

斜面上の密度界面孤立波の数値解析

— 表面・界面を持つ流体の数値解析法 —

北大工 水田 洋 ( Yo Mizuta )

1. はじめに

河川や海洋など，自然界の流体中に見られる波や渦などは，それらが非線形現象であることが推察できても，理論的な予測との比較が困難であることが多い．現象の全貌を把握できる観測手段が限られ，また現象の多くが一過性であることにも原因があるが，かりに膨大なデータの中から意味のある部分が拾えても，実際の現象は様々な要因の影響を受け，また理論的に理想化された状態同士の間位置している．

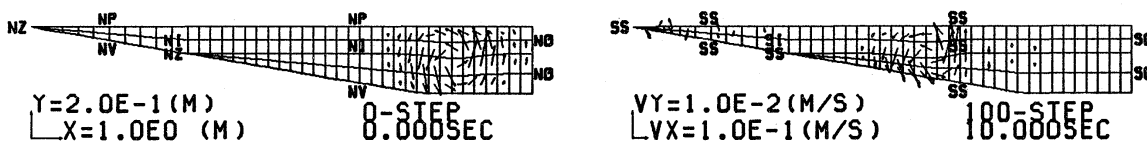


図1. 斜面上に入射する密度界面孤立波

計算機による数値解析は，一過性の実際の現象の全貌をも再現して最適な観測条件を見いだす手引となるが，他方では，例えば計算式の対流流束項，圧力勾配項，粘性項を変更して非線型性，分散性，散逸性の効果を調べ，理論的な予測と関係づけることも可能である．しかし一般に，自然界の流体は，形が複雑だったり，移動したり，複雑な境界条件を持つ境界で囲まれている．例えば，ここに取り上げる密度界面孤立波の問題では，図1に示すように，自由表面・密度界面・一層領域・二層領域などが現れ，数値解析上，複雑な形状の領域と，多種類の境界（2文字の英字は4節で説明する境界条件の種

類)を扱うことが避けられない。このような流体も含めて汎用的な数値解析を可能とするため、以下に述べる「変形可能セル法」と「一般化された境界条件」を用いることにした [1, 2]。

## 2. 変形可能セル法

流体の数値解析には、流体力学方程式の微分を差分で置き換えた数値解析式を用いることが多い。矩形領域の内部を規則的な格子で分けるときはこれでもよいが、図1のように解析領域の形が複雑ならば、MAC法のように境界での内挿・外挿に工夫を凝らすより、解析領域を境界に合った形の変形可能なセル(小胞)に分け、流体力学方程式を導くもとなつた積分型の保存則を適用する方が合理的である。

これは、コントロール・ボリューム法や有限要素法に近い考え方である。ここでは、流体の厚みの変化を考慮した、一般四角形のセルを用いる。

図2のセルA, B, C, Dにそのセルが含む流体の質量 $M$ ・運動量 $Mv$ を割り当てる。時間ステップ $n+1$ におけるこれらの量は、次のような保存則を用いて、時間 $\Delta t$ だけ前のステップの量から求められる。

$$M^{n+1} = M^n + \left[ \oint dS \cdot (u-v)\rho \right]^n \Delta t + (\text{拡散項})^n \Delta t, \quad (1)$$

$$(Mv)^{(n)} = (Mv)^n + \left[ \oint dS \cdot (u-v)\rho v \right]^n \Delta t + [(\text{粘性項}) + (\text{重力項})]^n \Delta t, \quad (2)$$

$$(Mv)^{n+1} = (Mv)^{(n)} - \left( \oint dSp \right)^{n+1} \Delta t. \quad (3)$$

ここで $\rho, v$ は流体の密度と速度である。 $u$ は格子点の移動速度で、これにより、新しい格子点の位置が $r^{n+1} = r^n + u\Delta t$ のように求められる。 $u$ は任意の方法で決めてよく、例えば格子点を、水平方向には制御しながら鉛直方向には流体に追従させて動かす、として構わないが、 $u$ と $v$ が異なる効果は、 $u-v$ を含む対流流束項によって取り込んでおく。この項は、 $\Delta t$ の間に隣り合うセル同

