

密度成層流体中の物体により生じる

非線形内部重力波と K-d V 方程式 - 数値的研究 -

国立公害研究所 花崎秀史 (Hideshi Hanazaki)

1. はじめに

密度成層流、回転流（旋回流）中に物体を置くと、下流側に風下波や慣性波が立つことはよく知られている。しかし、実験によると、同時に上流側にも長波長の波が立つことが知られ、その発生は、1970年代前半に upstream influence の問題として理論的に考察^{1), 2)}され、1970年代後半には、成層流の場合についての実験的研究^{3), 4)}もいくつかなされた。線形理論によると、波の分散関係から、群速度が流速より大きい場合には物体により生じた波が上流に遡ることが可能であることがわかるが、定常位相の方法により時間発展の解を求めると、波の上流端は流体の粘性がなくとも、振幅が時間 t の $-1/3$ 乗に比例して減衰する。従って、 $t \rightarrow \infty$ の極限では上流の波は基本的には消滅することになる。しかし、実験によると、上流の波は時間がたってもあまり減衰しない。一方、

船舶工学（水面波）の分野でも、船体模型を使った水槽実験の際に上流に攪乱が伝播することがしばしばあることは古くから知られていたが、その理由は、模型が振動したりして完全には一定速度で動かせていないため、などの実験技術の問題とされていた。こうした中、津波の発生と伝播のメカニズムに関連して、Boussinesq方程式に海底の局所的隆起、及び海面の圧力変化に対応した外力項を加えたモデルが提案された⁵⁾。これはその後、波の伝播方向を（二方向のうちの）上流向きに限って導かれる外力項をもった forced K d V 方程式⁶⁾（以下、f K d V と呼ぶ）、三次元問題に対応する外力項をもった K P 方程式の導出⁷⁾へと発展し、また、成層流⁸⁾あるいはロスビー波の問題でも係数が異なるだけで同型の方程式が導かれるなど、多くの理論的拡張が行われてきた。しかし、これらの定量的な検証を目的とした実験は少ない。これまで水面波の場合には、波形の時間発展が f K d V 方程式と似ていることがわかっているが⁹⁾、一方、成層流については、実験結果から3次の非線形項（Aを波の振幅とする時、 $\sim A^2 A_x$ の項）まで考慮する必要が唱えられている¹⁰⁾。本研究では、成層流に対する Navier-Stokes 方程式を直接数値的に解くことにより、f K d V 方程式の検証（f K d V 方程式の各項の評価等）を試みる。

2. forced K d V 方程式

図1のような一様流速の密度成層流が物体 (topography) に当たる場合を考える。f K d V 方程式は、外力項の存在以外は、通常の K d V 方程式と全く同様の手順で得られる。すなわち、運動方程式、質量保存則を、微小パラメター $\varepsilon^2 = (D/L)^2 = a/D$ [D は、流体の鉛直スケール (深さ)、L は流体の水平スケール (水平波長)、a は波の代表的振幅] を用いて摂動展開する。線形理論は、流速と内部重力波の一つのモードの群速度が等しい ($U = C_n$) [C_n : 内部重力波の n 番目のモードの長波長極限での位相速度 (= 群速度)] 時、発散 (共鳴) するので特にその付近での非線形性を考える。(U が C_n から大きく異なる時は、非線形項が線形項に比べて小さいので線形理論でよいとも考えられるが、実験によると、その場合でも非線形性が効いているようである)。共鳴している n 番目のモードの振幅を $A_n(X, \tau)$ [鉛直変位 $\zeta = \varepsilon^2 A_n \phi_n(z) + O(\varepsilon^4)$] とすると、水平速度 u、鉛直速度 w、圧力 p は、

$$u = U - \varepsilon^2 C_n A_n \phi_{nz} + O(\varepsilon^4)、$$

$$w = \varepsilon^2 C_n A_n \phi_n + O(\varepsilon^4)、$$

$$p = p_0 + \varepsilon^2 \rho_0 C_n^2 A_n \phi_{nz} + O(\varepsilon^4)、$$

のようになる (p_0 は、静水圧)。

ただし、 $\tau = \varepsilon^3 t$ 、 $X = \varepsilon x$ 、 $U = C_n + \varepsilon^2 \Delta$ 。

