数理解析研究所講究録
第741巻 1991年 31-42

On Non-cooperative and Cooperative Dynkin's Stopping Problem

九州工業大学 工学部　大坪義夫（Yoshio Ohtsubo）

§0. 序

ゲーム論的な最適停止問題（いわゆる，Dynkin 問題）は、最初に零和型として Dynkin[4]によって導入・研究され、多くの研究者によって発展されている。また、非協力型へと拡張されている。

この報告では、§1で非協力型 Dynkin 問題を考え、均衡点の存在条件として単調性を与える。§2では協力型を定式化し、パレート最適な均衡点の存在を与え、最適値の性質等を述べる。

非協力型・協力型の両方を通して用いる記号等は、以下のとおりである：$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間、$(\mathcal{F}_n)_{n\in N}$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ-field の非減少列とし、Γ_n を $\tau \geqq n$ をみたす $(\mathcal{F}_n)$-停止時間 τ の全体とし、$\Gamma_n^2 = \Gamma_n \times \Gamma_n$ とおく。但し、$N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ は時間パラメータ空間である。また、$\mathcal{W}$ を $\sup_n X_n^+$ が可積分で、X_n^- が一様可積分である $(\mathcal{F}_n)$-adapted な確率変数列 $X = (X_n)_{n\in N}$ の全体とする。この報告で考える停止ゲーム（Dynkin 問題）では、プレーヤーは2人であり、各プレーヤーの評価値は、プレーヤーI、IIの戦略として各々 τ, σ をとるとき、

$$g_1(\tau, \sigma) = X_\tau^1 I_{\tau<\sigma} + Y_\sigma^1 I_{\sigma<\tau} + W_\tau^1 I_{\tau=\sigma}, \qquad \text{(player I)}$$

$$g_2(\tau, \sigma) = X_\sigma^2 I_{\sigma<\tau} + Y_\tau^2 I_{\tau<\sigma} + W_\tau^2 I_{\tau=\sigma}, \qquad \text{(player II)}$$

とする。ここで、X^i, Y^i, $W^i \in \mathcal{W}$ (i=1,2)、$(\tau, \sigma) \in \Gamma_n^2$ とし、$W_\infty^i = \limsup_n W_n^i$ (i=1,2) とおく。このとき、i-プレヤー(i=1,2)は

$$G_n^i(\tau_1, \tau_2) = E[g_i(\tau_1, \tau_2) \mid \mathcal{F}_n], \quad (\tau_1, \tau_2) \in \Gamma_n^2, \ n \in N$$

を τ_i に関して最大にしたい。以下、$U \in \mathcal{W}$ に対して、$U_\infty = \limsup_n U_n$ とおく。

§1. 非協力型 Dynkin 問題

この節では、非協力型 Dynkin 問題を考える。このような問題は、Bensoussan-Friedman[2], Morimoto[9,10], Ohtsubo[12], Nagai[11]等で、すでに研究されていて、Y^i に関するマルチンゲール条件のもとで均衡点（一般に陰な）が存在することが証明された。ここでは、X^i に関する単調性のもとで、陽な均衡点の存在を与える。これは、最適停止問題に対する Chow-Robbins[3]の "Monotone case" の拡張である。また、Mamer[8]の結果とは類似であるが本質的に異なる。

この節を通して、次の仮定をする：

仮定. $X_n^i \leqq W_n^i \leqq Y_n^i,\quad i=1,2,\ n\in N.$

定義1.1. $n\in N$ に対して、$(\tau^*,\sigma^*)\in\Gamma_n^2$ かつ

$$G_n^1(\tau^*,\sigma^*) \geqq G_n^1(\tau,\sigma^*),\quad \forall\tau\in\Gamma_n,$$

$$G_n^2(\tau^*,\sigma^*) \geqq G_n^2(\tau^*,\sigma),\quad \forall\sigma\in\Gamma_n,$$

のとき、(τ^*,σ^*) を **n における (Nash) 均衡点**という。

$U\in\mathscr{W}$ に対して、

$$\tau_n(U)=\inf\{k\geqq n \mid U_k=X_k^1\},\quad \sigma_n(U)=\inf\{k\geqq n \mid U_k=X_k^2\},$$

