数理解析研究所講究録
第743巻 1991年 1-14



# ある種の境界値問題で定義される線形作用素とスペクトル

## ー Dezinのテキストから ー

兵庫教育大学大学院 (広島県原田中学校)
渡邉浩二 ( Kouji Watanabe )

ある境界条件のもと定数係数線形偏微分方程式から定義されるヒルベルト空間上の作用素のスペクトルの特性を、微分方程式の形および境界条件との関連で調べる。本稿は筆者が兵庫教育大学大学院においてAleksei.A.Dezinの“Partial Differential Equations - An Introduction to a General Theory of Linear Boundary Value Problems -”(Springer-Verlag, 1987)をもとに勉強した内容に基づいている。なお、テキストは、1980年Nauka発行のもののR.P.Boasによる英語訳であるが、この本には誤植が多い。

## §1. 予備的事項

Vをユークリッド空間$R^n$の有界領域とする。ただし、その境界は交角が0でない有限個の十分に滑らかな(n-1)次元曲面とする。

本稿で扱う空間は$V$上で定義された複素数値をとる二乗可積分な関数の全体$L^2(V)$とする。それを$H$と表す。

定義(1.1)

関数$u(x)\in C^m(V)$上のlinear differential operationを

$$L(D)u\equiv\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha u \tag{1}$$

で定義する。ここで、$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$は非負整数$\alpha_j(j=1,\cdots,n)$を成分とするn次元ベクトルとし、

$$D^\alpha=D_1^{\alpha_1}\cdots D_n^{\alpha_n},\qquad D_k\equiv\frac{\partial}{\partial x_k},\qquad |\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$$

とする。係数$a_\alpha$は複素数値、あるいは、$\overline{V}$上の連続関数とする。

定義(1.2)

$L(D)$の定義域を$C^\infty(V)\cap H$とする。そのとき、$H$におけるその閉包を$L(D)$によって生成される最大作用素と呼び、$\tilde{L}$と書く。

定義(1.3)

$L(D)$の定義域を$C_0^\infty(V)$とする。そのとき、$H$におけるその閉包を$L(D)$によって生成される最小作用素と呼び、$L_0$と書く。

定義(1.4)

$L(D)$の閉包$L$で、$L_0\subset L\subset\tilde{L}$となり、$L^{-1}$が存在し、$D(L^{-1})=H$となるような$L$を$L(D)$によって生成されるproper作用素と呼ぶ。ここで、$D(L^{-1})$は$L^{-1}$の定義域とする。

以下、作用素と言えば、ある種の境界条件（初期条件）をみたす関数上で定義されたoperationの閉包とする。

## §2. 常微分作用素

この節では常微分作用素について述べる。

$$x\in V=(0,b),\qquad D\equiv\frac{d}{dx},\qquad L(D)=\sum_{k=0}^{m}a_k(x)D^k \tag{2}$$

とし、$a_k(x)$は$\overline{V}$で連続$(k=1,\cdots,m-1)$、$a_m\equiv 1$とする。

<u>定理（2．1）</u>

operation (2)の定義域をCauchy条件

$$u|_0=u'|_0=\cdots\cdots=u^{(m-1)}|_0=0$$

を満足する滑らかな関数の全体として、Hにおけるその閉包をLとする。そのとき、Lの逆作用素$L^{-1}$が存在し、$\lambda\in\mathbb{C}(|\lambda|<\infty)$はLのレゾルベント集合に属する。さらに、$L^{-1}$は完全連続作用素で、$\{0\}$のみがスペクトルになる。　　（証明略）□

<u>定理（2．2）</u>

operation (2)によって生成されるあらゆるproper作用素は、端点$(x=0,b)$における$m-1$階までの微分係数の同次方程式を満足する$L(D)$の定義域を与えることにより、決定付けることが可能である。　　（証明略）□

## §3. Ⅱ－作用素

Vを一辺の長さが2πのn次元立方体、$P^\infty$を各変数に関して周期的な滑らかな関数の全体とし、$H \equiv L^2(V)$とする。

ここで、定数係数をもつ多項式

$$A(s)=\sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha s^\alpha, \quad s^\alpha = s_1^{\alpha 1}\cdots\cdots s_n^{\alpha n}, \quad |\alpha| = \alpha_1+\cdots\cdots+\alpha_n$$

