

k - ε モデルによる M H D 乱流の数値計算

東大生研 半場藤弘 (Fujihiro Hamba)

§ 1 はじめに

M H D 乱流の計算対象として逆転磁場ピンチ<sup>1)</sup>の磁場分布を考える。逆転磁場ピンチは核融合のプラズマ閉じ込め装置の一つで、トカマクと同じように軸対称トーラス系(図 1)である。トロイダル方向とポロイダル方向の磁場をかけ、らせん状の磁力線を作りプラズマを閉じ込める。大きいプラズマ電流を流しポロイダル磁場がトロイダル磁場と同程度の大きさである点がトカマクと異なり、磁気揺動が比較的大きい。

Taylor<sup>2)</sup>は緩和理論を用いてこの磁場分布がエネルギー最小の配位

$$\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B}, \quad (1)$$

( $\kappa$  は定数)で表されることを示した。トーラスを円柱で近似すると(図 2)、(1)式の解はベッセル関数を用いて

$$B_z = B_0 J_0(\kappa r), \quad B_\theta = B_0 J_1(\kappa r), \quad (2)$$

となる。  $\kappa a > 2.4$  ( $a$  は中心から壁までの距離) のとき、 $B_z$  の値が反転し負になる。このベッセル関数モデルは実験値をよく説明するが、いくつかの欠点がある。一つは壁で電流が 0 にならない点で、Schoenberg et al.<sup>3)</sup> は定数  $\kappa$  に空間依存性を持たせて改良し、0 次元の数値計算を行った。

Gimblett and Watkins<sup>4)</sup> は地球磁場のダイナモ理論で知られている  $\alpha$  効果と  $\beta$  効果の考えを使ってベッセル関数モデルを説明した。Strauss<sup>5)</sup> はオームの法則に超抵抗項を加えたモデルを提案し 1 次元と 3 次元の数値計算をした。また、MHD 方程式を直接解いて<sup>6-9)</sup>、あるいは LES モデルを使って<sup>10)</sup> 3 次元の数値計算が行われ、磁力線のつなぎかえや種々のパラメータ、乱流統計量の分布が調べられている。

最近 Yoshizawa and Hamba<sup>11)</sup> は 2 スケール繰り込み理論を用いて乱流ダイナモモデル (MHD 乱流の  $k-\varepsilon$  モデル) を提案した。 $\alpha$  効果と  $\beta$  効果を乱流統計量を使ってモデル化した。このモデルの新しい点は乱流統計量の非一様性を扱えること、モデル方程式系が閉じているので前もって擾乱の分布を仮定する必要がないことである。

本研究ではこの乱流ダイナモモデルを用いて逆転磁場ピンチの 1 次元の数値計算を行った。円柱座標系の  $\theta$  方向と  $z$  方向に平均をとると物理量は  $r$  方向だけに依存し計算は 1 次元

となる。一様な駆動電場をかけることによって、磁場の反転を伴う定常状態が得られた。乱流統計量の空間分布を示し、オームの法則の項のつりあいを調べる。また、境界条件の解に対する影響を調べ、逆転磁場ピンチの乱流状態について考察する。

## § 2 モデル方程式

磁場は平均と乱れの部分に分けられる。

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} + \mathbf{b}' \quad (3)$$

平均磁場  $\mathbf{B}$  の発展方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E}, \quad (4)$$

$$\mathbf{E} = -\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle + \lambda \mathbf{J}, \quad (5)$$

と書ける。ここで  $\mathbf{E}$  は平均電場、 $\mathbf{u}'$  は乱れ速度、 $\lambda$  は抵抗率、 $\mathbf{J} (= \nabla \times \mathbf{B})$  平均電流、 $\langle \rangle$  はアンサンブル平均を表す。(3)式の乱流起電力の項を  $\alpha$  効果と  $\beta$  効果の考えを使って次のようにモデル化する。

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle = \alpha \mathbf{B} - \beta \mathbf{J}. \quad (6)$$

$$\alpha = C_h k h / \epsilon, \quad (7)$$

$$\beta = C_\beta k^2 / \epsilon. \quad (8)$$

$C_h$  と  $C_\beta$  は無次元のモデル定数、 $k$ 、 $\epsilon$ 、 $h$  はそれぞれ MHD 乱流エネルギー、その散逸率、MHD 乱流ヘリシティ