とおく。但し、$\{\ \}=\phi$ のときは $+\infty$ とする。

命題1.1([12]). $\alpha^i\in\mathscr{W}$ $(i=1,2)$ が存在して、

(i)
$$\alpha_n^i=\begin{cases} Y_n^i & \text{if } \alpha_n^j=X_n^j, \\ \max(X_n^i, E[\alpha_{n+1}^i \mid \mathscr{F}_n]) & \text{otherwise}, \end{cases}$$

$$i,j=1,2,\ i\neq j,\ n\in N,$$

(ii) $\alpha_\infty^i=W_\infty^i,\quad i=1,2,$

をみたすならば、各 $n\in N$ に対して、$(\tau_n(\alpha^1),\sigma_n(\alpha^2))$ は n における均衡点である。

そこで、

$$A_n^i = \{X_n^i \geq E[X_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n]\}, \quad i=1,2, \quad n \in N,$$

とおき、

$$\tau_n^*(\omega) = \inf\{k \geq n \mid \omega \in A_k^1\}, \quad \sigma_n^*(\omega) = \inf\{k \geq n \mid \omega \in A_k^2\},$$

$$\gamma_n^i = G_n^i(\tau_n^*, \sigma_n^*), \quad i=1,2,$$

とする。τ_n^*, σ_n^* は **OLA rule** と呼ばれている。
次の条件を導入する：

条件1： $X^i < Y^i, \quad i=1,2.$
条件2： $X_\infty^i = Y_\infty^i, \quad i=1,2.$
条件3： $A_n^i \subset A_{n+1}^i, \quad i=1,2, \quad n \in N.$
条件4： $P[(\cup_n A_n^1) \cap (\cup_n A_n^2)] = 0.$

この４つの条件のもとで、次の結果を得る。

補題1.1. 各 $n \in N$ に対して、$\tau_n^* = \tau_n(\gamma^1)$, $\sigma_n^* = \sigma_n(\gamma^2)$.

補題1.2. $\gamma^i (i=1,2)$ は 命題1.1の条件をみたす。

定理1.1. 各 $n \in N$ に対して、(τ_n^*, σ_n^*) は n における均衡点である。

次に簡単な例を与える。

例題. $U^i = (U_n^i) \in \mathcal{W}$ $(i=1,2)$ は有界で、次をみたす：

$$E[U_{n+1}^i \mid U_n^i > 0] > 0,$$

$$P(U_{n+1}^i \leq 0 \mid U_n^i \leq 0) = 1, \quad P(U_n^i \leq 0 \text{ for } i=1,2) = 0.$$

また、$Z^i = (Z_n^i) \in \mathcal{W}$ $(i=1,2)$ は正で有界とし、割引因子 $\beta\ (0<\beta<1)$ に対して、

$$X_n^i = W_n^i = \sum_{k=0}^{n} \beta^k U_k^i, \quad Y_n^i = X_n^i + \beta^{n+1} E[Z_{n+1}^i \mid \mathcal{F}_n], \quad i=1,2, \quad n \in N$$

とおくと、X^i, Y^i, W^i は $\mathcal{W}$ の要素で、仮定と条件１～４をみたす。従って、

τ_n^*, σ_n^*は定義から、

$$\tau_n^* = \inf\{k \geqq n \mid U_k^1 \leqq 0\}, \quad \sigma_n^* = \inf\{k \geqq n \mid U_k^2 \leqq 0\}$$

とかけ、定理1.1 から、各$n \in N$ に対して、(τ_n^*, σ_n^*) はnにおける均衡点である。

§2. 協力型 Dynkin 問題

この節では、有限制約をもつ協力型 Dynkin 問題を考える。すでに述べたように、Dynkin 問題は零和型と非協力型については多くの研究がなされているが、協力型の研究成果は未だにでていない。しかしながら、以下でわかるように、協力型は多目的の最適停止問題と深く関係があり、そのような研究には Hisano[6], Gugerli[5]がある。また、協力型マルコフゲームの研究としては、Tanaka 他[7, 14, 15]がある。

§2.1では、シャドー最適値(確率変数列)に関するマルチンゲール的な性質を調べ、シャドー最適な停止時間の組の存在について述べる。§2.2では、パレート最適値の性質及びパレート最適な停止時間の組の存在を示す。§2.3では、多目的計画の目標計画の概念を導入して、パレート最適な停止時間の組を求める。

