

高次非線形 Schrödinger 方程式のソリトン解

東大・工 佐々 成正 (Narimasa Sasa)

東大・工 薩摩 順吉 (Junkichi Satsuma)

1. はじめに

非線形 Schrödinger (NLS) 方程式

$$i\varphi_T + \frac{1}{2}\varphi_{xx} + |\varphi|^2\varphi = 0 \quad (1)$$

は、ソリトン方程式の中でも特に多くの物理現象を記述するのに用いられている。例えば、水の波、プラズマ物理、非線形光学などがその代表例である。

その中で特に、実用的な立場から注目されているものの一つに、ファイバー中の光ソリトンがある。Hasegawa と Tappert¹⁾による理論的な予想が提出されて以来、数多くの理論が与えられるとともに、それらを裏づける実験が行なわれ大きな成功を収めてきた。ところが最近、実験精度の向上によって、NLS 方程式では説明のできない現象がいくつか観測されている。Kodama²⁾は、そのような現象を説明するため、高次非線形 Schrödinger (HNLS) 方程式、

$$i\varphi_T + \frac{1}{2}\varphi_{xx} + |\varphi|^2\varphi + i\epsilon\{\beta_1\varphi_{xxx} + \beta_2|\varphi|^2\varphi_x + \beta_3\varphi(|\varphi|^2)_x\} = 0 \quad (2)$$

(参考文献 2) とは、独立変数が異なることに注意。 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ は実定数。

を用いて、高次擾動項のソリトンに対する影響を調べている。

HNLS 方程式 (2) は、一般には完全可積分系、すなわち Lax 対が存在し、逆散乱法で解ける方程式ではないように思われるが、定数 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ に対して次の 3 通りの制限が加えられたときには、逆散乱法を使って解くことのできる事がわかっている。

① $\beta_1: \beta_2: \beta_3 = 0: 1: 1$ (微分型 NLS 方程式 I)

$$i\partial_T \psi + \frac{1}{2} \partial_{XX} \psi + |\psi|^2 \psi + i\epsilon (|\psi|^2 \psi)_X = 0 \quad (3)$$

(1 ソリトン解)

$$\psi = \frac{\eta e^{i[\xi X + \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)T - \xi_0 - \epsilon \int_{-\infty}^X |\psi|^2 dx]}}{\cosh \eta(X - \xi T - \eta_0) + \frac{\epsilon}{2}(-\xi + i\eta) e^{\eta(X - \xi T - \eta_0)}} \quad (4)$$

② $\beta_1: \beta_2: \beta_3 = 0: 1: 0$ (微分型 NLS 方程式 II)

$$i\partial_T \psi + \frac{1}{2} \partial_{XX} \psi + |\psi|^2 \psi + i\epsilon |\psi|^2 \partial_X \psi = 0 \quad (5)$$

(1 ソリトン解)

$$\psi = \frac{\eta e^{i[\xi X + \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)T - \xi_0]}}{\cosh \eta(X - \xi T - \eta_0) + \frac{\epsilon}{2}(-\xi + i\eta) e^{\eta(X - \xi T - \eta_0)}} \quad (6)$$

③ $\beta_1: \beta_2: \beta_3 = 1: 6: 0$ (Hirota 方程式)

$$i\partial_T \psi + \frac{1}{2} \partial_{XX} \psi + |\psi|^2 \psi + i\epsilon (\partial_{XXX} \psi + 6|\psi|^2 \partial_X \psi) = 0 \quad (7)$$

(1 ソリトン解)

$$q = \eta \exp\left[i\left\{\xi X + \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)T + \epsilon\xi(\xi^2 - 3\eta^2)T - \xi_0\right\}\right] \operatorname{sech} \eta[X - \xi T - \epsilon(\eta^2 - 3\xi^2)T - \eta_0] \quad (8)$$

ちなみに、NLS 方程式 (1) の 1 ソリトン解は、

$$q = \eta \exp\left[i\left\{\xi X + \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)T - \xi_0\right\}\right] \operatorname{sech} \eta[X - \xi T - \eta_0] \quad (9)$$