で

$$k = (\langle \mathbf{b}'^2 \rangle + \langle \mathbf{u}'^2 \rangle) / 2, \quad (9)$$

$$\varepsilon = \lambda \left\langle \left( \frac{\partial b'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle + \nu \left\langle \left( \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \right)^2 \right\rangle, \quad (10)$$

$$h = \langle \mathbf{b}' \cdot \nabla \times \mathbf{b}' \rangle - \langle \mathbf{u}' \cdot \nabla \times \mathbf{u}' \rangle, \quad (11)$$

と定義される。 $\nu$  は動粘性率である。閉じた方程式系を得るため、基本物理量  $k$ 、 $\varepsilon$ 、 $h$  の発展方程式をモデル化する。

$$\frac{\partial k}{\partial t} = -\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \cdot \mathbf{J} - \varepsilon + \nabla \cdot \left( C_{\beta k} \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla k \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = -C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \cdot \mathbf{J} - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} + \nabla \cdot \left( C_{\beta \varepsilon} \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \right), \quad (13)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = C_{h1} \left( \frac{\varepsilon}{k} \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} - C_{h1}' \frac{\varepsilon h}{k^2} \mathbf{B}^2 \right) - C_{h2} \frac{\varepsilon h}{k} + \nabla \cdot \left( C_{\beta h} \frac{k^2}{\varepsilon} \nabla h \right), \quad (14)$$

ここで  $C_{\beta k}$ 、 $C_{\varepsilon 1}$  などはモデル定数である。(12) - (14) 式の右辺第1項は生産項、第2項は散逸項、第3項は拡散項と呼ばれる。乱流エネルギー  $k$  の生産項は平均磁場のエネルギー  $\mathbf{B}^2 / 2$  からの流入を表し、(6)式を用いると

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle \cdot \mathbf{J} = \alpha \mathbf{B} \cdot \mathbf{J} - \beta \mathbf{J}^2. \quad (15)$$

となる。 $\beta$ 項は平均成分から乱れ成分へのエネルギーカスケード、 $\alpha$ 項はその逆方向のカスケードすなわちダイナモ効果を意味する。

(4) - (8)、(12) - (14) 式を、 $z$  方向に周期境界条件を課した円柱座標系 (図2) で解く。磁場  $\mathbf{b}$  の平均は

$$\mathbf{B}(r, t) = \langle \mathbf{b} \rangle = \frac{1}{2\pi L} \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta \mathbf{b}(r, \theta, z, t), \quad (16)$$

と定義される。Lはz方向の周期長さである。以後、すべての物理量は円柱の半径aと初期のz成分の磁場の空間平均

$$\bar{B}_z = \frac{2}{a^2} \int_0^a B_z r dr. \quad (17)$$

で無次元化される。r方向の格子数は100である。中心軸(r=0)の境界条件は

$$B_\theta = 0, \quad \frac{\partial B_z}{\partial r} = \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = \frac{\partial h}{\partial r} = 0, \quad (18)$$

壁(r=1)の境界条件は

$$E_z = E_{z0}, \quad E_\theta = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial r} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} = 0, \quad h = 0. \quad (19)$$

で与える。壁上にz方向の駆動電場を課す。抵抗率は空間に関して一様である( $\lambda = 3 \times 10^{-4}$ )。モデル定数は

$$\begin{aligned} C_h = C_\beta = 0.14, \quad C_{\beta k} = 0.09, \quad C_{\varepsilon 1} = 1.8, \quad C_{\varepsilon 2} = 1.9, \\ C_{\beta \varepsilon} = 0.07, \quad C_{h1} = 0.7, \quad C_{h1'} = 1, \quad C_{h2} = 1, \quad C_{\beta h} = 0.16. \end{aligned} \quad (20)$$

を採用した。 $C_{\beta k}$ 、 $C_{\varepsilon 1}$ 、 $C_{\varepsilon 2}$ 、 $C_{\beta \varepsilon}$ は磁場を含まない速度場だけの乱流のk- $\varepsilon$ モデル中に対応する定数があるのでそれに近い値を使い、他の定数も磁場の反転を伴う定常解が得られるように調整した。実験値や3次元計算の結果と比較して定数を最適化することは今後の課題である。初期条件として平均磁場はローレンツ力=0の分布