と、linear differential operation $A(-iD)$とを

$$A(-iD)e^{isx}=A(s)e^{isx}, \quad sx=s_1x_1+\cdots\cdots+s_nx_n$$

となるように関係づける。そのとき、作用素Aを、$P^\infty$上で定義された$A(-iD)$のHにおける閉包で定義する。この作用素AをⅡ－作用素と呼ぶことにする。

例

$D_x^2+D_y^2-1$の場合であれば、多項式$A(s)=-s_1^2-s_2^2-1$の$s_1$に$-iDx$を，$s_2$に$-iDy$を代入すると、$A(-iD)=D_x^2+D_y^2-1$となる。

命題（３．１）

Ⅱ－作用素は正規作用素である。　（証明略）□

命題（３．２）

Ⅱ－作用素Aの点スペクトル$P\sigma A$は$\{A(s);s\in Z^n\}$である。Ⅱ－作用素Aのスペクトル$\sigma A$は点スペクトル$P\sigma A$の$\mathbb{C}$における閉集合$\overline{P\sigma A}$である。$\sigma A \backslash P\sigma A$はⅡ－作用素Aの連続スペクトル$C\sigma A$である。　（証明略）□

命題（３．３）

$n\leq 2$の時、Ⅱ－作用素Aのレゾルベント集合$\rho A$は必ず空集

合ではない。$n>2$ の時、そのスペクトルが複素平面全体になるようなII－作用素Aが存在する。

［証明］　$n=1$ の時は明らか。

$n=2$ の時は、$(s_1,s_2)\in Z^2$ に対して

$$\mathrm{Re}A(s_1,s_2)+i\,\mathrm{Im}(s_1,s_2)$$

を対応させることによって定義される $Z^2$ から $\mathbb{C}$ への写像を考える。このとき、写像の代数的性質によって整数値の座標の点 $(s_1,s_2)$ の集合の写像による像は複素平面で稠密になりえないので、$n=2$ の時レゾルベント集合は空でないことが分かる。

$n=3$ の時、多項式

$$A(s)=s_1+\alpha s_2+i(s_3+\beta s_2{}^2)$$

を考える。ここで、$s=(s_1,s_2,s_3)\in Z^3$、$\alpha,\beta$ は無理数とする。そのとき、集合 $\{A(s);s\in Z^3\}$ は複素平面において稠密である。何故ならば、このことは、$t=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$ に対して対 $(\alpha t,\beta t^2)$ の小数部分は単位正方形において一様分布であるという事実から分かる（Cassels［1］参照）。　□

$s\in Z^n$ に対して、$|s|$ を $|s|^2=\sum_k s_k{}^2$ によって定義する。

<u>命題（３．４）</u>

II－作用素Aに対して逆作用素 $A^{-1}$ が存在するとき、$A^{-1}$ が完全連続作用素であるための必要十分条件は $|s|\to\infty$ のとき $|A(s$

$)|\to\infty$となることである。　　　　　(証明略) □

## §4．一階の作用素方程式

$t\in(0,b)=V_t$, $V_x$を辺の長さが$2\pi$のn次元立方体とし、$V=V_t\times V_x$とする。$H_t\equiv L^2(V_t)$, $H_x\equiv L^2(V_x)$とし、$H=H_t\otimes H_x$とする。

この節では、

$$Lu\equiv(D_t-A)u=f \qquad (L)$$

という形のtに関する一階の作用素方程式について考える。

ここで、$f\in H$、$D_t:H_t\to H_t$は条件

$$\mu u|_{t=0}-u|_{t=b}=0 \qquad (\mu\in\mathbb{C}) \qquad (\Gamma)$$

によって生成された作用素とし、$A:H_x\to H_x$はⅡ-作用素とする。

定義(4．1)

Hの元uに対して、以下の条件を満足するような、uに収束する滑らかな関数の列$\{u_i(x,t)\}$が存在するとき、uはL-Γ問題の解と呼ばれる。

①各$u_i$はあらゆる変数$x_k$について周期$2\pi$の関数である。

②各$u_i$はtについての条件(Γ)を満足する。

③$i\to\infty$のとき$L(D)u_i=f_i\to f$となる。(Hにおいて収束する)