C_n 、 $\phi_n(z)$ は、固有値問題

$$\frac{d}{dz} \left(\rho \frac{d\phi_n}{dz} \right) - \frac{g}{C_n^2} \frac{d\rho}{dz} \phi_n = 0、$$

$$\phi_n(0) = \phi_n(D) = 0、$$

の n 番目の固有値 ($C_1 > C_2 > \dots$) と固有関数である。

この時、 A_n は、次の f K d V 方程式を満足する (ただし、ここでは 3 次の非線形項まで取り入れてある)。

$$-\frac{1}{C_n} (A_\tau + \Delta A_x) + a_1 A A_x - \varepsilon^2 a_2 A^2 A_x + a_3 A_{xxx} + (1/2) G_x = 0、$$

$$a_1 = \frac{3}{2} \frac{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^3 dz}{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^2 dz}、 \quad a_2 = 3 \frac{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^4 dz}{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^2 dz}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \frac{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^2 dz}{\int \rho C_n^2 \phi_{nz}^2 dz}、$$

$$G = \varepsilon^{-4} \rho_2 C_n^2 \phi_{nz}(0) h(x) / \int \rho C_n^2 \phi_{nz}^2 dz。$$

尚、 \int は 0 から D までの積分を表す。

$$-\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dz} = \text{一定で、かつ、ブシネスク近似 (被積分関数中}$$

で $\rho = \text{一定})$ が成立する場合には、 $\phi_n = \sin(n\pi z/D)$

となり、2 次の非線形項 $A A_x$ の係数 $a_1 = 0$ 。従って、少な

くとも 3 次の非線形項 $A^2 A_x$ まで考慮しないと共鳴による解

の発散が回避できない (実は、3 次の項まで取り込んでも解

の発散は回避できない。従って、もっと高次の非線形方程式となる)。本研究では、 a_1 が消えない設定の殆ど二層流体の場合と、上述の $a_1 = 0$ となる場合 (ブシネスク流体) の両者の場合を計算する。

3. 数値計算法

計算は差分法により行い、下層境界付近 (物体の形状を捉えるため) と密度界面付近 (二層流体の場合、内部重力波の発生に伴い水平速度のシアーができる部分) の格子を鉛直方向には細かくとる (全体では水平方向 650 × 鉛直方向 100 の格子点)。用いた方程式系は、ブシネスク近似を使わない場合、

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - g \mathbf{z} + \frac{\mu}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \rho = 0,$$

$$\text{div } \mathbf{v} = 0.$$

境界条件は、物体表面で、free-slip条件、

$$\text{上流境界で } \mathbf{v} = (U, 0), \rho = \rho,$$

$$\text{上側境界で } w = 0, \rho = \rho_1,$$

$$\text{下流境界で } \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0.$$

初期条件は、全領域で $\mathbf{v} = (U, 0)$, $\rho = \rho$ である。

尚、レイノルズ数 : $Re \equiv 2 \rho_2 U h_{max} / \mu = 100$ 、

フルード数 : $F \equiv U / C_1$ 、

$h(x) = h_{max} \operatorname{sech}^2(0.4x / h_{max})$ である。

ブシネスク流体の場合には、ブシネスク近似の方程式を用いる。

殆ど二層流体の場合の密度分布は、

$$\rho(z) = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) + \frac{1}{2}(\rho_1 - \rho_2) \tanh [q(z - d_2)]$$

以下では、具体的には、 $\rho_1 = 0.9 \rho_0$, $\rho_2 = 1.0 \rho_0$ 、

$q = 50 / D$, $h_{max} = D / 10$, $d_1 = 0.7 D$, $d_2 = 0.3 D$

の場合を計算する。この時、 $a_1 = 3.0 D^{-1}$ 、 $a_2 = 25.8$

D^{-2} である。ブシネスク流体では、 $d\rho / dz = \text{一定} (< 0)$

の場合を計算する。

4. 結果

$U \neq C_1$ の場合の計算も行ったが、以下では、 $U = C_1$ の場合の結果のみ示す。図2は、殆ど二層流体の場合 ($a_1 \neq 0$) の一様流 U からのずれを表す流れ関数 ϕ の時間発展である。フルード数 $F = 1$ ($U = C_1$) であるから線形解は発散するが、非線形効果により、内部重力波が時間と共に物体上流へ伝播