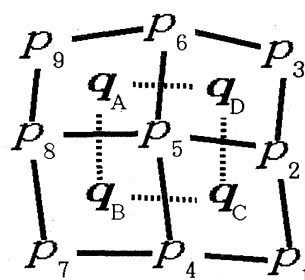


図2. 領域内の体積保存則適用領域(破線)

士で実質的にやり取りされる領域に含まれる保存量の大きさ，と解釈して評価できる。

表面積分  $\oint dS$  は，セルの側面（紙面に垂直）および上面・下面（紙面に平行に近い）から成る。側面積分は，流体の厚さ，側面内の微小変位ベクトルの紙面内成分，紙面に垂直な単位ベクトルを  $b, dr, z$  としして線積分  $\oint bdr \times z$  で置き換える。一方上面・下面積分は，上面・下面で  $u=v=0$  とおける対流流束項では 0 となる。

非圧縮性流体の圧力  $p$  は，新しい流速を式 (3) に従って求めたとき，体積保存則が満たされているように決める。これを満たす格子点上の圧力は，「圧力方程式」(6) の解である。この方程式は，図 2 の格子点 5 を囲む破線領域における体積保存則 (5) に，式 (3) と等価な式 (4) を代入すれば導かれる。

$$q_{A, B, C, D}^{n+1} = q_{A, B, C, D}^{(n)} - f_{A, B, C, D}^{n+1} \Delta t, \quad (4)$$

$$q^{n+1} \equiv \left[ \frac{b}{M} (Mv) \right]^{n+1}, \quad q^{(n)} \equiv \left( \frac{b}{M} \right)^{n+1} (Mv)^{(n)},$$

$$f_C \equiv \left( \frac{b}{M} \oint dSp \right)_C = \left( \frac{b^2}{2M} \right)_C \begin{bmatrix} p_5 r_{24} & + p_2 r_{15} \\ + p_4 r_{51} & + p_1 r_{42} \end{bmatrix} \times z.$$

$$0 = \left( \oint dS \cdot v \right)^{n+1} = \left( \oint q \times dr \right)^{n+1} \cdot z = \Delta V(\{q^{n+1}\}) \quad (5)$$

$$= \Delta V(\{q^{(n)}\}) - \Delta V(\{f^{n+1}\}) \Delta t, \quad (6)$$

$$\Delta V(\{q\}) \equiv \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_A \times r_{DB} + q_D \times r_{CA} \\ + q_B \times r_{AC} + q_C \times r_{BD} \end{bmatrix} \cdot z,$$

$$\Delta V(\{f\}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} f_A \times r_{DB} + f_D \times r_{CA} \\ + f_B \times r_{AC} + f_C \times r_{BD} \end{bmatrix} \cdot z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_9 p_9 + A_6 p_6 + A_3 p_3 \\ + A_8 p_8 + A_5 p_5 + A_2 p_2 \\ + A_7 p_7 + A_4 p_4 + A_1 p_1 \end{bmatrix}.$$

ここで積分流速  $q = bv$  を導入し，また点 2 から 4 への変位ベクトルを  $r_{24}$  のように表した。式 (4) の圧力項  $f$  は，流体の厚さが変化しないときのセル C のものである。厚さに変化があればもう少し複雑な表式が必要になるが， $p_{1, 2, 4, 5}$  の線型結合という基本構造は変わらない。また (5) も  $q_{A, B, C, D}$  の線型結合なので，

(6)の右辺第2項を圧力について整理すれば $p_{1-9}$ の線型結合となる。第1項は既知量であるから、結局圧力方程式は、 $p_{1-9}$ の線型方程式である。係数 $A_{1-9}$ は変位ベクトルと厚さだけから構成され、任意パラメーターは含まない。この圧力方程式は圧力のPoisson方程式の差分式に相当するが、体積保存則とは独立にPoisson方程式の差分式を導く場合と違い、各々の体積保存則適用領域(図2の破線領域)で、体積保存則が厳密に満足される。またこの領域は格子点と一対一に対応しているため、方程式(6)と未知量としての圧力の個数は常に一致している。圧力方程式と後述の境界方程式を連立させて解くに当たっては各種の直接解法、反復解法を利用できるが、ここでは、直接解法の一つであるEVP法を使っている[3]。