まず、$\mu u|_{t=0}-u|_{t=b}=0$という境界条件の$\mu$の値によって作用素Lのスペクトルがどのようになるか考える。

そこで、作用素Lのスペクトルの性質を述べるのに作用素

$$T(\lambda)=\exp b(A+\lambda)$$

$(T(\lambda):H_x\to H_x)$のスペクトルを使って以下に述べる。

定理（4．2）

複素平面上の点$\lambda\in C$が$\rho L, P\sigma L, C\sigma L$に属する必要十分条件は条件(Γ)における数$\mu$がそれぞれ$\rho T(\lambda), P\sigma T(\lambda), C\sigma T(\lambda)$に属することである。

［証明］　uとfを$u=\sum_{s\in Z^n}u_s(t)e^{isx}$, $f=\sum_{s\in Z^n}f_s(t)e^{isx}$と展開することによって、方程式(L)は

$$D_t u_s - A(s)u_s = f_s,\qquad s\in Z^n \tag{3}$$

という無限個の常微分方程式を生ずる。条件(Γ)から方程式(3)の解は条件

$$\mu u_s|_0 - u_s|_b = 0 \tag{$\Gamma_s$}$$

を満足する。このことを使って、以下、補題（4．3）～補題（4．6）の順に証明することによって定理（4．2）は得られる。　□

補題（4．3）

任意の元$f\in H$に対して$L$-$\Gamma$問題が一意に解ける(i.e. $0\in\rho L$)ための必要十分条件は、条件$(\Gamma_s)$のもとで(3)のすべての方程式が唯一の解をもち、かつ、あらゆる$s\in Z^n$に対して

$$\|u_s\|_t \leqq c\|f_s\|_t \tag{$\Phi_s$}$$

が成り立つような定数$c>0$が$s$とは無関係に存在することである。　　　　(証明略) □

<u>補題 (4.4)</u>

$\mu\in\rho T(0)$ならば、0は$\rho L$に属する。　　　　(証明略) □

<u>補題 (4.5)</u>

$\mu\in P\sigma T(0)$ならば、0は$P\sigma L$に属する。　　　　(証明略) □

<u>補題 (4.6)</u>

$\mu\in C\sigma T(0)$ならば、0は$C\sigma L$に属する。　　　　(証明略) □

上の定理 (4.2) から、$\mu\neq 0,\infty$のとき$L$の点スペクトルは次の形の点

$$-A(s)+b^{-1}[\ln|\mu|+i\arg\mu+2k\pi i],\quad s\in Z^{n},\quad k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots$$

からなり、また

$$\sigma L=\overline{P\sigma L},\qquad C\sigma L=\sigma L\setminus P\sigma L$$

となることが分かる。

次に、上の定理 (4.2) を使って、方程式(L)に対する$t$についてのCauchy問題（初期条件が$u|_{t=0}=0$、または、$u|_{t=b}=0$）を考える。ただし、ここでは、初期条件$u|_{t=0}=0$を表すのに、$\mu=\infty$を使うことにする。

<u>命題 (4.7)</u>

$\mu=0$または$\infty$ならば、II-作用素$A$に対して、$L$の点スペクトル$P\sigma L$はいつも空である。

［証明］　このことは、点$0,\infty$が$P\sigma T(0)$に入らないことから分かる。　□

命題（４．８）

$\mu=0$または$\infty$ならば、複素平面$\mathbb{C}$上のすべての有限な点（無限遠点でない点）が$L$のレゾルベント集合$\rho L$に属するか、または、$\mathbb{C}$上のすべての点が連続スペクトル$C\sigma L$に属するかの、どちらかである。

［証明］　このことは、点0（または$\infty$）が$A(s)$を$A(s)+\lambda$に置き換えることに関係なく、$\rho T(0)$もしくは$C\sigma T(0)$に属することから分かる。　□

上の命題（４．８）をさらに詳しく述べるために、$A(s)$を$A(s)=R(s)+iQ(s)$の和の形にわけて考える。ここで、$R(s)$と$Q(s)$は実係数の多項式である。