する。図3は、図2に対応する振幅Aの時間発展である。上流 ($x < 0$) の孤立波が $A > 0$ であるのに対応し、下流 ($x > 0$) には $A < 0$ の領域ができ (保存則)、さらに下流にクノイダル波が発生する。尚、流体の深さと水平波長の比: $\varepsilon = D / L = 0.25$ 程度であることがわかる。また、 $\varepsilon^2 A = 0.08 D$ 程度であることから、3次と2次の非線形項の比: $\varepsilon^2 a_2 A^2 A_x / a_1 A A_x \approx 0.7$ である。従って、3次以上の非線形項の効果も考慮する必要がある (図5も参照)。図4から、波の振幅 (物体の高さ) が大きいほど伝播速度が速いことから、非線形性が本質的であることがわかる。図5は、計算結果のデータから f K d V 方程式の各項の大きさを計算したものである。これから、既に述べたように、2次の非線形項が消えない場合でも3次の非線形項まで考慮する必要がある、かつ3次まででかなりよい近似になっていることがわかる。これは、過去の水槽実験⁹⁾と一致する。しかし、図3に示したように、時間発展の初期には、3次の非線形項まで取り入れた f K d V 方程式の数値解と Navier-Stokes 方程式の数値解は波形の上でもかなり一致しているが、時間が経つにつれて差異がでてくる。Navier-Stokes 方程式の数値解では上流の孤立波に振動が見られるのに対し、3次の非線形項まで取り入れた f K d V 方程式の数値解⁹⁾では台形型 (水平

な)の解¹⁰⁾しか現れない。これは主として、無視した高次の非線形項の効果であると考えられる(図5の一番下のグラフの0からのずれに対応するもの)が、密度界面に生じるシアーによる境界層内での散逸も影響していると考えられる。一方、水面波の場合⁹⁾には、 $a/D \approx 0.4 \sim 0.6$ という大きな振幅で実験が行われているにも関わらず、2次の非線形項だけを考慮したf K d V方程式とかなりよい一致が得られている。これは、水面波の場合、 $a_2/a_1 (= 0.25 D^{-1})$ が今回計算した成層流の場合 $a_2/a_1 (= 8.6 D^{-1})$ (実験9)の場合も同程度)に比べてかなり小さい為、 $\varepsilon^2 A$ が大きくとも、3次と2次の非線形項の比： $\varepsilon^2 a_2 A^2 A_x / a_1 A A_x$ は小さくなっているためと考えられる。従って、成層流の場合でも、 a_2/a_1 が小さくなるような鉛直密度分布の場合には、2次の非線形項だけを考慮したf K d V方程式でよい可能性がある。図6には、ブシネスク流体で、 $U = C_1$ の場合の結果を示した。これから、2次の非線形項が消える($a_1 = 0$)場合には、上流への非線形波の伝播は、起こり得るとしても非常に速度が遅く $U t / h_{max} = 3000$ 程度の時間では現れないことがわかる。下流側は、波長がだんだん長くなるような時間発展をしているが、上流側は殆ど変化がない。

参考文献

- 1) T. B. Benjamin, J. Fluid Mech. 40, 49-70 (1970).
- 2) M. E. McIntyre, J. Fluid Mech, 52, 209-243 (1972).
- 3) P. G. Baines, J. Fluid Mech, 82, 147-159 (1977).
- 4) P. G. Baines, Tellus, 31, 351-371 (1979).
- 5) T. Y. Wu, J. Eng. Mech. Div ASCE 107, 501-522 (1981)
- 6) T. R. Akylas, J. Fluid Mech, 141, 455-466 (1984)
- 7) C. Katsis & T. R. Akylas, J. fluid Mech, 177, 49-65 (1987)
- 8) R. H. J. Grimshaw, J. Fluid Mech, 169, 429-464 (1986)
- 9) S. J. Lee, G. T. Yates & T. Y. Wu, J. Fluid Mech, 199, 569-593
(1989)
- 10) W. K. Melville & K. R. Helfrich, J. Fluid Mech. 178, 31-52
(1987)