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{B}, \quad \mu = \mu_0 \cos^2(\pi r/2), \quad (21)$$

k、 $\varepsilon$ 、hは空間に関して一様な値

$$k(r) = \varepsilon(r) = 0.1, \quad h(r) = 0. \quad (22)$$

を使った。

### § 3 計算結果

一定のトロイダル電場 ( $E_{z0} = 9 \times 10^{-3}$ ) をかけることによって定常解が得られた。平均磁場分布を図3に示す。分布は実験<sup>1)</sup>や他の数値計算<sup>5,6)</sup>の結果と定性的に一致している。磁場逆転パラメータ  $F (= B_z(1) / \bar{B}_z)$  は  $-0.11$ 、ピンチパラメータ  $\theta (= B_z(1) / \bar{B}_z)$  は  $2.04$  である。実験値と比べて反転がやや浅い。

図4はMHD乱流エネルギーとその散逸率の分布である。中心軸上で最大値をとり半径が大きくなるとともに減少している。磁場の擾乱の  $r$  成分について同様な分布が他の数値計算<sup>6)</sup>で得られている。運動エネルギーは磁場エネルギーに比べて小さいとして無視すると磁場の乱流強度は  $\delta B = (2k)^{1/2}$  と評価でき、中心軸上の値は  $0.36$  で平均磁場  $B_z$  の  $6.4\%$  である。(12)式の散逸項による  $k$  の減衰時間  $k/\epsilon$  は中心軸上で  $1.8$  であり、古典拡散時間が  $3.3 \times 10^3$  であることを考えると、多くのエネルギーが(12)式の生産項を通して平均スケールから乱れのスケールに供給されていることがわかる。

平均速度  $U$  の方程式から圧力分布が得られる。

$$0 = -\nabla P - \nabla k / 3 + \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \quad (23)$$

乱れによるローレンツ力は  $-\nabla k / 3$  と近似されている。圧力はほぼ  $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$  とつりあっている。圧力分布を図5に示す。 $\beta$  値 ( $= 2P / B^2$ ) は 0.085 である。

図6は(7)、(8)式で定義された係数  $\alpha$  と  $\beta$  の分布である。 $\alpha$  係数は半径が大きくなると減少し壁で0になっている。乱流抵抗率  $\beta$  はほぼ一定でその値は古典抵抗率  $\lambda$  の約60倍である。他の研究では壁近くで電流が減少することを説明するため、温度依存性を考慮し壁近くで増大する  $\lambda$  の分布を仮定した計算があるが、本計算では  $\beta / \alpha$  がその役割を果たしている。

オームの法則の  $z$  成分は

$$E_z = -(C_h k h / \epsilon) B_z + (C_\beta k^2 / \epsilon) J_z + \lambda J_z, \quad (24)$$

と書ける。右辺三つの項はダイナモ項、乱流抵抗項、古典抵抗項である。それらの分布を図7に示す。定常状態に達しているので三項の和は  $r$  によらず一定である。すでに述べたように乱流抵抗項は古典抵抗項よりずっと大きい。 $r < 0.5$  ではダイナモ項と乱流抵抗項が卓越している。つまりダイナモ項は古典抵抗項ではなく乱流抵抗項とつりあっている。一方  $r > 0.7$  ではダイナモ項は0になり、乱流抵抗項が駆動電場と等しい。Gimblett and Watkins<sup>4)</sup> は  $\alpha$  項と  $\beta$  項、すなわち

ダイナモ項と乱流抵抗項のつりあいが Taylor 状態を与えることを示した。ただし一様等方性乱流の枠組みでは空間に関して一定の物理量しか扱えない。乱流場の非一様性を扱う本研究では、中心軸付近での二項のつりあい

$$(C_h k h / \varepsilon) B \cong (C_\beta k^2 / \varepsilon) J, \quad (25)$$

は、次式を与える。

$$J \cong \frac{C_h h}{C_\beta k} B. \quad (26)$$

つまり J と B の比は  $h / k$  で評価できる。その  $h / k$  の分布を図 8 に示す。本数値計算の結果は、係数  $\kappa(r)$  が図 8 のような分布を持つ修正ベッセル関数モデルに相当することがわかる。