§2.1. シャドー最適と基本的な結果

この節では、シャドー最適に関する性質を一般的に与える。また、これらの結果は次節以降に重要な役割を果たす。

まず、有限制約をもつ停止時間の組の全体をΛ_n, i.e.

$$\Lambda_n = \{(\tau, \sigma) \in \Gamma_n^2 \mid \tau \wedge \sigma < \infty \text{ a.s.}\}$$

とおき、

$$\alpha_n^i = \operatorname*{ess\,sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n^i(\tau, \sigma), \quad i=1,2, \quad n \in N,$$

とする。$\alpha_n^* = (\alpha_n^1, \alpha_n^2)$を**nにおけるシャドー最適値**という。明らかに、$n \in N$ に対して、$\alpha_n^i = G_n^i(\tau^*, \sigma^*)$, i=1,2, をみたす $(\tau^*, \sigma^*) \in \Lambda_n$が存在すれば、$(\tau^*, \sigma^*)$ はnにおける best optimal である、i.e.

$$G_n^i(\tau^*, \sigma^*) \geqq G_n^i(\tau, \sigma), \quad \forall(\tau, \sigma) \in \Lambda_n, \quad \forall i=1,2.$$

一般に、best optimal な停止時間の組が存在することは希である。そこで、$\alpha^i = (\alpha_n^i)$の性質等を調べるために、一般に、$X, Y, W \in \mathcal{W}$ に対して、

$$g(\tau, \sigma) = X_\tau I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma I_{\sigma < \tau} + W_\tau I_{\tau = \sigma},$$

$$G_n(\tau, \sigma) = E[g(\tau, \sigma) \mid \mathcal{F}_n],$$

とおき、

$$\alpha_n = \operatorname*{ess\,sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n(\tau, \sigma), \quad n \in N$$

とする。α_nが $\alpha_n^i (i=1,2)$に対応している。

次の定理は$\alpha = (\alpha_n)$の再帰関係式を与えている。証明は古典的な最適停止問題に対するそれと同様にできる。

定理2.1. (i) αは次をみたす： 各$n \in N$に対して、

$$\alpha_n = \max(X_n, Y_n, W_n, E[\alpha_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]).$$

(ii) αは $(\max(X_n, Y_n, W_n))_{n \in N}$ を支配している最小の優マルチンゲールである。

そこで、

$$\beta_n = \operatorname*{ess\,sup}_{\tau \in \Gamma_n, \tau < \infty} E[\max(X_\tau, Y_\tau, W_\tau) \mid \mathcal{F}_n]$$

とおくと、$\beta = (\beta_n)$も定理2.1の性質をもつことから、

系2.2. $\alpha_n = \beta_n, \ n \in N$.

この系より、よく知られた方法(backward induction)で $\alpha = (\alpha_n)$ を求めることができる。次の補題は上の定理と系からすぐ示すことができるが、最適性の議論にとって重要である。

補題2.1. $\alpha_\infty = \beta_\infty = \limsup_n \max(X_n, Y_n, W_n)$.

定義2.1. $n \in N$ とする。$\varepsilon \geqq 0$ に対して、

$$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n \text{ かつ } \alpha_n \leqq G_n(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon$$

のとき、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$ を**nにおいて(α, ε)-最適**であるという。特に、$\varepsilon = 0$

のとき、単に **(α)-最適**であるという。

定理2.3. $n \in N$, $\varepsilon > 0$ を任意とし、

$$\tau_n^\varepsilon = \inf\{k \geqq n \mid \alpha_k \leqq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\},$$
$$\sigma_n^\varepsilon = \inf\{k \geqq n \mid X_k + \varepsilon < \alpha_k \leqq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}$$

とおくと、$(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$は n において(α, ε)-最適である。

この定理の証明は、α に対する optional sampling theorem と、$\{\tau_n^\varepsilon = k < \sigma_n^\varepsilon\}$ 上で $\alpha_k \leqq X_k + \varepsilon$、$\{\sigma_n^\varepsilon = k < \tau_n^\varepsilon\}$上で $\alpha_k \leqq Y_k + \varepsilon$、$\{\tau_n^\varepsilon = \sigma_n^\varepsilon = k\}$上で $\alpha_k \leqq W_k + \varepsilon$ となる事実を用いる。また、補題2.1より、$\tau_n^\varepsilon \wedge \sigma_n^\varepsilon < \infty$ a.s. である。