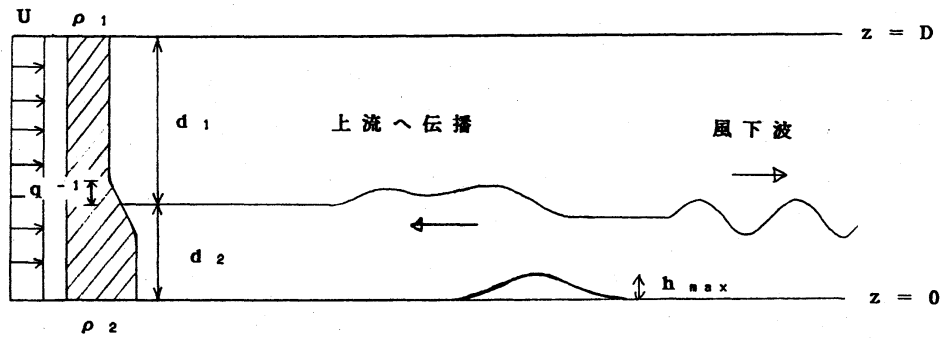


図1 流れの概念図

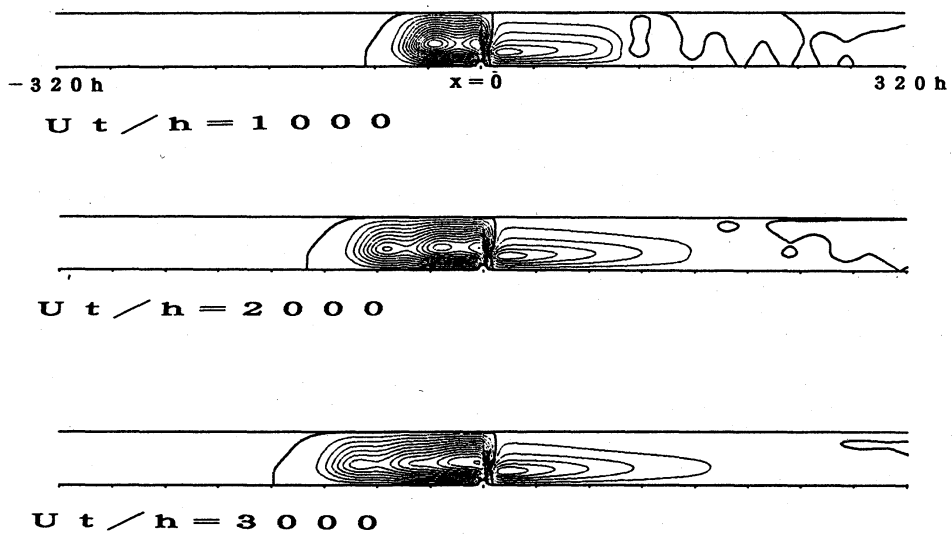


図2 殆ど二層流体の場合の一様流からのずれを表す流線
($F=1.0, \gamma D=50, h/D=0.1$)