### 3. 一般化された境界条件

ここで取り上げる問題では、図1からわかるとおり、多種類の境界条件が使われることになる。境界条件を一般化して扱えば、個別に対応する場合と較べ、定式化、プログラム作成の労力を減らすことができ、結果の信頼性も向上する。

境界では、境界条件と同時に、体積保存則が満たされることが必要である。以下では、図3の矢印右側の破線領域で体積保存則を考えるが、境界が密度界面の

ときは、さらに矢印左側の領域も考慮する。境界の法線および接線単位ベクトルを $n, s$ 、法線流速と接線流速を $q_n, q_s$ とすれば、境界上の点Aにおける積分流速は $q = q_n n + q_s s$ と表される。 $q_s$ は、既知であることも内側の流速に依存して未知であることもあるが、いずれにせよ大抵は、式(7)1行目のように、内側の流速 $q_{D,E}$ に関する一次式から求める形になる。ところで $q_{D,E}$ は圧力項を

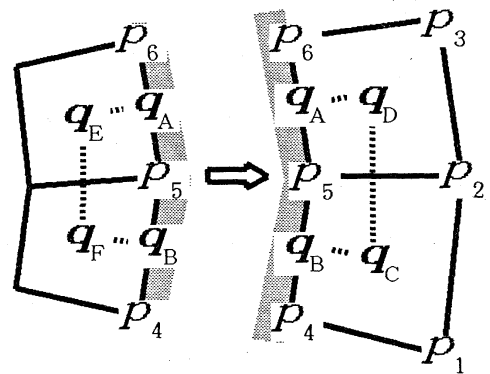


図3. 境界上の体積保存則適用領域(右の破線)、左の破線は密度界面に限る

式(4)のように含むため、 $q_s$  もやはり、式(7) 2行目のように  $f_{D,E}$  に依存する。

$$\begin{aligned}(q_s)_A^{n+1} &= (q_s)_A^{(n)} + (K_s)_A \cdot q_D^{n+1} + (K'_s)_A \cdot q_E^{n+1} \equiv C_s(q_D^{n+1}, q_E^{n+1}) \\ &= (q_s)_A^{(n)} - (K_s)_A \cdot f_D^{n+1} \Delta t - (K'_s)_A \cdot f_E^{n+1} \Delta t, \\ (q_s)_A^{(n)} &\equiv C_s(q_D^{(n)}, q_E^{(n)}).\end{aligned}\tag{7}$$

境界条件関数  $C_s(Q_D, Q_E)$  と圧力項係数  $K_s, K'_s$  の具体的な形は、境界の種類毎に後ほど表1にまとめる。なおここでは、 $(q_s)_A$  と  $q_{D,E}$  の関係について述べたが、 $(q_s)_B$  と  $q_{C,F}$  の間にももちろん同様の関係がある。

体積保存則(5)は、境界上の法線流速、接線流速によって式(8)のように書き換えられる。さらにこれに式(7)と(4)を代入して、「一般化された境界方程式」(9)が得られる。

$$0 = \Delta V(\{q^{n+1}\}) = \Delta V_B(\{q^{n+1}\}) + (q_n \Delta S)_5^{n+1} \tag{8}$$

$$= \Delta V_B(\{q^{(n)}\}) + (q_n \Delta S)_5^{n+1} - \Delta V_B(\{f^{n+1}\}) \Delta t, \tag{9}$$

$$\Delta V_B(\{q\}) \equiv \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} -(q_s \Delta n)_A + (q_D \times r_{CA}) \cdot z \\ + (q_s \Delta n)_B + (q_C \times r_{BD}) \cdot z \end{array} \right], \quad (q_n \Delta S)_5 \equiv \frac{(q_n \Delta S)_A + (q_n \Delta S)_B}{2},$$

$$\Delta V_B(\{f\}) = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} -(K'_s \Delta n)_A \cdot f_E + \{-(K_s \Delta n)_A + r_{CA} \times z\} \cdot f_D \\ + (K'_s \Delta n)_B \cdot f_F + \{(K_s \Delta n)_B + r_{BD} \times z\} \cdot f_C \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[ \begin{array}{l} A_6 p_6 + A_3 p_3 \\ + A_5 p_5 + A_2 p_2 \\ + A_4 p_4 + A_1 p_1 \end{array} \right],$$

$$\Delta S_A \equiv S_A \cdot r_{DB}, \quad \Delta n_A \equiv n_A \cdot r_{DB}, \quad \Delta S_B \equiv S_B \cdot r_{AC}, \quad \Delta n_B \equiv -n_B \cdot r_{AC}, \quad \Delta S_5 \equiv (\Delta S_A + \Delta S_B) / 2.$$