で与えられ、(4)、(6)、(8) と比較すると、方程式 (3)、(5)、(7) の擾動項は、NLS 方程式の 1 ソリトン解にそれほど大きな変化を与えないことがわかる。

ここでは、今までに知られている完全可積分系の HNLS 方程式に加えて、 $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1:6:3$ の場合、すなわち

$$i q_T + \frac{1}{2} q_{xx} + |q|^2 q + i\epsilon (q_{xxx} + 6|q|^2 q_x + 3q |q|_x^2) = 0 \quad (10)$$

にも逆散乱法が使え、ソリトン解が得られることを示す。得られた(10)のソリトン解はこれまでに報告されているソリトン解とはかなり異なった性質を持っており、理論的にも実際的にも興味深いものがある。さらに実際的な現象との対応を考えるため、(10)の初期値問題をいくつか計算機で解き、その結果に対する考察を行う。

2. Lax 対と散乱問題

まず、HNLS 方程式 (10) に対する解析を簡単にするため、次のような変数変換を行う。

$$u(x, t) = q(x, T) \exp\left[\frac{-i}{6\epsilon} \left(x - \frac{T}{18\epsilon}\right)\right] \quad (11)$$

$$t = T \quad (12)$$

$$x = X - \frac{T}{12\epsilon} \quad (13)$$

すると、 u に対する方程式

$$u_t + \epsilon(u_{xxx} + 6|u|^2 u_x + 3u|u_x|^2) = 0 \quad (14)$$

が得られる。この方程式は最近 Ito³⁾によって考察され、保存量が無限個存在することが示されている。

(14) に対する固有値問題、および時間発展の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = \left[-i\zeta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & u^* \\ -u^* & -u & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = & \left[-4i\epsilon\zeta^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + 2i\epsilon\zeta \begin{pmatrix} |u|^2 & u^2 & u_x \\ u^{*2} & |u|^2 & u_x^* \\ u_x^* & u_x & -2|u|^2 \end{pmatrix} \right. \\ & - \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 & u_{xx} \\ 0 & 0 & u_{xx}^* \\ -u_{xx}^* & -u_{xx} & 0 \end{pmatrix} + 4\epsilon(\zeta^2 - |u|^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & u^* \\ -u^* & -u & 0 \end{pmatrix} \\ & \left. + \epsilon(uu_x^* - u_x u^*) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (16) \end{aligned}$$

で与えられる。ここで、 ζ は固有値問題(15)の固有値である。NLS方程式や微分型NLS方程式、およびHirota方程式のLax対は 2×2 行列で表されるのに対し、(14)のLax対は 3×3 行列で表されるのが大きな特徴で、当然解の構造にも違いを生じることになる。

次に、固有値問題(15)に対して、次のような境界条件を満たすJost解を定義する。

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{12} \\ \varphi_{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x}, \quad \varphi_2 = \begin{pmatrix} \varphi_{21} \\ \varphi_{22} \\ \varphi_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x}, \quad \varphi_3 = \begin{pmatrix} \varphi_{31} \\ \varphi_{32} \\ \varphi_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} \quad (17)$$

($x \rightarrow -\infty$)

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{13} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} \psi_{21} \\ \psi_{22} \\ \psi_{23} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x}, \quad \psi_3 = \begin{pmatrix} \psi_{31} \\ \psi_{32} \\ \psi_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} \quad (18)$$

($x \rightarrow +\infty$)

また、(17) と (18) の間には、

$$\varphi_1 = \alpha_{11}(\alpha) \psi_1 + \alpha_{12}(\alpha) \psi_2 + \alpha_{13}(\alpha) \psi_3 \quad (19)$$

$$\varphi_2 = \alpha_{21}(\alpha) \psi_1 + \alpha_{22}(\alpha) \psi_2 + \alpha_{23}(\alpha) \psi_3 \quad (20)$$

$$\varphi_3 = \alpha_{31}(\alpha) \psi_1 + \alpha_{32}(\alpha) \psi_2 + \alpha_{33}(\alpha) \psi_3 \quad (21)$$