注意. 上の定理において、

$$\tau_n^\varepsilon = \inf\{k \geqq n \mid Y_k + \varepsilon < \alpha_k \leqq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\},$$
$$\sigma_n^\varepsilon = \inf\{k \geqq n \mid \alpha_k \leqq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}$$

としてもよい。また、

$$\tilde{\tau}_n^\varepsilon = \inf\{k \geqq n \mid \alpha_k = \beta_k \leqq \max(X_k, Y_k, W_k) + \varepsilon\},$$

とおくと、$\tilde{\tau}_n^\varepsilon$ は（β に対して）n において ε-最適である。また、$\tilde{\tau}_n^\varepsilon = k$ のとき、$A = \{\alpha_k \leqq \max(X_k, W_k) + \varepsilon\}$, $B = \{X_k + \varepsilon < \alpha_k \leqq \max(Y_k, W_k) + \varepsilon\}$ として、$\tau_n^\varepsilon = k$ (on A), $= k+1$ (on B); $\sigma_n^\varepsilon = k+1$ (on A), $= k$ (on B) とおくと、この$(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$も n において(α, ε)-最適である。

次の定理は $\varepsilon = 0$ に対する結果である。

定理2.4. $n \in N$ を任意とし、

$$\tau_n^* = \inf\{k \geqq n \mid \alpha_k = \max(X_k, W_k)\},$$
$$\sigma_n^* = \inf\{k \geqq n \mid X_k < \alpha_k = \max(Y_k, W_k)\}$$

とおく。 $\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$ a.s. ならば、(τ_n^*, σ_n^*)は n において(α)-最適である。

注意. この定理の条件 "$\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$ a.s." に対する十分条件としては、$\max(X_k, Y_k, W_k) \downarrow -\infty$ (as $k \to \infty$) 等が考えられる。

§2.2. パレート最適とスカラー化

この節では、パレート最適の概念を導入して、スカラー化によってパレート最適値の性質を調べ、パレート最適な停止時間の組を求める。

以下、$x=(x_1, x_2)$, $y=(y_1, y_2)$に対する大小関係として、$x_i > y_i$, $i=1,2$ のとき、$x>y$; $x_i \geqq y_i$, $i=1,2$ のとき、$x \geqq y$; $x_i = y_i$, $i=1,2$のとき、$x=y$; $x \geqq y$ かつ $x \neq y$ のとき、$x \geqslant y$ とかくことにする。また、$G_n^*(\tau, \sigma) = (G_n^1(\tau, \sigma), G_n^2(\tau, \sigma))$, $e=(1,1)$とおく。

定義2.2. $n \in N$とする。$\varepsilon \geqq 0$ に対して、

$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n$ かつ

$G_n^*(\tau, \sigma) > G_n^*(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon e$ となる $(\tau, \sigma) \in \Lambda_n$ が存在しない

(resp. $G_n^*(\tau, \sigma) \geqslant G_n^*(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) + \varepsilon e$)

のとき、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$を**nにおいて弱**(resp.**強**)**ε-パレート最適**であるという。

特に、$\varepsilon = 0$のとき単に **弱**(resp.**強**)**パレート最適**であるという。

そこで、次のようにスカラー化を行う。Sを$\lambda \geqq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$をみたす$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2) \in R^2$ の全体とし、S_0を$\lambda > 0$をみたす$\lambda \in S$の全体とする。$\lambda \in S$ に対して、

$$X_n(\lambda) = \lambda_1 X_n^1 + \lambda_2 Y_n^2, \qquad Y_n(\lambda) = \lambda_1 Y_n^1 + \lambda_2 X_n^2,$$

$$W_n(\lambda) = \lambda_1 W_n^1 + \lambda_2 W_n^2,$$

として、

$$\begin{aligned} g(\tau, \sigma : \lambda) &= \lambda_1 g_1(\tau, \sigma) + \lambda_2 g_2(\tau, \sigma) \\ &= X_\tau(\lambda) I_{\tau < \sigma} + Y_\sigma(\lambda) I_{\sigma < \tau} + W_\tau(\lambda) I_{\tau = \sigma} \end{aligned}$$

$$G_n(\tau, \sigma : \lambda) = E[g(\tau, \sigma : \lambda) \mid \mathcal{F}_n] = \lambda_1 G_n^1(\tau, \sigma) + \lambda_2 G_n^2(\tau, \sigma)$$

$$V_n(\lambda) = \operatorname*{ess\,sup}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} G_n(\tau, \sigma : \lambda)$$