トロイダル電場  $E_{z0}$  の値を変えることによっていくつかの定常状態を得た。さらにモデル定数の一つ  $C_{\varepsilon 1}$  の値を 1.76 に変え、モデル定数の依存性を調べる。  $F - \theta$  図を図 9 に示す。電場  $E_{z0}$  は、  $C_{\varepsilon 1} = 1.8$  のとき  $5 \times 10^{-3}$  から  $1 \times 10^{-2}$  まで、  $C_{\varepsilon 1} = 1.76$  のとき  $8.7 \times 10^{-3}$  から  $1.2 \times 10^{-2}$  まで変化させた。典型的な実験値<sup>12)</sup> ( $F = -0.6, \theta = 1.9$ ) と比べると反転の量が少ないが、定性的なふるまいは一致している。  $C_{\varepsilon 1}$  の値が 1.76 の方が反転が深い。

次に MHD 乱流エネルギーの壁での境界条件について調べる。(12) 式の拡散項でエネルギーフラックスは  $-\nabla k$  に比



例するとモデル化されているので、 $r = 1$ での境界条件  $\nabla k = 0$  は壁からのエネルギーの流入がないことを表す。そこで  $\nabla k$  の値を  $-0.04$  から  $0.04$  まで変化させ、解に対する境界条件の影響を調べる。負の値はエネルギーの流出を正の値は流入を意味する。図 10 に磁場反転パラメータ  $F$  の値を示す。 $\nabla k$  が大きいほど反転が深いことがわかる。 $\nabla k = 0.03$  のときの  $k$  の分布を図 11 に示す。 $r > 0.8$  で  $k$  の傾きが正であり、中心軸上の  $k$  の値は  $\nabla k = 0$  の場合 (図 4) に比べて約 2 倍になっている。すなわち壁から乱流エネルギーを注入することによって全体の乱流エネルギーが増大しトロイダル磁場の反転が深くなった。

#### § 4 まとめ

乱流ダイナモモデルを用いて逆転磁場ピンチの 1 次元数値計算を行い、トロイダル磁場の反転を伴う定常解を得た。この乱流モデルは閉じた方程式系をなすのでダイナモ項や乱流抵抗項の分布を前もって仮定する必要がない。平均磁場分布は実験値と定性的に一致している。中心付近でダイナモ項と乱流抵抗項がつりあって Taylor 状態を実現していることがわかった。また、境界条件の影響を調べ、壁から乱流エネルギーを注入することによってトロイダル磁場の反転が深くなる

ことを示した。

参考文献

- 1) H. A. B. Bodin and A. A. Newton: Nucl. Fusion 20 (1980) 1255.
- 2) J. B. Taylor: Phys. Rev. Lett. 33 (1974) 1139.
- 3) K. F. Schoenberg, R. F. Gribble, and J. A. Phillips: Nucl. Fusion 22 (1982) 1433.
- 4) C. G. Gimblett and M. L. Watkins: Proc. 7th Europ. Conf. on Controlled Fusion and Plasma Physics, Lausanne, 1975 Vol. 1, p. 103.
- 5) H. R. Strauss: Phys. Fluids 29 (1986) 3008.
- 6) A. Y. Aydemir, D. C. Barnes, E. J. Caramana, A. A. Mirin, R. A. Nebel, D. D. Schnack, and A. G. Sgro: Phys. Fluids 28 (1985) 898.
- 7) K. Kusano and T. Sato: Nucl. Fusion 26 (1986) 1051.
- 8) P. Kirby: Phys. Fluids 31 (1988) 625.
- 9) J. P. Dahlburg, D. Montgomery, G. D. Doolen, and L. Turner: J. Plasma Phys 40 (1988) 39.
- 10) F. Hamba: J. Phys. Soc. Jpn. 58 (1989) 2414.
- 11) A. Yoshizawa and F. Hamba: Phys. Fluids 31 (1988)

2276.

12) H.Y.W.Tsui and J.Cunnane: Plasma Phys. Contr.

Fusion 30 (1988) 865.