密度界面以外の境界では、式(9)の右辺第3項に含まれる圧力項は  $f_{D,C}$  だけなので、圧力について整理すれば、この項は  $p_{1-6}$  の線型結合である。したがって境界方程式は、第2項の  $(q_n)_5^{n+1}$  と第3項の  $p_{1-6}$  を未知量とする方程式である。境界方程式の扱いは境界毎に異なるものの、それ自身は共通に用いられ、圧力方程式と連立させて解かれる。密度界面では、式(9)の右辺第3項が向い側の領域の  $f_{E,F}$  も含む場合もあるが、向い側の境界方程式と組み合わせて  $f_{D,C}$  と  $f_{E,F}$  を分離できるため、この場合の境界方程式も  $p_{1-6}$  だけを含むものとして扱える(係数  $A_{1-6}$  と非斉次項の中味は当然違ってくる)。

#### 4. 各境界条件の扱い方

流速の境界条件は，法線および接線条件を各境界に一つずつ与えることができる。境界条件の種類は，図1に記入されたような2文字の英字で示される。最初の英字N，Sは，法線および接線条件である。次の英字は主に，流速 (Velocity) と圧力 (Pressure) または応力 (Stress) のいずれを既知とするかを示しているが，界面 (Interface)，長さ0 (Zero)，開いた境界 (Open) も含まれている。

法線条件は次のように扱う。(NV)  $q_n$  を既知として圧力方程式と境界方程式を解き， $p_{4-6}$  を求める (壁，流入境界)。(NP) 圧力方程式を解く時は  $p_{4-6}$  を既知とし， $q_{D,C}$  と  $(q_s)_{A,B}$  が決まってから，式(8)から  $q_n$  を求める (自由表面，流出境界)。(NI) 対になる図3矢印左側の領域との間で  $p_{4-6}$  と  $q_n$  の連続条件を仮定し，圧力方程式を解く際に圧力と同時に  $q_n$  を求める (密度界面，一層・二層領域接続面)。(NZ) 計算領域の境界上にある複数の頂点と圧力は，物理領域では全て同一のものである。境界上の境界方程式の総和をとって未知量と方程式の数をあわせ，圧力方程式と連立させる (上・下層流体先端部)。(NO)  $q_n$  などの物理量  $F$  が開いた境界の内から外へ出て行く振舞いは， $F$  の勾配単位ベクトルを  $k$ ，波速 (情報伝達速度) を  $c$ ，境界上の点の位置を  $r$  とし， $F^{n+1} = F(k \cdot r, t + \Delta t) = F(k \cdot (r - c \Delta t), t)$  と表される。これは， $\Delta t$  が小さいとして Taylor 展開すると，Sommerfeld の放射条件に帰着する。 $F(X, t) = AX^2 + BX + C$  と仮定したときの  $A, B, C$  および  $k \cdot c \Delta t$  の値を時刻  $t, t - \Delta t$  における  $F$  の値から決めることにすれば， $F^{n+1}$  は  $t + \Delta t$  における内部の量には依存しなくなるため，(NV) と同等の扱いができる。

接線条件には以下のものがある。これらの境界条件関数と圧力項係数を表1にまとめる。(SV)  $q_s$  が既知 (滑りなし)。(SS) 接線応力  $\sigma_s = \mu \partial(q_s/b) / \partial n$  ( $\mu$ : 粘性応力， $\partial/\partial n$ : 法線微分) を既知として， $q_s$  を求める (滑り・風応力あり)。(SI)  $q_s$  を，密度界面で滑りがあって不連続とは仮定せず，相接する流体内の流速の内挿から  $q_s = s_A \cdot (\tau_{AB} q_D + \tau_{DA} q_B) / \tau_{DE}$  ( $\tau_{DE}$  な

どは各点間の距離)のように求める。  $q_s$  は連続となり、その法線方向の勾配から計算した接線応力を、セルの運動量に加える(密度界面、一層・二層領域接続面)。(SO)(NO)に準じて  $q_s$  を決め、以後は(SV)と同様に扱う。

