

非線形マッシュウ方程式及びパラメトリック励振された
非線形シュレジンガー方程式に於ける外場周波数応答特性

筑波大物質工 金野秀敏 (Hidetoshi Konno)

1. 緒言

近年、非平衡系に於ける"ソリトン"に対する外場、散逸の影響に関心が持たれる様になってきた。この背景には、非平衡系での多彩なパターン形成や乱流現象をも含めた非線形現象を"ソリトン"をノーマルモードとする描像[1]で統一的に把握しようとする壮大な構想があると考えられる。

ここにきて、"ソリトン"と"カオス"の接点が明確な形で出現して来た: 3次元の基礎方程式から逡減摂動[2]を用い高次の摂動項を持つ1次元非線形シュレジンガー(NLS)方程式を導出し議論する場合も多い。NLS方程式のソリトンの時間発展に関しては薩摩、矢島[3]で詳しく調べられた。しかし、(i)ランダムに局在"ソリトン"が生成・消滅する状況が相加的外力駆動下のNLS方程式から出現する事、(ii)"ソリトン"と"輻射"の2次の相互作用が"ソリトンのカオス化"にとり重要である

事が野崎と戸次[4]により示された。“ソリトン”の“カオス”との共存は他方、一般化されたKuramoto-Sivashinski(KS)方程式[5]でも研究されて来た[6]が (i)“ソリトン”の生成・消滅過程の仕掛はどのような相互作用に基づくのか?、(ii)散逸、エネルギーの注入の基でソリトンはどのような多様な挙動をするのか?等は一般の“ソリトン”系で必ずしも良く理解されて居ない。

別種の摂動下の非線形シュレジンガー方程式に従う局在した“ソリトン”の分離過程の存在は文献[7]で示された。また、“ソリトン”と“ホール”(Hole)の相互作用により1つの生成消滅過程を形成しうる場合は修正KS方程式で示された[8]。

しかし、3次元に於けるノーマルモードとしての“ソリトン”が存在しうる非平衡系の可能なパターンは、まだまだ多彩であり、その動的挙動定量化等多くの課題が残されている。

非平衡系の非線形相互作用は多彩で有るが、相乗的な相互干渉が重要な場合が数多くみうけられる。工学系の制御にもパラメトリックな相互作用が随所に用いられている。本論は、最も簡単なパラメータ励振非線形多体系と少数自由度系の代表としてのパラメトリック励振された非線形シュレジンガー方程式と非線形マシュウ(Mathieu)方程式に於ける共鳴現象に拘る周波数応答特性に関する報告を行う。

2. パラメトリック励振された非線形シュレジンガー方程式

2. 1 モデル 我々の考えたモデル[9]は次のような散逸項に時間変動する摂動(散逸変調)を加えたものである。

$$i \Psi_t + \Psi_{xx} + 2 |\Psi|^2 \Psi = -i \Gamma(t) \Psi \quad (1a)$$

$$\text{ここで、} \quad \Gamma(t) = \Gamma_0 \sin \omega t. \quad (1b)$$

散逸項が時間変化しない時、系のエネルギーは時間と共に減少する。散逸項が(1b)式のように変化すると、この項は散逸とエネルギーの注入の2つの役割を同時に果たす。

NLS方程式には無限個の保存量が存在するが、一般には摂動の存在により保存量が消失する。しかし、上記の様な変調の存在は、例えば、粒子数 $N = \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx$, 運動量 $P = i \int_{-\infty}^{\infty} (\Psi_x \cdot \Psi - \Psi_x \Psi^*) dx$ に対応する量はある値の周りを変動し; $N(t)/N(0) = P(t)/P(0) = \exp[(\Gamma_0/\omega)(\cos \omega s - 1)]$, $t \rightarrow \infty$ でも消失しない。