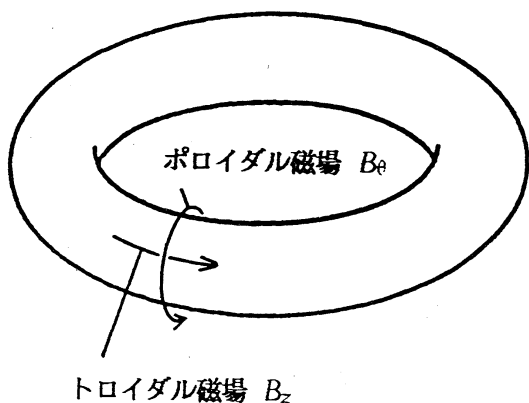


図1 逆転磁場ピンチの磁場

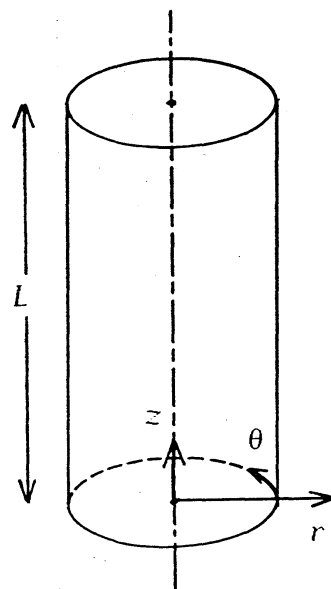


図2 円柱座標系

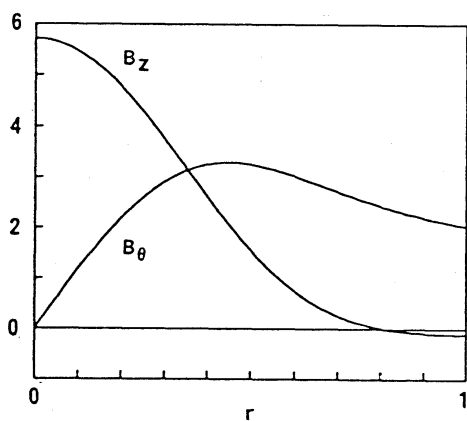


図3 平均磁場分布

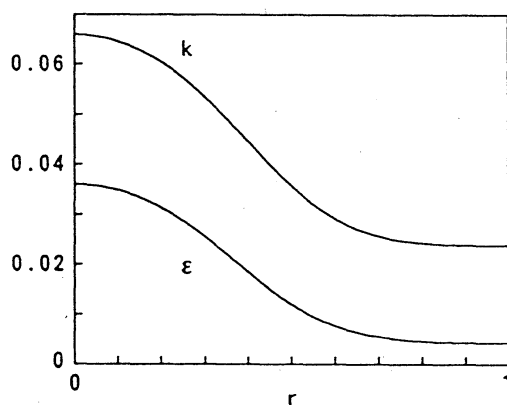


図4 MHD乱流エネルギーとその散逸率の分布

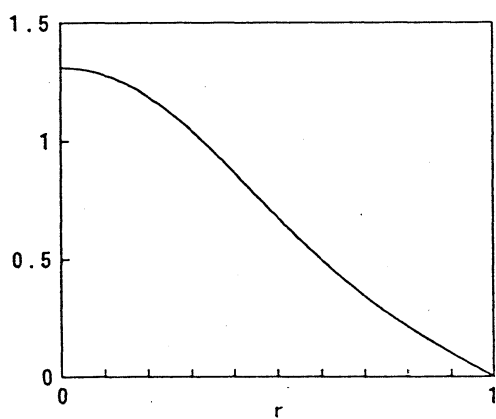


図5 平均圧力分布

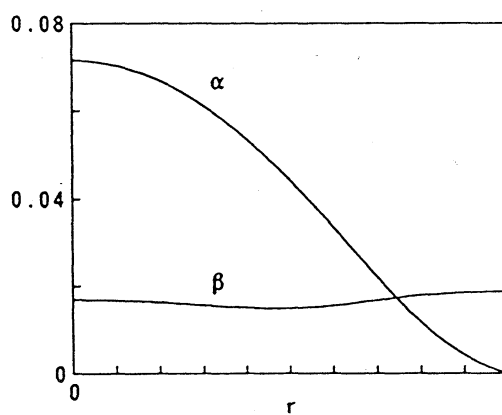


図6 係数 $\alpha$ と $\beta$ の分布

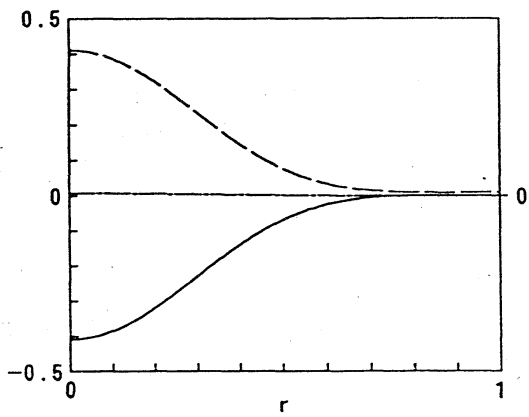


図7 Ohmの法則 (Z成分) : — ダイナモ項、  
