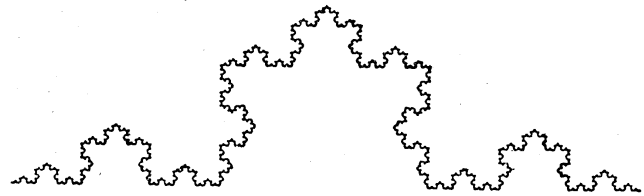


図1

をその底辺とする正3

角形の他の2辺で置き換える（generator, 第1段階）。できた

曲線の4つの構成線分のそれぞれについて同じ操作を繰返す

（第2段階）。この操作を無限回行、最後にできる曲線が

コッホ曲線である。この曲線のどの一部を取り出して拡大し

ても全体と変わらないものが得られることは容易に想像がつく

であろう。即ち、コッホ曲線は自己相似である。直観的には

コッホ曲線は大小様々な凹凸がそろそろそろと、全体の大きさ

以外にこの曲線の特徴づける長さ（スケール）がないといえ

る。

今、何らかの現実的な理由でコッホ曲線を有限な第 $n$ 段階

で近似せざるを得ないとする。この時の構成線分の長さを $a$

とすると、両端の直線距離（コッホ曲線の大きさ）は $R=3^n a$ ,

構成線分の総数は  $N = 4^n$  (この近似的コッホ曲線の長さは  $N^a$ ) なので,  $N \sim R^D$ ,  $D = \ln 4 / \ln 3 \doteq 1.26$  という関係が  $n$  によらず常に成り立つ。この時, この近似的なコッホ曲線の大きさ  $R$  は構成線分の総数 ( $\propto$  長さ)  $N$  に対して  $R \sim N^\nu$  ( $\nu = 1/D$ ) とスケールされるという。この指数  $D$  をフラクタル次元とよび, 自己相似パターンへの不均一な粗密の程度を定量化した指標で, それを特徴づける最も重要な量といえる。また, 線分 ( $D=1$ ) や平板 ( $D=2$ ) の場合から容易に察せられるように, この  $D$  は通常の次元の自然な拡張になっている。

コッホ曲線は規則的な自己相似パターンの例であるが, この規則的な凹凸をくずしてランダムにするとリアス式海岸によく似ていることに気付く。海岸に沿ってドライブする時, 大きな湾の中につき出した半島がありそれに小さな湾が付随してその中にまた小さな半島があり, …… という経験をもたれたことはないだろうか。実際に多くの海岸線が自己相似フラクタルであることが知られている。

厳密にいうとコッホ曲線の長さは, その大きさ  $R$  が有限であって  $\infty$  である (あるいは長さがない)。このようなことは初めの線分 (initiator) 上にコッホ曲線を投影した時に無限の重なりがなければ起り得ない。確かに山並みは大小様

々な凹凸が有るなり, 自己相似フラクタルに見えるか? 知れないが, それを水平線に投影した時に無限の重なり (オーバーラッピング) があるとはとて思えない。山並みは自己相似ではなさそうである。ではどのような規則性に従うのだろうか。

図2は時刻  $t=0$  に原点をスタートした1次元ブラウン運動の変位  $x(t)$  を  $t$  の関数として描いた1例である。[縦軸が横軸に比して約15倍誇張して描かれていることに注意。] これを1ヶの

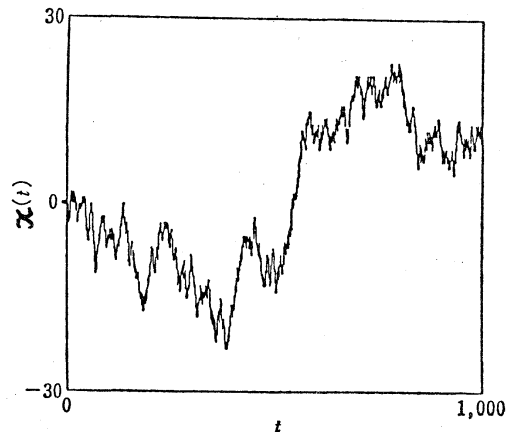


図 2

与えられたパターンとみなし, 時刻 0 から  $t$  までのこの曲線の長さを  $N$  とすると,  $N$  は勿論  $t$  に比例する。即ち, 曲線の横幅  $t$  は長さ  $N$  に対して  $t \sim N^{\nu_t}$  ( $\nu_t = 1$ ) とスケールされる。