とおく。このとき、多目的計画における議論(cf.[1],[13])と同様にして、次の2つの補題を得る。

補題2.2. $\varepsilon > 0$, $n \in N$, $\lambda \in S$を任意とする。

$$V_n(\lambda) < G_n(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon : \lambda) + \varepsilon$$

となる $(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n$ が存在するとき、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$はnにおいて弱$\varepsilon$-パレート最適である。特に、$\lambda \in S_0$ のとき、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$はnにおいて強$\varepsilon$-パレート最適である。

補題2.3. $n \in N$, $\lambda \in S$を任意とする。

$$V_n(\lambda) = G_n(\tau^*, \sigma^* : \lambda)$$

となる $(\tau^*, \sigma^*) \in \Lambda_n$ が存在するとき、(τ^*, σ^*)はnにおいて弱パレート最適である。特に、$\lambda \in S_0$ のとき、(τ^*, σ^*)はnにおいて強パレート最適である。

次の補題は定理2.1からすぐに得られる。

補題2.4. $\lambda \in S$を任意とする。

(i) $V(\lambda)$ は次をみたす: $n \in N$に対して、

$$V_n(\lambda) = \max(X_n(\lambda), Y_n(\lambda), W_n(\lambda), E[V_{n+1}(\lambda) \mid \mathcal{F}_n]).$$

(ii) $V(\lambda)$は $(\max(X_n(\lambda), Y_n(\lambda), W_n(\lambda)))_{n \in N}$ を支配している最小の優マルチンゲールである。

上の補題と定理2.3, 2.4から、この節の重要な2つの定理を得る。

定理2.5. $n \in N$, $\varepsilon > 0$, $\lambda \in S$ を任意とし、

$$\tau_n^\varepsilon = \inf\{k \geq n \mid V_k(\lambda) \leq \max(X_k(\lambda), W_k(\lambda)) + \varepsilon\}$$

$$\sigma_n^\varepsilon = \inf\{k \geq n \mid X_k(\lambda) + \varepsilon < V_k(\lambda) \leq \max(Y_k(\lambda), W_k(\lambda)) + \varepsilon\}$$

とおくと、$(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$はnにおいて弱$\varepsilon$-パレート最適である。特に、$\lambda \in S_0$ のとき、$(\tau_n^\varepsilon, \sigma_n^\varepsilon)$はnにおいて強$\varepsilon$-パレート最適である。

定理2.6. $n \in N$, $\lambda \in S$を任意とし、

$$\tau_n^* = \inf\{k \geq n \mid V_k(\lambda) = \max(X_k(\lambda), W_k(\lambda))\}$$

$$\sigma_n^* = \inf\{k \geq n \mid X_k(\lambda) < V_k(\lambda) = \max(Y_k(\lambda), W_k(\lambda))\}$$

とおくと、$\tau_n^* \wedge \sigma_n^* < \infty$ a.s. ならば、(τ_n^*, σ_n^*)はnにおいて弱パレート最適

である。特に、$\lambda \in S_0$ のとき、(τ_n^*, σ_n^*)はnにおいて強パレート最適である。

§2.3. 目標計画とパレート最適

この節では、パレート最適な停止時間の組を求めるために、多目的計画の目標計画の概念を導入する。

時間nでの目標値M_nを、$M^i \in \mathcal{W}$ (i=1,2)に対して、

$$M = (M_n)_{n \in N} = (M^1, M^2) = ((M_n^1, M_n^2))_{n \in N}$$

とする。また、目標値までの距離を、$\mu = (\mu_1, \mu_2) \geqslant 0$、$(\tau, \sigma) \in \Lambda_n$ に対して、

$$d_n^p(\tau, \sigma; M, \mu) = \| M_n - G_n^*(\tau, \sigma) \|_{\mu, p}$$

とする。但し、$x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2)$に対して、

$$\| x - y \|_{\mu, p} = \left(\sum_{i=1}^{2} \mu_i | x_i - y_i |^p \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty \quad (l_p\text{-norm})$$

$$\| x - y \|_{\mu, \infty} = \max_{i=1,2} (\mu_i | x_i - y_i |), \quad p = \infty \quad (l_\infty\text{-norm})$$