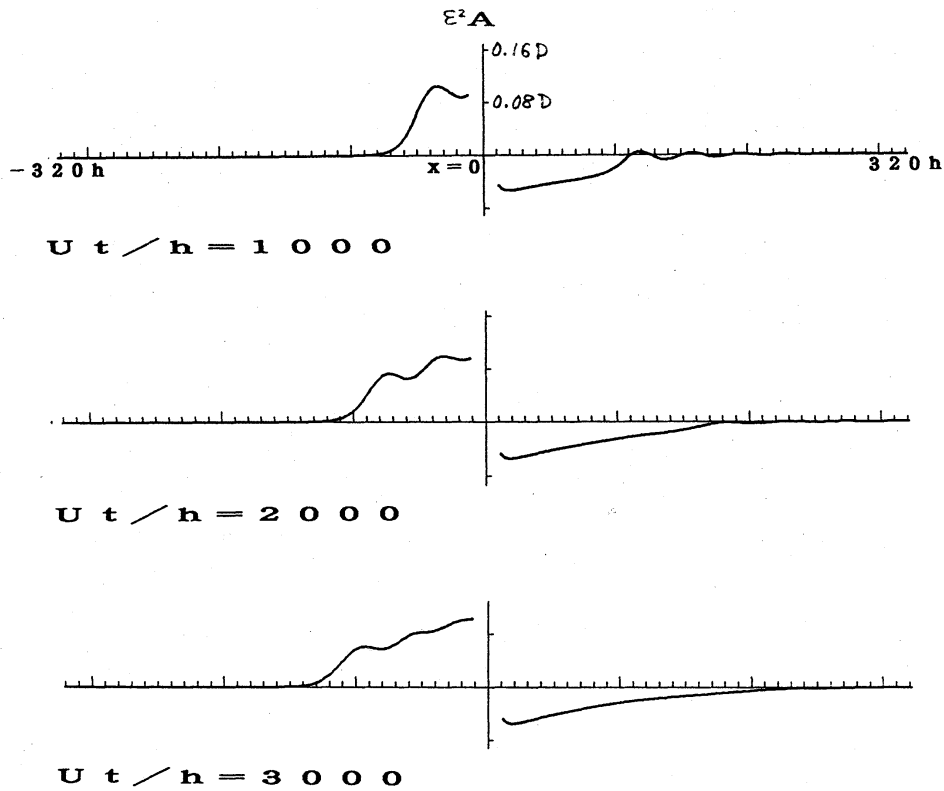


図 3 殆ど二層流体の場合の振幅 A の時間発展

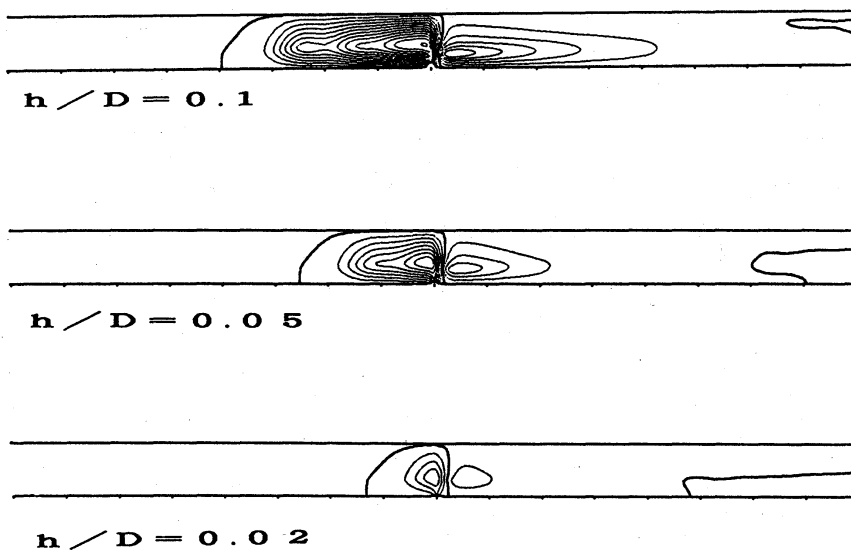


図 4 殆ど二層流体の場合の振幅による伝播速度の違い

($F=1.0, \varphi D=50, U t / h=3000$)