で表される関係があるとする⁴⁾。ここで、 $\alpha_{ij}(\alpha)$ ($i, j=1, 2, 3$) は散乱係数である。さらに、(18) は積分表示

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x} + \int_x^{\infty} ds K^{(1)}(\alpha, s) e^{-i\alpha s} \quad (22)$$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\alpha x} + \int_x^{\infty} ds K^{(2)}(\alpha, s) e^{-i\alpha s} \quad (23)$$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\alpha x} + \int_x^{\infty} ds K^{(3)}(\alpha, s) e^{i\alpha s} \quad (24)$$

で表すことができる。ただし、 $K^{(i)}(\alpha, s)$ ($i=1, 2, 3$) は

$$K^{(i)}(\alpha, s) = \begin{pmatrix} K_1^{(i)} \\ K_2^{(i)} \\ K_3^{(i)} \end{pmatrix} \quad (25)$$

である。

3. Gelfand-Levitán (G-L) 方程式

前節の結果から $K^{(i)}(\alpha, s)$ に対する G-L 方程式を導くことができる。ここでは、議論を簡単にするために、次のような

仮定をおく。すなわち、(21)中の $\alpha_{33}(\zeta)$ の逆数 $1/\alpha_{33}(\zeta)$ は ζ の下半面で、 $\zeta_1^*, \zeta_2^*, \dots, \zeta_N^*$ ($\text{Im} \zeta_j > 0$) に単純極を持つ以外正則で、その単純極において

$$\varphi_3(\alpha, \zeta_j^*) = C_{31}^{(j)} \psi_1(\alpha, \zeta_j^*) + C_{32}^{(j)} \psi_2(\alpha, \zeta_j^*) \quad (j=1, \dots, N) \quad (26)$$

が成り立つとする。このとき、前節で述べたJost解の解析性を考慮すると、(19), (20), (21)から次のG-L方程式が得られる。

$$K_1^{(3)}(\alpha, y) + F_1(\alpha+y) + \int_x^\infty \int_x^\infty ds dz K_1^{(3)}(\alpha, z) F_1^*(z+s) F_1(\zeta+y) + \int_x^\infty \int_x^\infty ds dz K_1^{(3)}(\alpha, z) F_1(z+s) F_1^*(\zeta+y) = 0 \quad (27)$$

ただし、

$$F_1(z) = \sum_{n=1}^N i \frac{C_{31}^{(n)}}{\alpha_{33}(\zeta_n^*)} e^{-i\zeta_n^* z} + \int_{-\infty - 2\pi}^\infty \frac{d\zeta}{2\pi} \frac{\alpha_{31}(\zeta)}{\alpha_{33}(\zeta)} e^{-i\zeta z} \quad (28)$$

で与えられ、(14)の u と $K_1^{(3)}(\alpha, y)$ は、

$$u(\alpha) = -2 K_1^{(3)}(\alpha, \alpha) \quad (29)$$

という関係で結ばれている。ポテンシャル $u(\alpha)$ を再構成するためには、(27)だけが必要であることを注意しておく。

また、 $k \rightarrow \infty$ において $|u| \rightarrow 0$ とすれば(26)は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} = -4i\epsilon \zeta^3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \\ \Psi_3 \end{pmatrix} \quad (k \rightarrow \infty) \quad (30)$$

となり、これを用いて散乱係数の時間依存性は、

$$\alpha_{31}(\zeta, t) = \alpha_{31}(\zeta, 0) e^{-8i\epsilon \zeta^3 t} \quad (31)$$

$$\alpha_{33}(\zeta, t) = \alpha_{33}(\zeta, 0) \quad (32)$$

$$G_{31}^{(1)}(t) = G_{31}^{(1)}(0) e^{-8i\epsilon \xi_1^{*3} t} \quad (33)$$

で与えられる。

4. ソリトン解

1ソリトン解を得るために、(28)において $N=1$ とし

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(-\xi' + i\eta) \quad (\eta > 0) \quad (34)$$