表1. 各種境界条件の境界条件関数と圧力項係数

境界条件	境界条件関数 $C_s(Q_D, Q_E)$	圧力項係数 $(K_s)_A$	圧力項係数 $(K'_s)_A$
SV	$q_s$	0	0
SS	$\left(\frac{b\sigma_s \Delta n}{\mu}\right)_A + \frac{b_A}{b_D} S_A \cdot Q_D$	$\frac{b_A}{b_D} S_A$	0
SI	$S_A \cdot \frac{r_{AE} Q_D + r_{DA} Q_E}{r_{DE}}$	$\frac{r_{AE}}{r_{DE}} S_A$	$\frac{r_{DA}}{r_{DE}} S_A$
SO	$q_s(k \cdot (r_A - c \Delta t), t)$	0	0

### 5. 斜面上の密度界面孤立波

図1のような領域で、臨界厚より沖側から左向きに、斜面へ入射してくる密度界面孤立波を考える。沖合での上層厚  $h_1=0.2\text{m}$  と下層厚  $h_2=0.3\text{m}$ ，上層密度  $\rho_1=1.0\text{g/cm}^3$  と下層密度  $\rho_2=1.2\text{g/cm}^3$ ，下層厚に対する斜面長  $L=7.5\text{m}$  は以下の各ケースで固定されている。全長  $16.0\text{m}$  の領域は一層領域と二層領域とから成り、数値解析の際、水平方向にそれぞれ10個および30個の小区間に分割する。小区間の平均幅は  $0.4\text{m}$  で、時間ステップの刻み幅を  $\Delta t=0.1\text{s}$  と選べば、表面波(fast mode)の線型長波波速  $c_s=2.21\text{m/s}$  による CFL 条件は満たされる。流速の鉛直分布が求められるように、上層と下層はそれぞれ鉛直方向にも分けられている。これにより、原理的には分散効果も取り込まれる。

初期条件としては、界面に孤立波型の変位  $\eta_1(x)$  を加えると共に、上層および下層の、高さ  $y$  にあるセルに

$$(u, v) = -\frac{c_i}{h_s - h_i} \left( -\eta_i, -(h_s - y) \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right), \quad (\text{上層}) \quad (10.1)$$

$$(u, v) = -\frac{c_i}{h_i - h_b} \left( \eta_i, -(y - h_b) \frac{\partial \eta_i}{\partial x} \right) \quad (\text{下層}) \quad (10.2)$$

のように流速  $(u, v)$  を与える。ただし、 $h_s, h_i, h_b$  は表面・界面・底面の高さ、 $c_i$  は界面波の波速である。これは線型長波理論によるが、孤立波の初期波形を崩さず岸向きにだけ伝播させるには充分であった。

格子点の水平方向の動きは、上層および下層の先端が水平方向に移動しても、小区間が一層および二層領域を常に等分しているように決める。また鉛直方向には、最初に表面・界面・底面にあった格子点は、その後もこれらの境界上にあるように、流体に完全に追従させて動かす。

二層流体の密度界面上では、下層厚が上層厚より厚ければ下に凸の孤立波が、逆の場合は上に凸の孤立波が安定に伝播することが知られている [4]。これは水路床が水平な場合の結論であるが、Helfrichらは、斜面を遡るにつれて下層厚が上層厚に較べ大から小に転じるときの孤立波の振舞いを、3次の非線型項も含んだ「拡張された K-d V 方程式」と水槽実験によって調べた。孤立波の波高と波長を  $a, \lambda$  として  $\lambda/L$  が  $a/(h_1+h_2)$  に較べて小さいとき、極性の反転した孤立波が生じることが方程式の数値解では示されたが [5]、このような界面孤立波は粘性や拡散の影響を大きく受けて減衰しやすいため、水槽実験では確認されていない [6]。また高次の非線型性や分散性がこの現象を覆い隠す可能性もある。