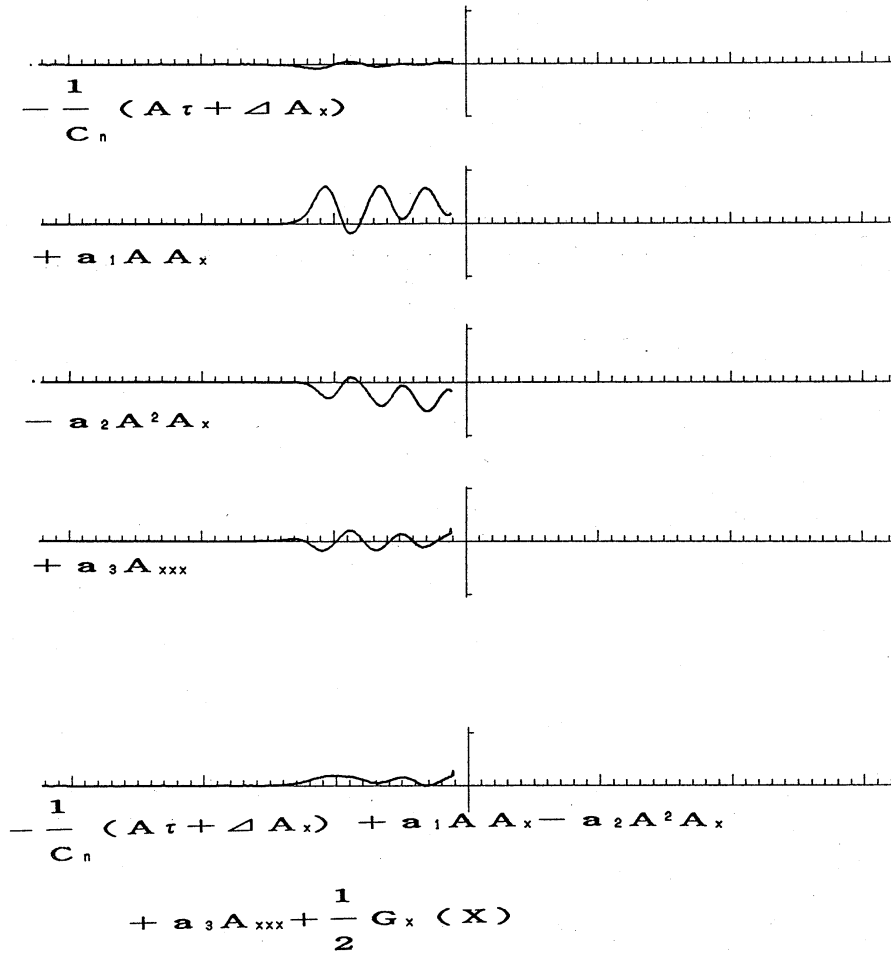


図5 殆ど二層流体の場合の f K d V 方程式の各項の評価

($qD=50, h/D=0.1, Ut/h=3000$)

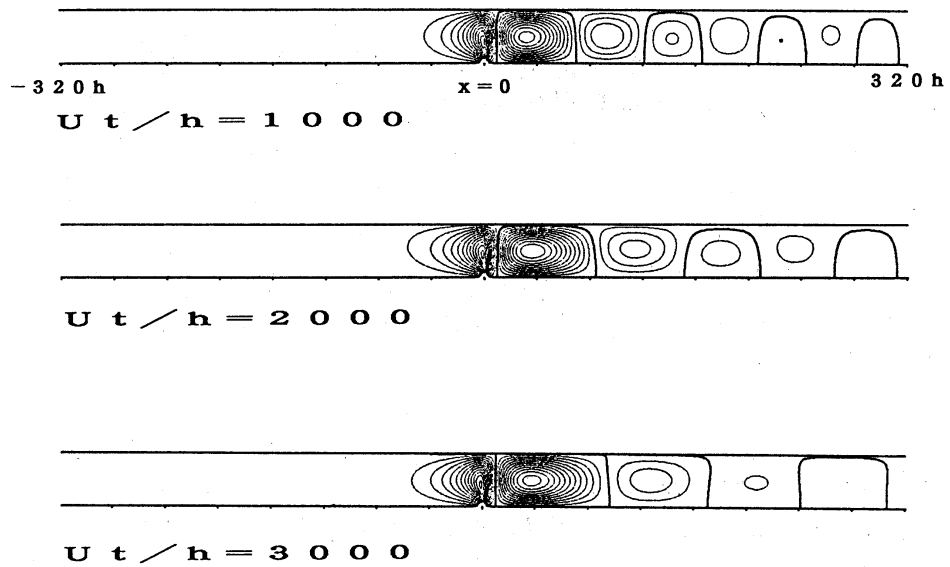


図6 ブシネスク流体 (2次の非線形項 = 0) の場合の時間発展