$$G_{31}^{(1)}(t) = G_{31}^{(1)}(0) e^{-8i\epsilon \xi_1^{*3} t} \quad (35)$$

$$\alpha_{33}(\xi) = \frac{(\xi - \xi_1^*)(\xi + \xi_1)}{(\xi - \xi_1)(\xi + \xi_1^*)} \quad (36)$$

$$\alpha_{31}(\xi) = 0 \quad (37)$$

にとる。この条件で G-L 方程式 (27) を解き、(29), (11), (12), (13) を考慮すれば、HNLS 方程式 (10) に対する 1ソリトン解は、

$$q(x, T) = \frac{\eta e^{iB} [2 \cosh A + (c-1)e^{-A}]}{\cosh(2A - \ln|c|) + |c|} \quad (38)$$

で与えられることがわかる。ただし、

$$A = \eta [X - \{\xi + \epsilon(\eta^2 - 3\xi^2)\}T - \eta_0] \quad (39)$$

$$B = \xi X + \frac{1}{2}(\eta^2 - \xi^2)T + \epsilon \xi (\xi^2 - 3\eta^2)T - \xi_0 \quad (40)$$

$$c = 1 - \frac{i\eta}{\xi - 1/6\epsilon} \quad (41)$$

$$\xi = \xi' + \frac{1}{6\epsilon} \quad (42)$$

$$G_{31}^{(1)}(0) = e^{\eta\eta_0 - i\xi_0 + i \arg c} \quad (43)$$

である。(38)において $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとれば、NLS 方程式

の1ソリトン解(9)に一致する。また $\epsilon \rightarrow \frac{1}{6\epsilon}$ の極限、すなわち $|\epsilon| \rightarrow \infty$ とすると

$$\phi(X, T) \rightarrow \frac{\eta}{\sqrt{2}} \exp\left[i\left(\frac{1}{6\epsilon}X - \frac{1}{18\epsilon}T - \xi_0 + \arg c\right)\right] \operatorname{sech} \eta \left[X - \left(\epsilon\eta^2 + \frac{1}{2\epsilon}\right)T - \eta_0\right] \quad (44)$$

となるが、この解は $1/\alpha_{33}(z)$ の単純極が虚軸上にある場合に対応するものである。

ここで、1ソリトン解(38)の振幅 $|\phi(X, T)|$ について考察する。 η を2.0に固定して $|\epsilon|$ の値を変化させたときの $|\phi|$ の関数形を描いたのが図1~図7である。図1は $|\epsilon|=1.0$ 、すなわち NLS 方程式の1ソリトン解(9)を表わしている。

$1 \leq |\epsilon| < 2$ の範囲(図2)ではソリトン解は比較的 sech 関数に近い形をしているが、 $|\epsilon|=2.0$ でソリトン解のパルスの頂上は平らになる(図3)。 $|\epsilon|$ が2.0を越えると、解の様相は大きく変化する。すなわち図4~図7に見られるように2つのソリトンを重ね合わせた形になっている。これは縮退したソリトンとも言えるま、たく新しい型の解である。この型の解は $|\epsilon|$ が大きくなるにつれて、2つの山の距離が増加し、 $|\epsilon| \rightarrow \infty$ の極限では、右側の山が $x \rightarrow \infty$ に消え去り、左側の山は(44)に一致することを注意しておく。