である。さらに、

$$d_n^p(M, \mu) = \operatorname*{ess\,inf}_{(\tau, \sigma) \in \Lambda_n} d_n^p(\tau, \sigma; M, \mu)$$

とおく。

定義2.3. $n \in N$, $\mu \geqslant 0$とする。$\varepsilon \geqq 0$に対して、

$$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon) \in \Lambda_n \text{ かつ } d_n^p(M, \mu) \geqq d_n^p(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon; M, \mu) - \varepsilon$$

のとき、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$を**nにおいて($\varepsilon$;p,M)-最適**という。特に、$\varepsilon = 0$のとき、単に**(p,M)-最適**という。

次の2つの補題も多目的計画の証明と同様にして得られる結果である。

補題2.5. $M \geqq \alpha$, i.e. $M_n^i \geqq \alpha_n^i$, i=1,2, $n \in N$と仮定し、$\varepsilon > 0$と$n \in N$を任意とする。このとき、

(i) 任意の$\mu = (\mu_1, \mu_2) \geqslant 0$: $\mu_1 + \mu_2 = 1$に対して、$(\tau_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$がnにおい

て$(\varepsilon;1,M)$-最適であるならば、$(\tau_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)$はnにおいて弱$\varepsilon$-パレート最適である。特に、$\mu>0$のとき、$(\tau_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)$はn において強$\varepsilon$-パレート最適である。

(ii) $\mu=(1,1)$のとき、$(\tau_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)$がnにおいて$(\varepsilon;\infty,M)$-最適であるならば、$(\tau_\varepsilon,\sigma_\varepsilon)$はnにおいて弱$\varepsilon$-パレート最適である。

補題2.6. $M\geqq\alpha$と仮定し、$n\in N,\mu\geqslant 0$を任意とする。$1\leqq p\leqq\infty$に対して、(τ^*,σ^*)がnにおいて(p,M)-最適であるならば、(τ^*,σ^*)はnにおいて弱パレート最適である。特に、$\mu>0, 1\leqq p<\infty$のとき、(τ^*,σ^*)はnにおいて強パレート最適である。

以下、$p=1$のときのみを考える: $M^i\in\mathscr{W}(i=1,2)$, $\mu\geqslant 0$, $k\geqq n$に対して、

$$X_k^\mu(n)=\mu_1(M_n^1-X_k^1)+\mu_2(M_n^2-Y_k^2),$$

$$Y_k^\mu(n)=\mu_1(M_n^1-Y_k^1)+\mu_2(M_n^2-X_k^2),$$

$$W_k^\mu(n)=\mu_1(M_n^1-W_k^1)+\mu_2(M_n^2-W_k^2)$$

とおくと、$M\geqq\alpha$のとき、

$$d_n^1(\tau,\sigma;M,\mu)=\mu_1(M_n^1-G_n^1(\tau,\sigma))+\mu_2(M_n^2-G_n^2(\tau,\sigma))$$

$$=E[X_\tau^\mu(n)I_{\tau<\sigma}+Y_\sigma^\mu(n)I_{\sigma<\tau}+W_\tau^\mu(n)I_{\tau=\sigma}\mid\mathcal{F}_n]$$

さらに、

$$d_n^1(M,\mu)=\operatorname*{ess\ inf}_{(\tau,\sigma)\in\Lambda_n} d_n^1(\tau,\sigma;M,\mu)$$

である。

定理2.7. $M\geqq\alpha$ かつ $M^i\in\mathscr{W}(i=1,2)$はマルチンゲールであると仮定し、$\mu\geqslant 0$とする。このとき、

(i) $d^1(M,\mu)$は次をみたす: $n\in N$に対して、

$$d_n^1(M,\mu)=\min(X_n^\mu(n),Y_n^\mu(n),W_n^\mu(n),E[d_{n+1}^1(M,\mu)\mid\mathcal{F}_n])$$

(ii) $d^1(M,\mu)$は$(\min(X_n^\mu(n),Y_n^\mu(n),W_n^\mu(n)))_{n\in N}$ に支配されている最大の劣マルチンゲールである。

この定理の証明は、M^iのマルチンゲール性を用いて、定理2.1に帰着すればよい。

注意. $M^i = E[\sup_{n\in N}(\max(X^i_n, Y^i_n, W^i_n))^+]$, i=1,2, とおくと、$M = (M^1, M^2)$は定理2.7の条件をみたす。