 - - - 乱流抵抗項、- · - 古典抵抗項

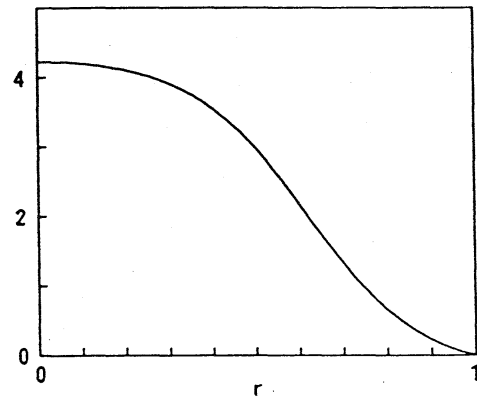


図8 MHD乱流エネルギーとMHD乱流  
 ヘリシティの比

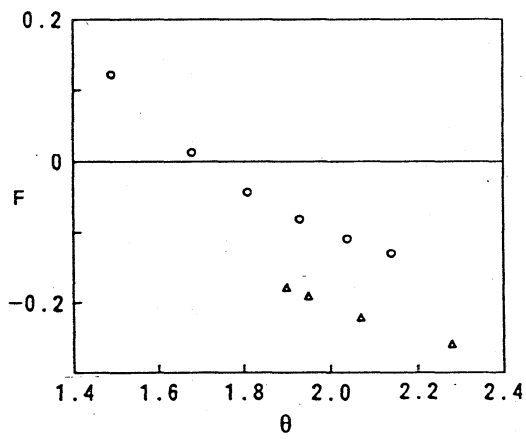


図9  $F-\theta$ 図:  $\circ$ ,  $C_{\epsilon_1}=1.8$ ;  
 $\triangle$ ,  $C_{\epsilon_1}=1.76$

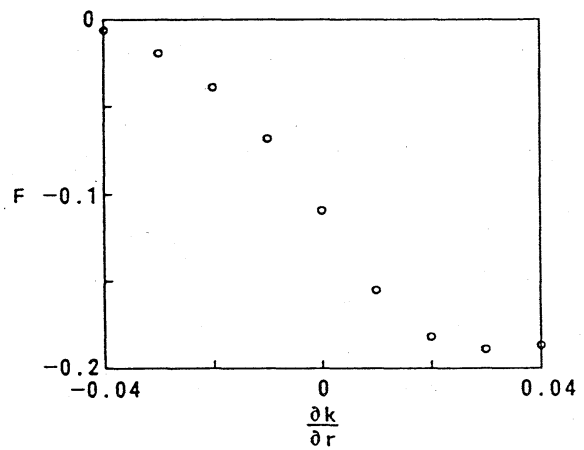


図10 磁場逆転パラメータ vs 壁でのMHD  
 乱流エネルギーの勾配

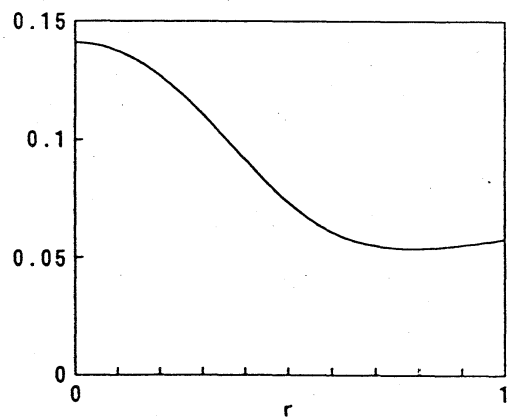


図11 MHD乱流エネルギーの分布  
 ( $\nabla k = 0.03$ )