5. 初期値問題について

HNLS 方程式(10)に対して、初期値が $\phi(X, T=0) = \operatorname{sech} X$

で与えられる初期値問題を考える。図8は(10)において $\epsilon = 0.1$ として時間発展させたもので、初期波形は時間と共にそれほど大きく変化しない。これは次のように理解できる。 $\epsilon \rightarrow 0$ とすれば、(10)はNLS方程式(1)になり、 $\psi(x, T=0) = \text{sech } x$ を時間発展させても $|\psi(x, T)|$ は変化しない。 ϵ が小さい場合、(10)の解の振舞いは(1)のものに比較的近いいため図8のような結果が得られたと考えられる。一方 ϵ が大きい場合はどうであろうか。(10)において $\epsilon = 0.5$ としたときの計算結果を図9に示す。ここでも sech 型のソリトンが現れるが、図8と異なった形のソリトンが発生している。これは次のように理解できる。 ϵ が大きい場合は、(10)で ϵ の掛かった項の寄与が大きくなり、第2、第3項は近似的に無視できるであろう。このとき、初期値は実数であるので、時間発展はMkdV方程式のものに近くなると考えられる。従って、図9のソリトンはMkdV方程式のソリトンに近いということが出来る。それでは、中間の ϵ の値ではどうなるか。 $\epsilon = 0.195$ にとって時間発展させた例を図10に示す。時間が経過すると2山のソリトンが現れるが、 $T=30$ でさざ波の部分を取り除いてさらに時間発展させると、ブリザー解のような振舞いを示す。従ってこの2山のソリトンは(38)のものではないが、その特徴的な構造は解に現れていると考えることができる。

以上の計算結果をまとめると、(10) は ϵ が小さいとき NL S 方程式、 ϵ が大きいとき MKdV 方程式に近い振舞いを示し、その中間において (10) 特有の性質が現れると予想できる。初期値問題において 2山ソリトンがどのような状況で出現するかについては、今後数値計算、逆散乱法の解析両面からの検討をすすめていく予定である。

参考文献

- 1) A. Hasegawa and F. Tappart, *Appl. Phys. Lett* 23 (1973) 142, 171
- 2) Y. Kodama, *J. Stat. Phys.* 39 (1985) 597
Y. Kodama and A. Hasegawa, *IEEE. J. Quan. Elect.* QE-23 (1987) 510
- 3) 伊藤雅明、日本物理学会 1989年秋の分科会予稿集 4. 102
- 4) S.V. Manakov, *Sov. Phys. JETP.* 38 (1974) 248