孤立波の波高と波長を  $a = -0.01\text{m}$ ,  $\lambda = 1.83\text{m}$  (CASE 1) および  $a = -0.04\text{m}$ ,  $\lambda = 0.92\text{m}$  (CASE 2) とした数値解析の結果を比較する。これらの界面孤立波 (slow mode) の水平な水路床における波速は、[4] を用いて  $c_i = 0.46\text{m/s}$  および  $c_i = 0.47\text{m/s}$  と計算される。図4は、斜面上の各点 ( $x$  は斜面の下端からの水平距離) における界面変位の時間変化、図5は各時刻における自由表面および密度界面の形状である。CASE 1では、伝播と共に先行波の波高が増加し、後端の傾斜は前端より急になるものの、臨界厚の位置



$x/L=0.33$ を過ぎても下層先端近くまで，先行波の後ろに随伴波は現れてこない．それに対しCASE 2では，臨界厚の位置を過ぎると随伴波が現れ，先端に至る間に成長する．これは極性の反転した孤立波ではないが，もっと波高が大きく波長の短い孤立波を入射すれば，極性の反転した孤立波になることが予想される．数値解析によって界面での粘性・拡散を制御しつつこのことを

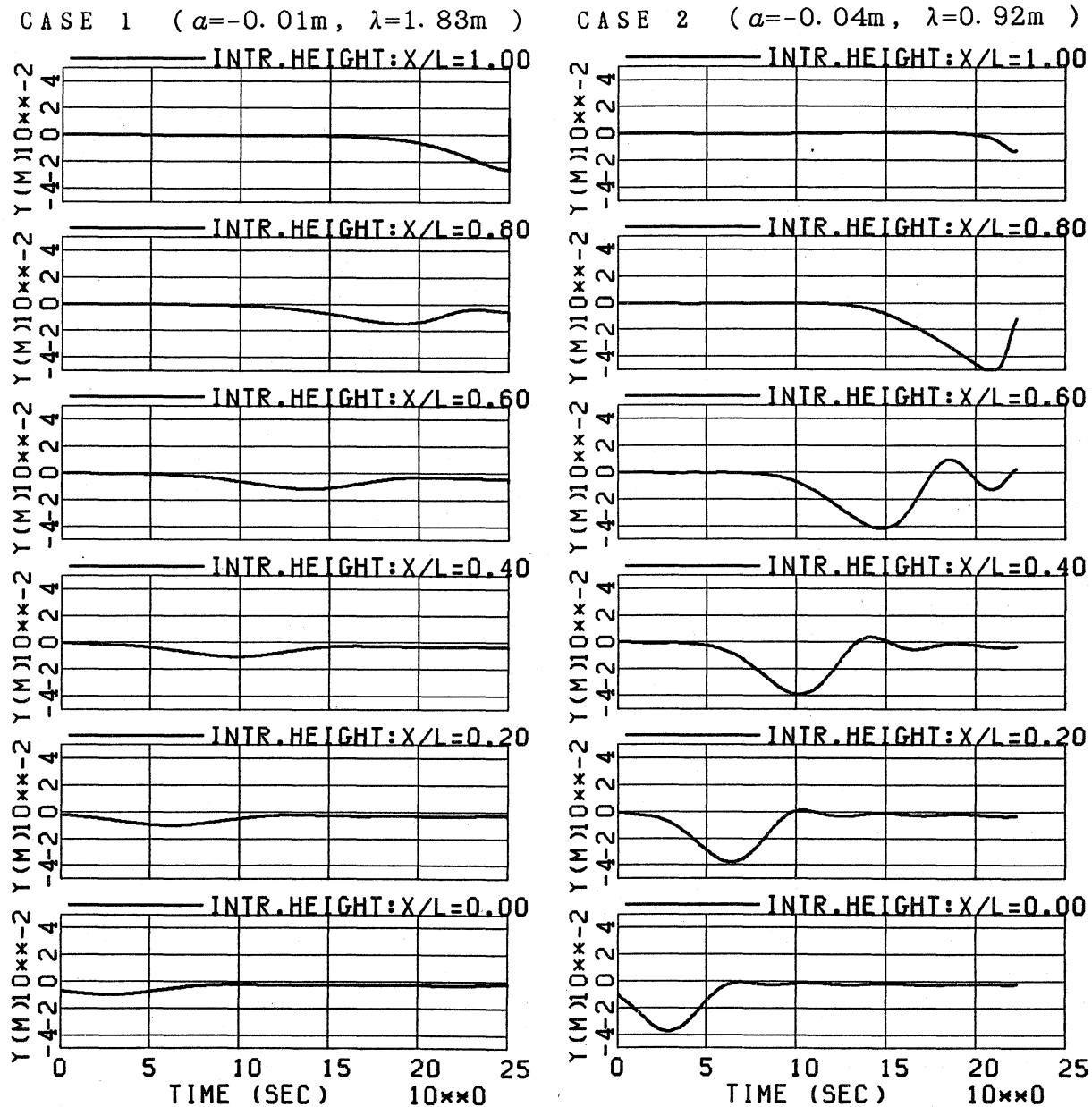


図4. 界面変位の時間変化

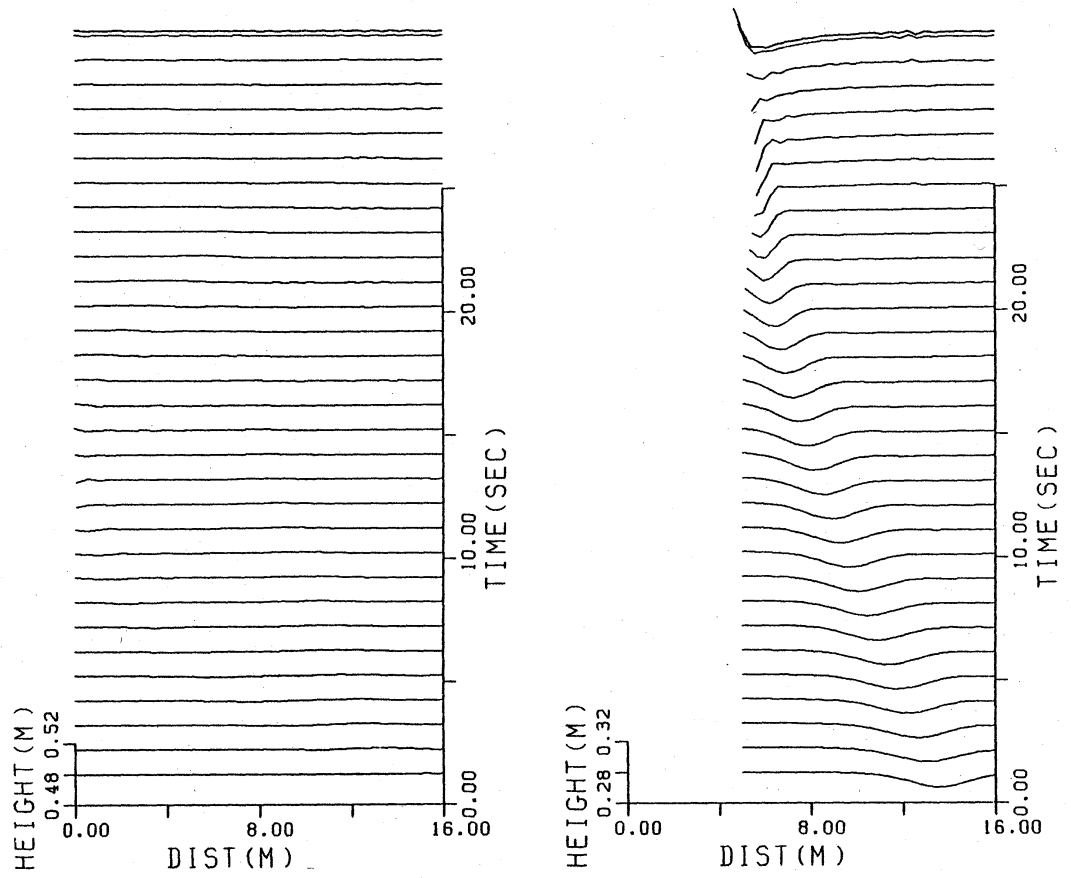
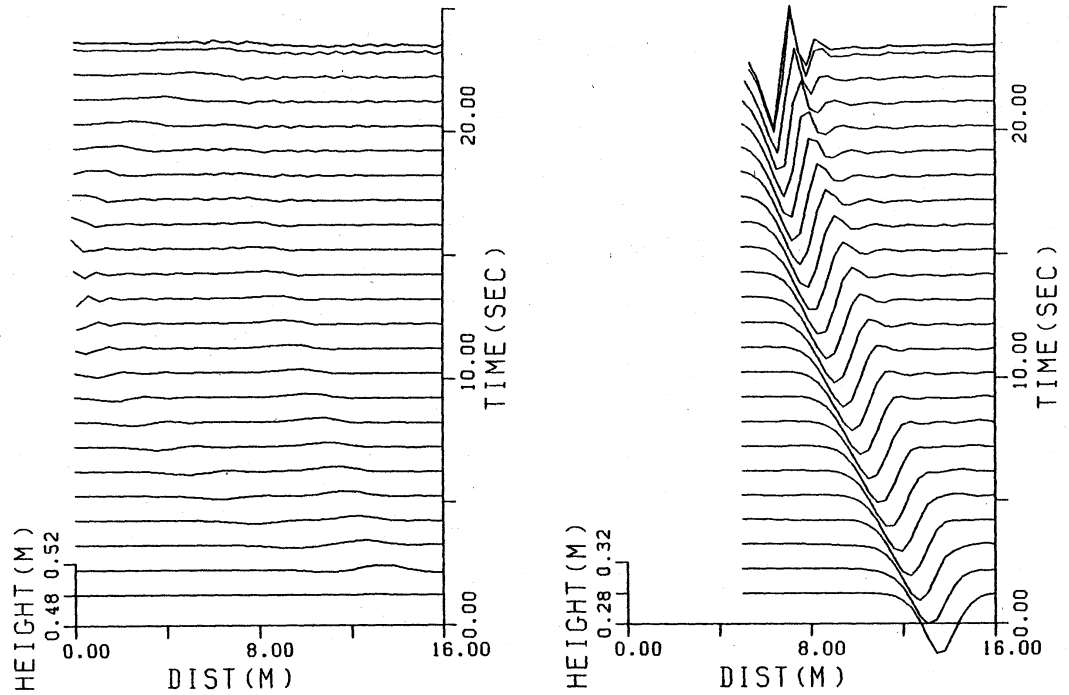
CASE 1 ( $a=-0.01\text{m}$ ,  $\lambda=1.83\text{m}$ )CASE 2 ( $a=-0.04\text{m}$ ,  $\lambda=0.92\text{m}$ )