他方, 時間  $t$  内のブラウン運動の変位の大きさの目安として  $X_t \equiv \sqrt{\langle x(t)^2 \rangle}$  ( $\langle \dots \rangle$  はアンサンブル平均) を採用するとよく知られているように  $X_t$  は  $t^{1/2}$  に比例する。

従ってこの曲線の縦幅  $X_t$  は長さ  $N$  に対して  $X_t \sim N^{\nu_x}$  ( $\nu_x = 1/2$ ) とスケールされる。以上によりこの曲線では長さ  $N$  に対して縦幅  $X_t$  と横幅  $t$  のスケールのされ方が異なることがわかる。

自己相似なコッホ曲線では縦横無関係に大きさは  $R \sim N^{\nu}$  と等方的にスケールされた。これに対して図2の例のように,

より一般に、方向によつてスケールのされ方が異なるようなパターンを自己アフィン・フラクタル (self-affine fractals) とよぶ。そしてこの時には、自己相似フラクタルのように1つの指数  $\nu$  ( $= 1/D$ ,  $D$ : フラクタル次元) だけではパターンを特徴づけることはできず、複数個の指数 (図2の例では、 $\nu_x$  の2つ) が必要である。従つて自己相似は自己アフィンの特別な場合だといえる。図2の例だけでなく、 $1/f$ 雑音などの雑音曲線は自己相似ではなく自己アフィンなのである。

一般に、注目するパターンが構成あるいは形成される過程で異方向性が顕著と考えられる場合にはできるパターンは自己アフィンの可能性が高いとみてよい。この意味で凹凸の激しい物体の表面は多くの場合、自己アフィンだと思われる。従つて先程の山並みや地表は自己相似フラクタルではないにしても自己アフィンである可能性は非常に高い。<sup>2)</sup>

現実にはフラクタルをこのように拡張してしまふと色々な興味深いパターンが沢山ある。図3(a)は遠方で放出されたブラウン運動粒子が原点近くにあるクラスタ (最初は原点上の1点) に付着凝集して成長させたパターン<sup>1)</sup>の1例で、2次元では  $D \cong 1.71$  の自己相似フラクタルであることが知られている。このモデルは DLA (diffusion-limited aggregation) とよばれている。ブラウン運動は拡散と等価で