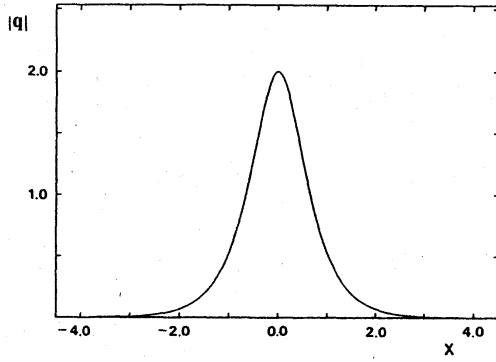


図 1. $\eta = 2.0$, $|c| = 1.0$ の場合

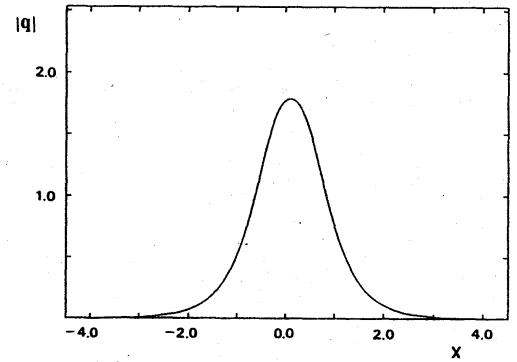


図 2. $\eta = 2.0$, $|c| = 1.5$ の場合

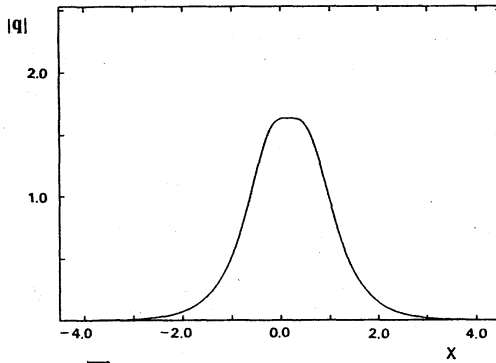


図 3. $\eta = 2.0$, $|c| = 2.0$ の場合

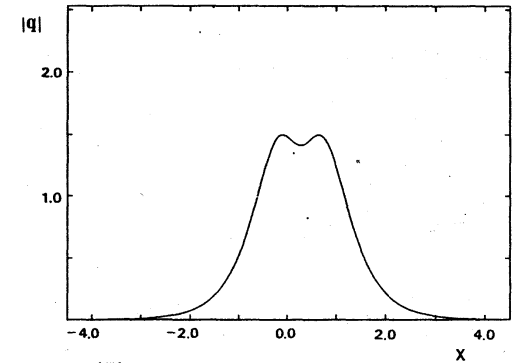


図 4. $\eta = 2.0$, $|c| = 3.0$ の場合

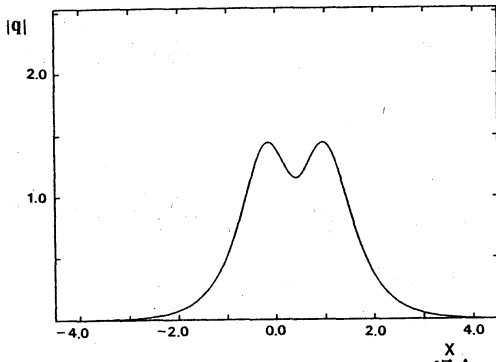


図 5. $\eta = 2.0$, $|c| = 5.0$ の場合

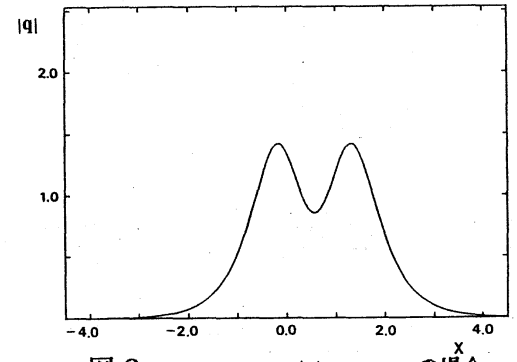


図 6. $\eta = 2.0$, $|c| = 10.0$ の場合

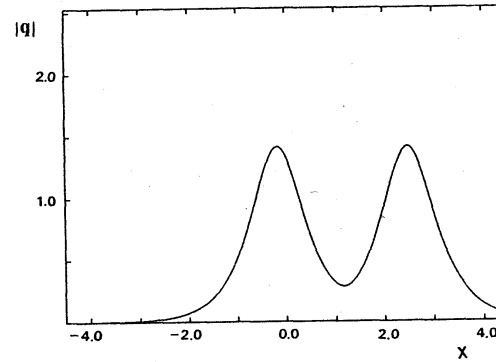


図 7. $\eta = 2.0$, $|c| = 100$ の場合

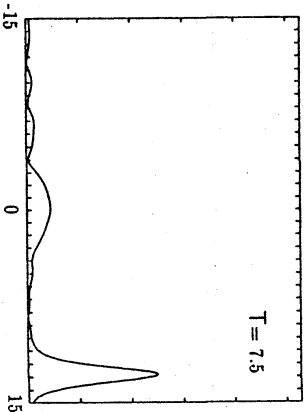