命題（４．９）

$u|_{t=0}=0$という初期条件で生成されたoperator $L$のレゾルベント集合に0が属する$(0\in\rho L)$(i.e.任意の$f\in H$に対して解$u$が一意に存在し、$L^{-1}$が有界である)ための必要十分条件は、$\sup_{s\in Z^n}R(s)\leqq+M<+\infty$が成り立つようなある定数$M>0$が存在することである。

$u|_{t=b}=0$という初期条件で生成されたoperator $L$のレゾルベント集合に0が属する$(0\in\rho L)$ための必要十分条件は、$\inf_{s\in Z^n}R$

$(s)\geqq -M>-\infty$が成り立つようなある定数$M>0$が存在することである。　　　　(証明略)□

<u>例</u>

operation $L(D)\equiv D_t-D_x{}^2-D_y{}^2+1$の場合、$A(s)=-s_1{}^2-s_2{}^2-1$であり、また$A(s)=R(s)$であるから、$\sup_{s\in Z^2}R(s)\leqq -1<+\infty$となる。よって、上の命題から初期条件$u|_{t=0}=0$によって生成される作用素Lのレゾルベント集合に0が属する。

同様にして、$L(D)\equiv D_t+D_x{}^2+D_y{}^2-1$の場合は初期条件$u|_{t=b}=0$によって生成される作用素Lのレゾルベント集合に0が属することが分かる。

<u>命題(4.10)</u>

あらゆるII－作用素Aに対してtに関する条件

$$u|_{t=0}=u|_{t=b}=0 \qquad (4)$$

とoperation $L(D)\equiv D_t-A(-iD)$によって生成される作用素$L_0$: $H\to H$は有界な逆作用素$L_0{}^{-1}$をもつ。　　　　(証明略)□

上の命題で定義された作用素$L_0$はtに関して§1で述べた最小作用素の役割を果す。この作用素$L_0$を便宜上t-最小作用素と呼ぶことにする。t-最大作用素として我々はtについての条件を与えていない関数上で定義されたoperation $L(D)$によって生成された作用素$\tilde{L}$を選ぶことにする。

<u>命題(4.11)</u>

$$R(\tilde{L})=H$$

ここで、$R(\tilde{L})$は$\tilde{L}$の値域とする。　　　　（証明略）□

そこで我々は任意のⅡ－作用素Aに対してproper作用素$L:H\to H$を生成するtについての境界条件を与える方法を考える。まず、与えられたAに対して$Z^n$を次のように$Z^{n+}$、$Z^{n-}$に分ける。

もし$\mathrm{Re}A(s)\leqq 0$ならば$s\in Z^{n-}$、　もし$\mathrm{Re}A(s)>0$ならば$s\in Z^{n+}$。

この分け方により$H_x$も$H_x=H_x^{+}+H_x^{-}$という直交部分空間の和に分けられる。ここで$H_x^{+}(H_x^{-})$はベクトル$e^{isx}, s\in Z^{n+}(s\in Z^{n-})$によって張られる閉部分空間とする。また$\mu^{-}$と$\mu^{+}$をそれぞれ$H_x^{-}$と$H_x^{+}$への射影とする。

<u>定理（４．１２）</u>

あらゆるⅡ－作用素Aに対して条件

$$\mu^{-}u|_{t=0}-\mu^{+}u|_{t=b}=0 \qquad (5)$$

によって作用素Lの定義域を特色づけるならば、proper作用素$L:H\to H$が決定される。　　　　（証明略）□

<u>命題（４．１３）</u>

作用素Lが条件(5)によって生成される時、あらゆる複素平面上の（有限な）点は$\rho L$に属する。さらに$|s|\to\infty$のとき$|\mathrm{Re}A(s)|\to\infty$が成り立てば、$L^{-1}$は完全連続作用素で0だけがそのスペクトルの点である。　　　　（証明略）□