2. 2 線形安定性 (1a)式には一様解(Stokes解)が存在する: $\Psi_0(t) = \Phi_0(t) \exp(i \theta_0(t)t)$, 但し, $\Phi_0(t) = \exp[(\Gamma_0/\omega)(\cos \omega s - 1)]$, $\theta_0(t) = 2 \int \Phi_0(s)^2 ds$. この解を基礎にして $\Psi(x, t) = \Psi_0(t) [1 + A(x, t)]$ と置き、 $A(x, t)$ に対する線形化方程式を作ると次の様になる:

$$A_{rtt}(k, t) + (k^4 - 4k^2 \Phi_0^2(t)) A_r(k, t), \quad (2)$$

$$A_r(k, t) = \int A_r(x, t) \exp(-ikx) dx .$$

線形安定領域を近似的に評価した結果を図1、図2に示す。

外場の周波数 ω と波数 k に依存して安定・不安定境界は鋭敏に変化する。外場の強度 Γ_0 が増加すると、不安定領域が急速に拡大する事が理解される。

2. 3 外場強度依存性 [9] まず、局在した1ソリトン解を初期波形とし、 $\omega = 1, 2\eta = \sqrt{5-1}$ とした時の、ソリトンの振幅の変調の様子を簡述する。パワースペクトル密度、ソリトンの中心点の時間変動のポアンカレ断面から、外場強度を大きくして行くにつれ、間欠性が強くなって行く事が理解される。この系では、相加性外場の場合と異なりソリトンと輻射の相互作用が1ソリトンの振幅変化の倍周期化現象は与えないように見えた。

ソリトンが単に外場に引き込まれて運動しているとすればソリトンの運動は

$$\Psi(x, t) = K(t) \operatorname{sech}[K(t)x] \exp\left\{i \int K(s)^2 ds\right\} \quad (3)$$

$$K(t) = 2\eta \exp\left[\left(\frac{2\Gamma_0}{\omega_0}\right)(\cos \omega t - 1)\right]$$

で近似される。 $\Gamma_0 \leq 0.058$ でのソリトンの大局的振舞は確かによく近似されていた。

しかし、外場強度 Γ_0 がほぼ、0.06を越えると、局在1ソリトンは2つの非局在ソリトンに分裂した。図3にその例を示す。周期的境界条件の影響は必ずしも無視できない。そこ

で体系の大きさを2倍にして計算した例を図4(a, b)に示す。2ソリトンへの分裂は発生しなかったが、局在1ソリトンから、局在2ソリトン状態への遷移が明かに起こって居る図4(b)：包絡線の断面の形状は局在2ソリトン状態と同一のパターンになっている。

2. 4 外場周波数依存性 さて、主題の周波数依存性について述べよう。体系の大きさを $L = 25$ に固定し、 $2\eta = \sqrt{5-1}$ 及び $\Gamma_0 = 0.06$ とし、ソリトンの分裂がどの外場周波数 ω で強く起こるか調べた。2ソリトンへ遷移・分裂するまでの時間の逆数を取れば遷移確率が与えられるが、どこで2ソリトン状態に遷移したかを正確に決定する手段が確立して居ないので振幅(最大値と最小値の差)を指標にした整理結果が図5である(各々、 $T=300s$ のデータから計算)。 $1 \leq \omega \leq 1.1$ 及び $\omega \leq 4.5$ に振幅の大部分が存在する。

$2\eta = \sqrt{5-1}$ と置いたからソリトンの変調周波数は $\omega_0 = (2\eta)^2 = 1.52786$ となり、共鳴分裂が発生する高周波数部位は $\omega = (2/3)\omega_0$ 近傍に存する。(1)式とは基礎方程式は異なるが相加的外力駆動の量子非線形シュレジンガー方程式に於ける共鳴分裂を理論的に予言した論文が小西、和達[10]によって提出されていた。これによれば、1ソリトンから2ソリトンへの遷移確率の大きくなる外場周波数帯が3つの共鳴構造を形

成している。厳密には図5の縦軸は遷移確率に対応して居ないが、形式的対応は興味深い。

2ソリトン解を初期値に取った時もソリトンは2つに分裂する(図6)。この事は、場がパラメトリック励振によって Convectively Unstable になって居る事が示唆される。(3)式の振動解の安定性は(2)式の導出と同様にして

$$iA_t - 2K(t) \tanh[K(t)x] A_x + A_{xx} + 2K(t)^2 \operatorname{sech}^2[K(t)x] (A + A^*) = 0 \quad (4)$$