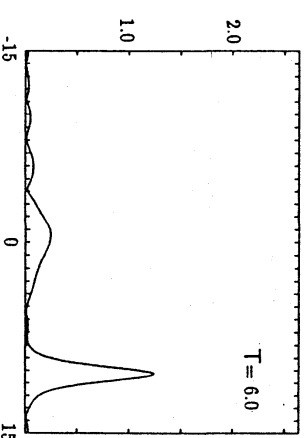
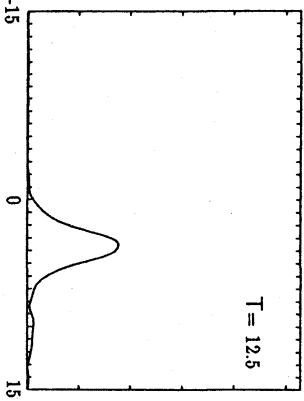
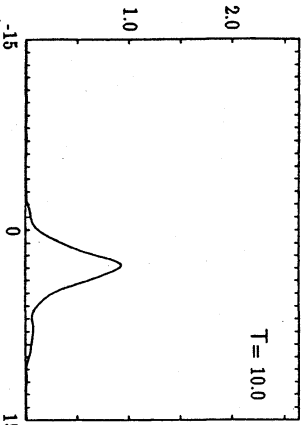
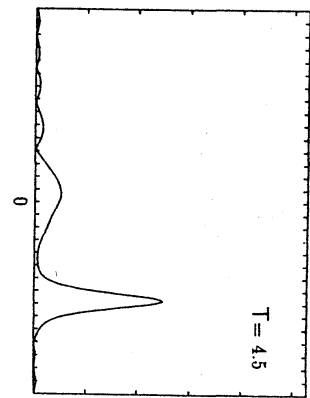
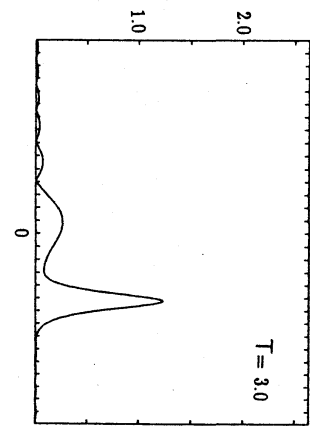
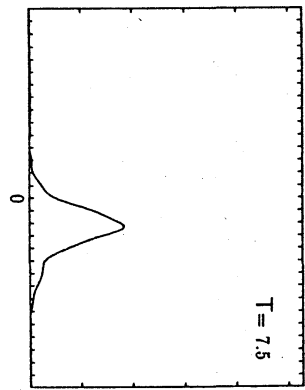
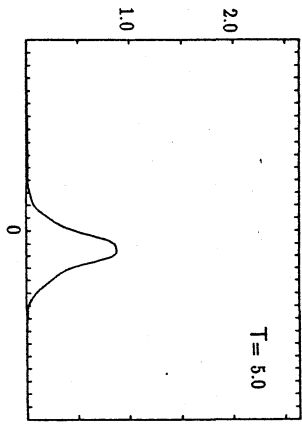
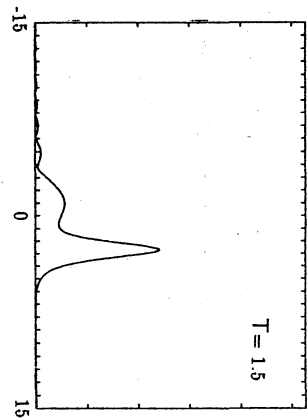
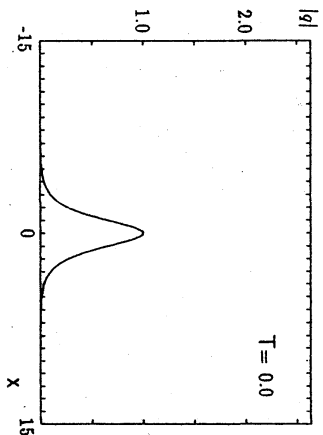
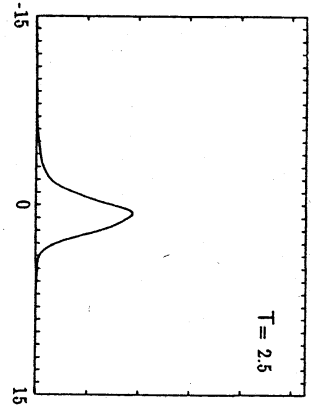
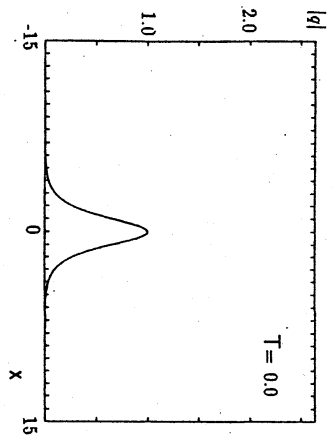


図 8. 初期値 $q(x, T=0) = \text{sech } X$ の場合 ($\epsilon=0.1$)

図 9. 初期値 $q(x, T=0) = \text{sech } X$ の場合 ($\epsilon=0.5$)