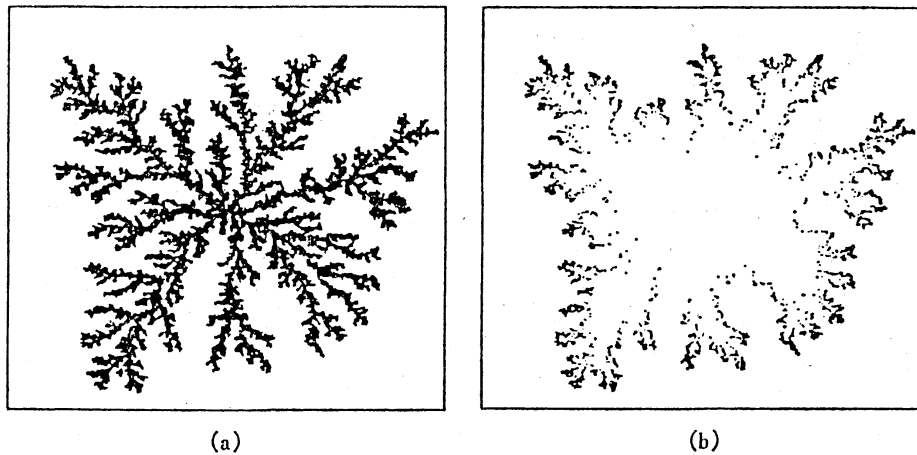


図 3

あり、このモデルではパターンの成長が非常にゆっくりなので、DLAはラプラス場の中でのランダム・パターン形成を記述するプロトタイプモデルとみなされる。実際、DLAは電析（金属葉）、誘電破壊（リヒテンベルク図、稲妻など）、樹枝状結晶成長、ある種の流体界面の不安定性（ウイカス・フィンガリング）、溶解など多様なランダム・パターン形成を説明する興味深いモデルである。<sup>3)</sup>

図3(a)のDLAパターンが導体でできているとして、これを囲む十分遠方にある電極との間に電圧を印加した時にこの導体表面に誘起される電荷分布を模式的に描いたのが図3(b)である。当然のことながら、パターンの外に向かってつぎ出た先端部では誘起電荷密度は高く、奥まった部分では非常に低い。このように濃淡のあるパターンはどのように定量的に特徴づけられるのだろうか。とてこれほどのように単一の

フラクタル次元,あるいは有限個の指数によって特徴づけ得るとは思えない。

今,与えられたパターンにある物理量が分布していると考えよう。上述の図3ではDLAパターンの表面上に誘起電荷が分布していることに相当する。この物理量の分布を適当に規格化して確率測度の分布で表わす。このように表現した後ではパターン上の各点で局所的にこの確率測度の特異性指数 $\alpha$ (局所的フラクタル次元に相当)を定義することが出来る。そして $\alpha$ のそれぞれの値を持つ点が空間的にどのように分布しているか(自己相似的に分布する時,その大局的フラクタル次元 $f(\alpha)$ )で,その物理量の分布を特徴づけることが可能である。図3(b)のような与えられたパターンに対して局所指数とその大局的な分布の指数—一般次元 $D_g$ や $f(\alpha)$ スペクトル—を決定する方法をいろいろ提案されている。<sup>4)</sup>このようにしてパターンが特徴づけられる場合をマルチフラクタル(multifractal)とよび,自己相似の大幅な拡張とみなされる。上述のDLA上の誘起電荷分布はその典型例であり,DLAパターンそのものの成長確率の分布と等価である。<sup>5)</sup>

図3(a)のDLAクラスターではループは見られませんが,例えばシェルピンスキー・カーペットやパーコレーション・クラスターのように大小様々のループが入り組んだような自己相似パターン

ンの両端に電圧を加えた時のパターン上の局所的な電位降下や電位降下の値の分布も決してパターン上で一様ではなく、強弱多様に分布し、マルチフラクタルの例である。ある種の乱流でも、エネルギーなどの散逸率が空間にマルチフラクタル的に分布しており、一様でないことが示されている。<sup>6)</sup>

以上、現実の多様なパターンを定量的に取扱うためには、等方的で single scaling の自己相似から、異方的で各異方軸については依然として single scaling である自己アフィン、(等方、異方と区別) multiple scaling であるマルチフラクタルへとフラクタルを拡張しなくてはならないことを見て来た。しかし重要な点が抜けている。どうして多くのランダムパターンがフラクタルで記述できるのだろうか。これは今後の非常に興味深い問題である。

### 《参考文献》

- 1) B. B. Mandelbrot: The Fractal Geometry of Nature (Freeman, San Francisco, 1982).
- 2) M. Matsushita & S. Ouchi: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 1489.
- 3) 例として、松下 et. al.: 物性研究 48-5 (1987-8) 473 を参照.



- 4) T. C. Halsey et al.: Phys. Rev. A 33 (1986) 1141.
- 5) M. Matsushita et al.: Phys. Rev. Lett. 59 (1987) 86;  
Y. Hayakawa et al.: Phys. Rev. A 36 (1987) 1963.
- 6) 例として, H. Mizutani & T. Nakano: J. Phys. Soc. Jpn.  
58 (1989) 1595, 及びその引用文献参照.