を得る。これは、解けていない。また、モデル(1)に関わる1ソリトンから2ソリトンへの遷移の理論的解析も今後の問題である。

3. 非線形マッシュウ方程式

3. 1 モデル 基礎方程式は

$$A_{tt} + kA_t + (1 + \Gamma \sin \omega t) A + A^3 = 0 \quad (5)$$

であり共鳴周波数及び非線形項の係数は何れも1になるように規格化されて居る。マッシュウ方程式はパラメータ励振系の1つのパラダイムであり、空間モードの不安定境界は垂直加振下に於ける水面波の1モード発振領域をよく再現する。しかし、2モードの競合が発生する状況は、Milesにより導出された非線形基礎方程式を用いて解析する必要がある。

本章では、1モード発振のモデルとしての非線形マッシュウ方程式の外場の強度及び周波数依存性の解析結果を述べる。焦点は、(i)この小数自由度系のカオスとNLS方程式で記述される無限自由度系に於けるカオスの相違点を明かにする事；(ii)共鳴現象の相違点を明確にする事、等である。

3. 2 外場強度依存性 これにより、 (k, Γ) 空間に於ける振動状態及びカオスの発生領域を明かにした。それを図7に示す。これから明かな様にカオスの発生領域は (k, Γ) 位相空間のある限られた領域を住分けて存在している。倍周期化が存在しその過程はマッシュウ方程式が持っている対称性と深い関わりがある。

3. 3 外場周波数依存性 次に、周波数応答特性を (ω, Γ) 空間で調べてみよう。上式(5)は、数値計算に向いていないので変数変換して外場の周波数が $2t$ になる様に書き換えると次の様になる：

$$x_{tt} + \bar{k} x_t + (\alpha + \beta \sin 2t) x + x^3 = 0 \quad (6)$$

但し、パラメータの値は次式の様に変換されている。

$$x = A / \omega, \quad \bar{k} = k / \omega, \quad \alpha = 1 / \omega^2 \quad \text{and} \quad \beta = \Gamma / \omega^2$$

マッシュウ方程式のカオスは上田ら[12]によって、アナログ及びデジタル計算機を用い、カオス・アトラクタの分類が行なわれた。その結果、アトラクタの多様性が報告されている。

解析的な研究に関しては、この系にはセパトリックスがなく、メルニコフの方法が適用可能でないので、カオスの発生点すら理論的に予測できていない。また、位相空間の中でカオスの存在形態は詳しく報告されていない。さらに、散逸 k 依存性に付いても詳細は未知である。

(5)式を用いて、周波数と外場の強さの2次元(ω, Γ)位相空間に於ける振動状態の相図を描いたのが図8である。線形のマシュウ方程式の安定不安定の相図[11]から予想される様に $\alpha = 1, 4, 9$ の近傍で外場と共鳴が起こって線形的には不安定が発生する。 $\omega = 0.5$ は丁度 $\alpha = 4$ の近傍に対応している。周波数依存性は散逸 k 依存性よりはるかに複雑な挙動を示す。容易に確かめられるように、Krylov-Bogoliubovの方法を援用して解析した安定・不安定境界は共鳴近傍から遠くなる程数値計算で求めた値(図中の点線)からはずれてくる。

振動の相図が求まったが、それぞれの異なる振動状態内のモードはどのような競合状態にあるのだろうか。水面波の加振の問題[13]の場合には、2つの空間モードの競合がカオスを生む原因であった。この非線形マシュウ方程式モデルでは、時間的モードの競合が階層構造を生み、位相空間の下部構造と上部構造では、モードの競合の様子が異なっている。各振動相に於ける振動周波数の強度の大小関係を表Iに示す。同

じ振動相でも、階層が異なると、この様に異なるモードバランスの仕組みが働いている。外場の強度が大きくなるにつれて、高次のモードにエネルギーがより多く入ってゆくが、もっと高い階層（図の上範囲外）では、もはや、モードのバランスの仕組みが、小さな摂動で壊されカオスの領域位相空間の広い領域を占有する。3周期運動がここでは卓越する。