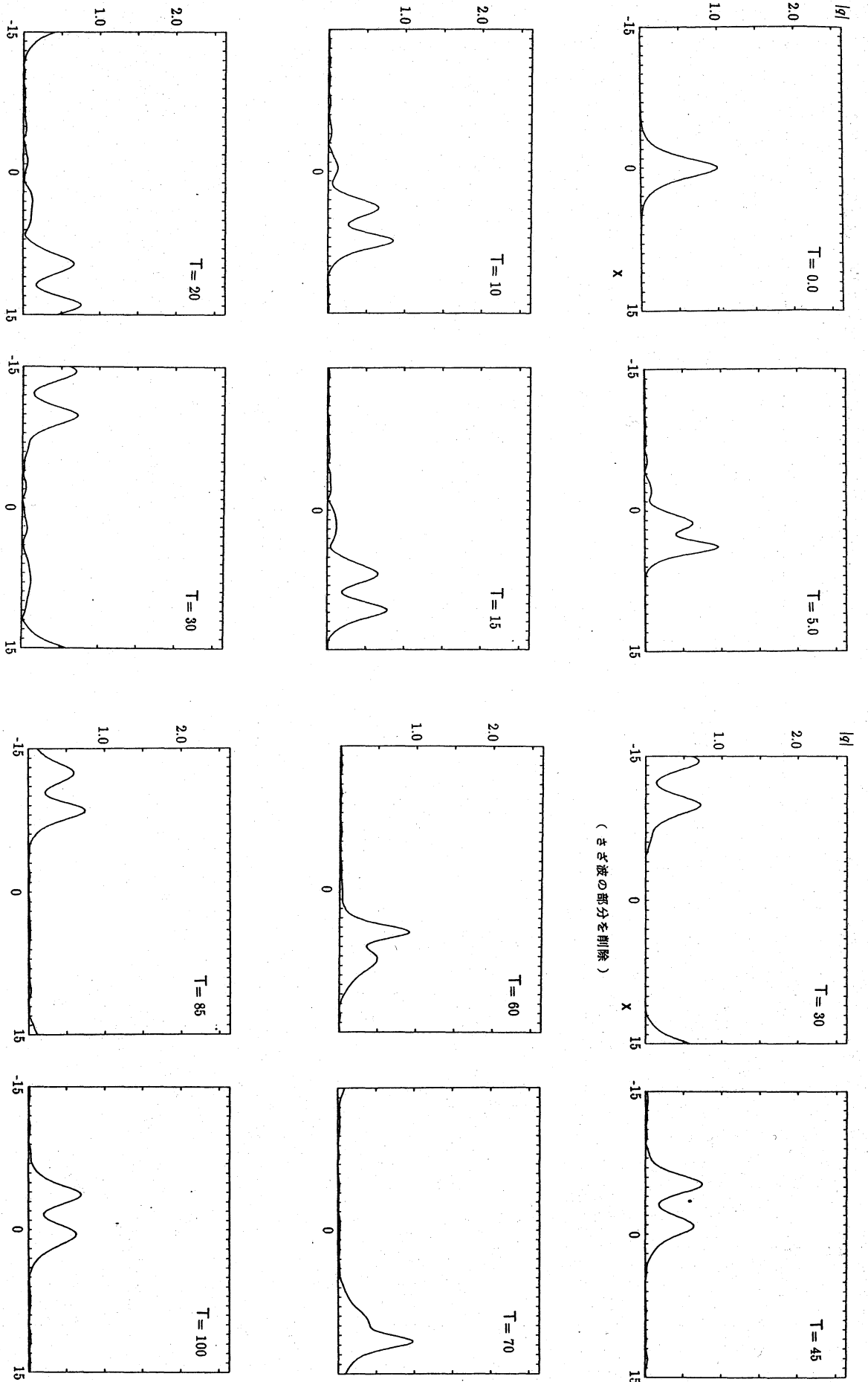


図 10. 初期値 $q(X, T=0) = \text{sech } X$ の場合 ($\epsilon = 0.195$)