図5. 自由表面 (左) および密度界面 (右) の形状変化

確かめるのは可能であるが，より高い空間精度とより長い伝播距離が必要である。

ここでは地形が一様勾配の場合の結果を紹介したが，Helfrichらと同様に斜面から陸棚が続く場合の数値解析も行い，水槽実験 [6] とほぼ同様の結果が得られたことを付記しておく。

## 6. おわりに

ここでは「変形可能セル法」と「一般化された境界条件」を用いた数値解析法と，それによる斜面上の密度界面孤立波の数値解析例を紹介した。数値解析には空間・時間の離散化に伴う特有の誤差があるが，これに注意して，充分検証された数値解析を副次的な効果を制御できる実験として用いれば，理論的なモデルの有効範囲を確かめたり，改良点を見いだす上で有用であろう。

## 参 考 文 献

- 1) 水田 洋，"数値流体解析における境界条件の統一的な取扱いについて"，水工学論文集第34巻（土木学会），pp.641-646（1990）。
- 2) Y.Mizuta, "Generalized Boundary Conditions on the Basis of a Deformable-Cell Method --Free Surfaces, Density Interfaces and Open Boundaries--", Proc. Int. Symp. on Computational Fluid Dynamics-Nagoya, pp.1001-1006（1989）。
- 3) P.J.Roache, "Computational Fluid Dynamics", Hermosa Pub. Inc., Albuquerque, New Mexico（1976）  
（コンピュータによる流体力学（上）（下），高橋亮一他訳，構造計画研究所，東京，p.191（1978））。
- 4) T.Kakutani and N.Yamasaki, "Solitary Waves on a Two-Layer Fluid", J. Phys. Soc. Japan, Vol.45, pp.674-679（1978）。

- 5) K.R.Helfrich, W.K.Melville and J.W.Miles, "On Interfacial Solitary Waves over Slowly Varying Topography", J. Fluid Mech., Vol.149, pp.305-317 (1984).
- 6) W.K.Melville and K.R.Helfrich, "Transcritical Two-Layer Flow over Topography", J. Fluid Mech., Vol.178, pp.31-52 (1987).