4. 結言

パラメータ励振系では、一般にマンレー・ルーの関係式が存在しエネルギー量子の分裂、融合の存在が示唆される。特に、非線形回路では、有名である。弾性表面波の発生過程、コンボルバーでもフォノン量子の分裂、融合が生起していると思なせ、非線形マッシュウ方程式の倍周期化ルートの存在との関係は興味深い。非線形シュレジンガー方程式の損失変調はハミルトン力学系と類似した性質を有する。しかし、間欠的カオスの発生結び付いた"ソリトン"と"輻射"の相互作用の様相は相加性外場下の状況と異なり、低自由度系への通減は困難な様に見える。しかし、量子的性格は長時間保存され、依然として"ソリトン"はアトラクタの役割を果たしている。より深い理解のための理論解析、アイデアが必要である。

文献

- 1) Y. Ichikawa, T. Mitsuhashi and K. Konno: J. Phys. Soc. Jpn
41(1976)1382.
- 2) T. Taniuchi et al.: Suppl. Progr. Theor. Phys. 55(1974)1.
- 3) J. Satsuma and N. Yajima: Suppl. Prog. Theor. Phys. 55
(1974)284.
- 4) K. Nozaki and N. Bekki: Physica 21D(1986)381.
- 5) Y. Kuramoto: Chemical oscillations, Waves and
Turbulence, Springer (1984).
- 6) B. I. Cohen et al.: Nuclear Fusion 16(1976)971;
T. Kawahara and S. Toh: Phys. Fluids 28(1985)1536.
J. Phys. Soc. Jpn. 54(1985)1257.
- 7) K. Nozaki: Physica 21D(1986)369.
- 8) H. Konno and H. Soneda: J. Phys. Soc. Jpn 57(1988)1163.
- 9) A. Okamura and H. Konno: J. Phys. Soc. Jpn 58(1989)1930.
- 10) T. Konishi and M. Wadati: J. Phys. Soc. Jpn 55(1986)1075.
- 11) M. Abramowitz and I. A. Stegun: Handbook of
Mathematical Functions, Dover, 1970
- 12) Y. Ueda, et al.: Report of IECE, NLP-24(1978).
- 13) M. Funakoshi and S. Inoue: J. Fluid Mech. 192(1988)219;
M. Umeki and T. Kambe : J. Phys. Soc. Jpn 58(1989) 140.