上の定理と補題を用いて、定理2.3,2.4と類似な議論を行うことにより、次の2つの定理を得る。

定理2.8. 定理2.7の条件を仮定する。$n\in N$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\geqslant 0:\mu_1+\mu_2=1$, $\varepsilon>0$を任意とし、

$$\tau^\varepsilon_n = \inf\{k\geqq n \mid d^1_k(M,\mu)\geqq \min(X^\mu_k(n), W^\mu_k(n))-\varepsilon\}$$

$$\sigma^\varepsilon_n = \inf\{k\geqq n \mid X^\mu_k(n)-\varepsilon > d^1_k(M,\mu)\geqq \min(Y^\mu_k(n), W^\mu_k(n))-\varepsilon\}$$

とおくと、$(\tau^\varepsilon_n, \sigma^\varepsilon_n)$はnにおいて弱ε-パレート最適である。特に、$\mu>0$のとき、$(\tau^\varepsilon_n, \sigma^\varepsilon_n)$はnにおいて強ε-パレート最適である。

定理2.9. 定理2.7の条件を仮定する。$n\in N$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)\geqslant 0:\mu_1+\mu_2=1$を任意とし、

$$\tau^*_n = \inf\{k\geqq n \mid d^1_k(M,\mu)=\min(X^\mu_k(n), W^\mu_k(n))\}$$

$$\sigma^*_n = \inf\{k\geqq n \mid X^\mu_k(n) > d^1_k(M,\mu)=\min(Y^\mu_k(n), W^\mu_k(n))\}$$

とおくと、$\tau^*_n\wedge\sigma^*_n<\infty$ a.s. ならば、(τ^*_n, σ^*_n)はnにおいて弱パレート最適である。特に、$\mu>0$のとき、(τ^*_n, σ^*_n)はnにおいて強パレート最適である。

参考文献

[1] Aubin, J.P. (1979) "Mathematical Methods of Game and Economic Theory", Amsterdam, North-Holland.

[2] Besoussan, A. and Friedman, A. (1974) Nonlinear variational inequalities and differential games with stopping times, J. Funct. Anal., 16, 305-352.

[3] Chow, Y.S. and Robbins, H. (1961) A matingale system theorem and

applications, In Proc. 4th Berkeley Sympo. "Math. Statist. Prob." Vol.1, Berkeley and Los Angels, Univ. of California Press, 93-104.

[4] Dynkin, E.B.(1969) Game variant of a problem on optimal stopping, Soviet Math. Dokl., 10, 270-274.

[5] Gugerli, U.S.(1987) Optimal stopping of a Markov chain with vector-valued gain function, In Proc. 4th Vilnius Conference "Prob. Theory Math. Statist.", Vol.1, Utrecht, VNU Science Press, 523-528.

[6] Hisano, H.(1980) An existence theorem in a vector-valued optimal stopping problem, Mem. Fac. Scie. Kyushu Univ., Ser.A, 34, 99-106.

[7] Lai, H.-C. and Tanaka, K.(1986) On a D-solution of a cooperative m-person discouted Markov game, J. Math. Anal. Appl., 115, 578-591.

[8] Mamer, J.(1987) Monotone stopping games, J. Appl. Prob., 24, 386-401.

[9] Morimoto, H.(1986) Non-zero-sum discrete parameter stochastic games with stopping times, Prob. Th. Rel. Fields, 72, 155-160.

[10] Morimoto,H.(1987) On noncooperative n-player cyclic stopping games, Stochastics, 20, 27-37.

[11] Nagai, H.(1988) Nonzero-sum stopping games of symmetric Markov processes, Prob. Th. Rel. Fields, 75, 487-497.

[12] Ohtsubo, Y.(1987) A nonzero-sum extention of Dynkin's stopping problem, Math. Oper. Res., 12, 277-296.

[13] 志水清孝(1982) "多目的と競争の理論", 共立出版.

[14] Tanaka, K.(1989) The closest solution to the shadow minimum of a cooperative Dynamic game, Comp. Math. Appl., 18, 181-188.

[15] Zhaohua, L. and Tanaka, K.(1987) On an optimal multistrategy and a weak optimal multistrategy of a Markov game, Scie. Rep. Niigata Univ., Ser.A, No.23, 1-11.