## §5．二階の作用素方程式

この節では

$$Lu\equiv(D_t^2+2BD_t-A)u=f \qquad (6)$$

という形のtに関する二階の作用素方程式のCauchy問題とDirichlet問題を考える。ここで、A,BはⅡ-作用素：$H_x\to H_x$とする。

### 5．1．Cauchy問題

ここでは、operation (6)とtに関するCauchy条件

$$u|_{t=0}=u_t'|_{t=0}=0$$

によって生成される作用素Lのスペクトルについて述べる。

まず、上のuとfを$u=\sum_{s\in Z^n}u_s(t)e^{isx}$と$f=\sum_{s\in Z^n}f_s(t)e^{isx}$に展開して式(6)に代入すると、

$$\sum_{s\in Z^n}(D_t^2+2B(s)D_t-A(s))u_s(t)e^{isx}=\sum_{s\in Z^n}f_s(t)e^{isx}$$

となる。ここで、A(s)、B(s)はⅡ-作用素と関係付けられた多項式の値とする。$\{e^{isx}\}$, $s\in Z^n$は完全直交系なので各$s\in Z^n$に対して

$$(D_t^2+2B(s)D_t-A(s))u_s(t)=f_s(t) \qquad (7)$$

が成り立つ。そこで式(7)の特性多項式$k^2+2B(s)k-A(s)=0$を考え、その解を$k_1(s)$、$k_2(s)$とする。この解を使って、次の定理が言える。

定理（５．１）

あらゆる$s\in Z^n$に対して$\mathrm{Re}\,k_1(s)\leqq M<+\infty$かつ$\mathrm{Re}\,k_2(s)\leqq M<+\infty$が成り立つような定数$M>0$が存在するならば、operation (6)とCauchy条件によって生成される作用素$L:H\to H$に対して複素平面上のあらゆる点は$L$のレゾルベント集合に属する($\rho L=\mathbb{C}$)。

$i\to+\infty$のとき$\mathrm{Re}\,k(s_{(i)})\to+\infty$が成り立つ（ここで$k(s_{(i)})$は解の部分列）ような列$\{s_{(i)}\}\subset Z^n$が存在するならば、作用素$L$の連続スペクトルは複素平面全体になる($C\sigma L=\mathbb{C}$)。

（証明略）□

Inverse Cauchy問題

$$u|_{t=b}=u_t'|_{t=b}=0 \qquad (8)$$

に対しても、定理（５．１）の類似の定理が以下のように成り立つ。

定理（５．１’）

もし、あらゆる$s\in Z^n$に対して$\mathrm{Re}\,k_1(s)\geqq -M>-\infty$かつ$\mathrm{Re}\,k_2(s)\geqq -M>-\infty$となるような定数$M>0$が存在するならば、(8)によって生成される作用素$L$に対して$\rho L=\mathbb{C}$が成り立つ。

もし、$i\to\infty$のとき$\mathrm{Re}\,k(s_{(i)})\to\infty$となるような列$\{s_{(i)}\}\subset Z^n$が存在するならば、$C\sigma L=\mathbb{C}$となる。　（証明略）□

上の定理（５．１）は、二階の楕円型方程式($B=0, A(s)=\sum_k s_k^2$)のCauchy問題が不適切である($C\sigma L=\mathbb{C}$)という結果や、

二階の双曲型方程式($B=0, A(s)=-\sum_k s_k^2$)のCauchy問題が適切である($\rho L=\mathbb{C}$)という結果に適合している。

5．2．Dirichlet問題

定理（5．2）

operation (6)とtに関する境界条件

$$u|_{t=0}=u|_{t=b}=0$$

によって生成される作用素$L:H\to H$の点スペクトルは次の形

$$-p^2\pi^2 b^{-2}-B^2(s)-A(s), \quad p=\pm 1, \pm 2, \cdots\cdots, \quad s\in Z^n$$

の複素平面上の点からなる。

また、点スペクトルの補集合$\mathbb{C}\backslash P\sigma L$は、作用素Lのレゾルベント集合全体$\rho L$になるか、連続スペクトル全体$C\sigma L$になるかのどちらかである。　　　　　（証明略）□

《参考文献》

[1] J.W.S.Cassels: An Introduction to Diophantine approximation, Cambridge University Press, 1957.

[2] A.A.Dezin: Partial Differential Equations - An Introduction to a General Theory of Linear Boundary Value Problems -, Springer-Verlag,Berline, 1987.