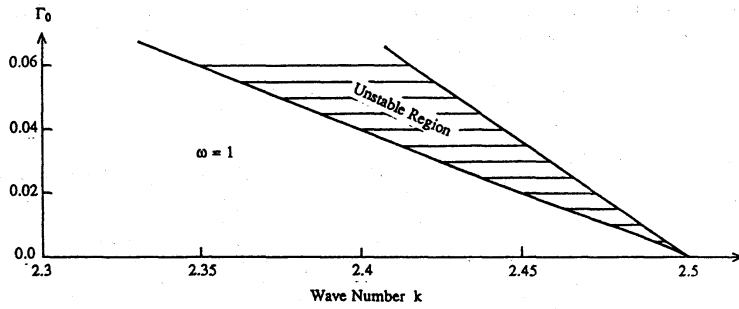


図1 $\omega = 1$ の場合の (k, Γ_0) 空間に於ける不安定領域

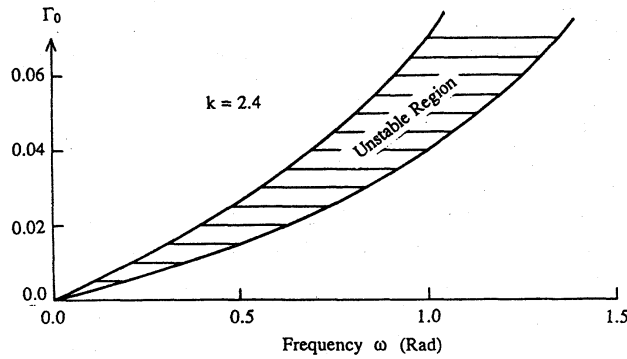


図2 $k = 2.4$ の場合の (ω, Γ_0) 空間に於ける不安定領域

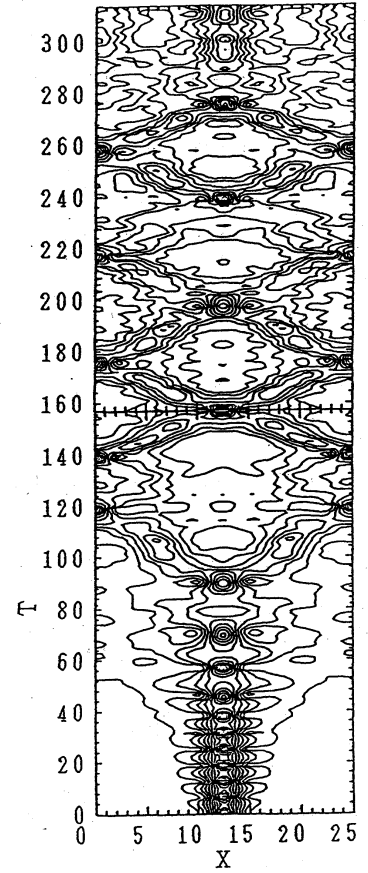


図3 $\omega = 1, \Gamma_0 = 0.06$ に取った時の $|\Psi(x, t)|$ の時空発展の等高線図 [$\Psi(x, 0) = 2\eta \operatorname{sech}[2\eta x], 2\eta = \sqrt{5-1}$]

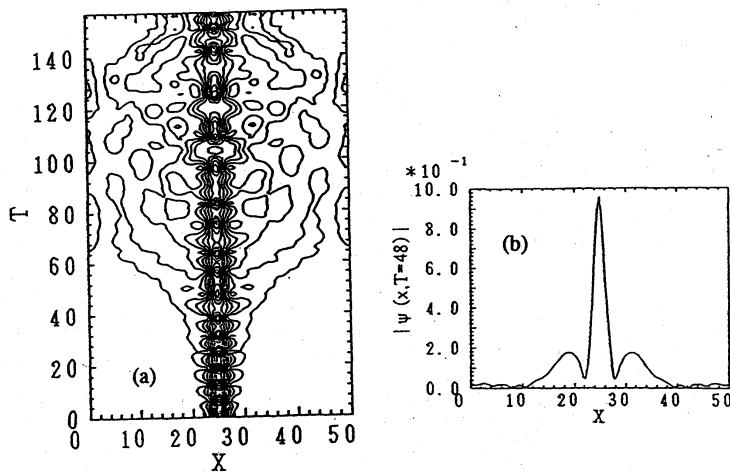


図4 (a) $\omega = 1, \Gamma_0 = 0.06$ に取った時の $|\Psi(x, t)|$ の時空発展の等高線図 [$\Psi(x, 0) = 2\eta \operatorname{sech}[2\eta x], 2\eta = \sqrt{5-1}$]
(b) $T = 48$ に於ける断面図

Table I

Phase (Symbol)	Relevant Modes Energy $E = \sum_k n_k \epsilon_k$
Π_1 (1, 2, 3)	$n_1 > n_2 > n_3$
(A) Π_2 (1/2, 1, 3/2)	$n_{1/2} > n_1 > n_{3/2}$
(B) Π_2 (1, 3/2, 1/2)	$n_1 > n_{3/2} > n_{1/2}$
(C) Π_2 (3/2, 1/2, 5/2)	$n_{3/2} > n_{1/2} > n_{5/2}$

- (A) 第一階層
- (B) 第二階層
- (C) 第三階層

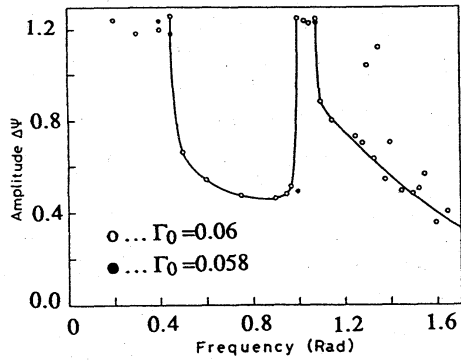


図5 ソリトンの振幅 $\Delta\Psi (=|\Psi|_{\max}-|\Psi|_{\min})$ の周波数依存性
 [$\Psi(x,0)=2\eta \operatorname{sech}[2\eta x]$, $2\eta=\sqrt{5-1}$, $L=25$, $\Gamma_e=0.06$]

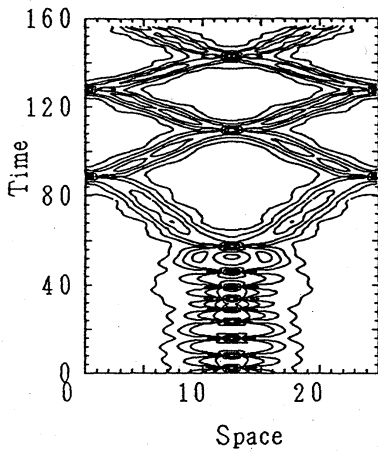
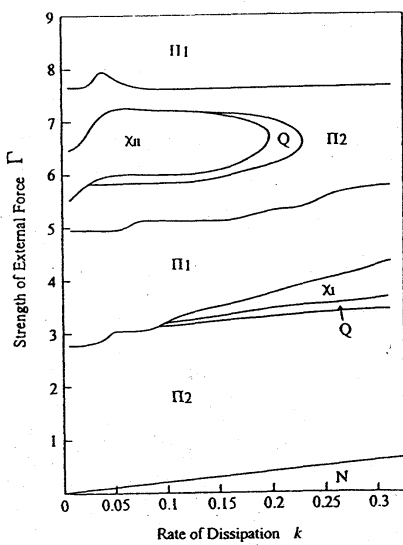


図6 局在2ソリトンの分裂 [初期波形 $2\eta_1=\sqrt{5-1}$, $\eta_1:\eta_2=3:1$ の2ソリトン, $L=25$, $\Gamma_e=0.025$]



Π_j...Period j
 Q...Quasiperiodic
 (Π₄ Π₈ Π₁₆...)
 χ...Chaotic

図7 (k, Γ) 空間に於ける振動の相図とカオス領域

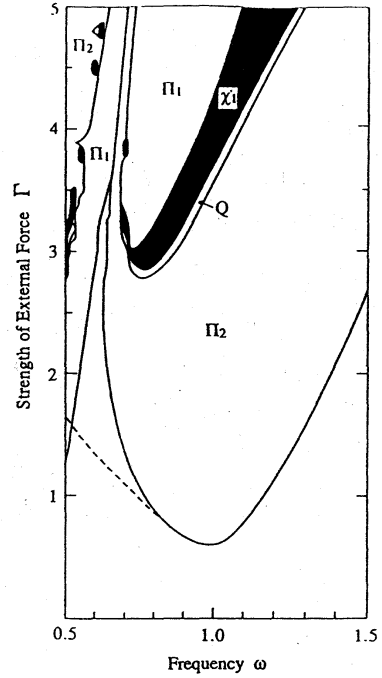
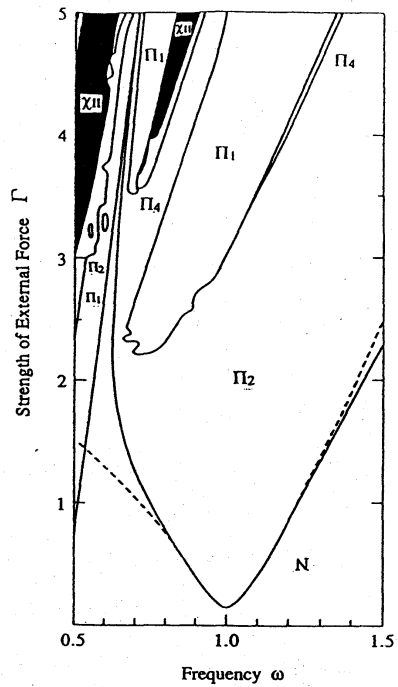


図8 (a) (ω, Γ) 空間に於ける振動の相図 (k=0.3)



(b) (ω, Γ) 空間に於ける振動の相図 (k=0.075)